Contrôle Continu
"Algèbre 1 - HAX708X"

20 décembre 2023

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 1h30

Questions isolées *(15 points)*

a. Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. Montrer que pour tout A-module M, le produit tensoriel $M \otimes_A A/I$ est isomorphe à M/IM.

b. Soit E et F des espaces vectoriels de dimension fini sur un corps $\mathbb{K}$. Décrire un isomophisme entre les deux espaces vectoriels $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ et $\hom_{\mathbb{K}}(E, F)$.

c. À un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, on associe l'endomorphisme $D_u : \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ défini par la relation $D_u(x \otimes y) = u(x) \otimes u(y)$. Montrer les équivalences

(1) u nilpotent $\Longleftrightarrow D_u$ nilpotent.

(2) u diagonalisable $\Longleftrightarrow D_u$ diagonalisable.

d. Déterminer les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$.

e. Soit G un groupe fini. Notons $\mathcal{Z}[G]$ le centre de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$. Montrer que $\mathcal{Z}[G]$ est un sous-espace vectoriel dont on déterminera une base.

f. Soit (V, ρ) une représentation complexe d'un groupe fini G, et χ_V son caractère. Montrer que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, $\forall g \in G$.

Exercice *(6 points)*

On considère le groupe $G \subset GL_2(\mathbb{R})$ engendré par la rotation R d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la symétrie S définie par $S(x, y) = (x, -y)$.

(1) Montrer que le groupe G possède 12 éléments.

(2) Décrire les classes de conjugaison du groupe G.

(3) Montrer que G possède 4 représentations irréductibles complexes de dimension 1.

(4) Montrer que G possède 2 représentations irréductibles complexes de dimension 2.