



CONTRÔLE CONTINU  
"ALGÈBRE 1 - HAX708X"

27 OCTOBRE 2023



*Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.*

*Durée : 1h30*

**Questions isolées (15 points)**

- a. Soit  $A$  un anneau principal. Montrer que toute suite croissante d'idéaux de  $A$  est stationnaire.
- b. Soit  $A$  un anneau commutatif et  $M$  un  $A$ -module. On suppose que  $M$  n'a pas de sous  $A$ -module autre que lui-même et  $\{0\}$ . Montrer que  $M$  est isomorphe à  $A/I$ , où  $I$  est un idéal maximal de  $A$ .
- c. On considère l'anneau de polynômes  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$ , ainsi que le quotient  $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$ . Montrer que  $\mathbb{K}$  est un corps. Quel est son cardinal ?
- d. Soient  $a, b \geq 1$  : on note  $a \wedge b$  leur pgcd. Montrer que le groupe  $\text{hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}$ .
- e. Déterminer une base du  $\mathbb{Z}$ -module

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, 6x + 15y - 10z \in 8\mathbb{Z}\}.$$

- f. Calculer les facteurs invariants du groupe

$$G = \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/432\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}.$$

**Exercice (5 points)**

Soit  $A$  l'ensemble des nombres rationnels qui s'écrivent comme une fraction  $\frac{a}{b}$  avec  $b$  premier avec 3.

- (1) Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ .
- (2) Déterminer les éléments inversibles ainsi que les éléments irréductibles de  $A$ .
- (3) Montrer que  $A$  est un anneau principal.