



Algèbre linéaire et calcul matriciel

(HAI406 – Année universitaire 2023–2024)



Feuille d'exercices N°3

1. ÉCHAUFFEMENT (AVANT LES TD)

Question 1. Si $A \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, alors le produit AB est dans : $\mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

Question 2. Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^5 dans \mathbb{R}^7 de matrice associée A . Quelle est la taille de A ? Soit B une matrice de taille $(4, 2)$ et g l'application linéaire associée. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de g ?

Question 3. Écrire la matrice associée à l'application linéaire définie par :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 5y - z + 2t - u \\ 3x + 2y + t + u \\ -7x + z - 3t \\ -x - y - z - t - u \end{pmatrix}.$$

Question 4. Déterminer l'application linéaire associée à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 5. Parmi les opérations matricielles suivantes, préciser celles qui sont bien définies, le format de la matrice obtenue et faire le calcul le cas échéant : $-2A$, $A + B$, $x + \xi$, AB , BA , Ax , xA , $B\xi$, ξB , avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \xi = (4 \quad 0 \quad 1).$$

Question 6. On définit les applications linéaires : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$, et $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2x + 5y - 2z \\ 3x + 4y + 8z \end{pmatrix}$. Déterminer $f + g$, $f \circ g$ et $g \circ f$ lorsque c'est possible.

2. TRAVAUX DIRIGÉS

Exercice 1. Soient f et g deux applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Chacun des énoncés (1) à (5) ci-dessous est équivalent à un et un seul des énoncés (A) à (E). Reconstituez les paires d'énoncés équivalents.

- (1) f et g sont injectives.
- (2) $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0\}$
- (3) $f = g$
- (4) Le noyau de f est inclus dans celui de g .
- (5) Si f est nulle, alors g est nulle aussi.

- (A) $\forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) = g(u)$
- (B) $\forall u \in \mathbb{R}^n, (f(u) = 0 \Rightarrow u = 0)$ et $(g(u) = 0 \Rightarrow u = 0)$
- (C) $(\forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) = 0) \Rightarrow (\forall u \in \mathbb{R}^n, g(u) = 0)$
- (D) $\forall u \in \mathbb{R}^n, (f(u) = g(u) = 0 \Rightarrow u = 0)$
- (E) $\forall u \in \mathbb{R}^n, (f(u) = 0 \Rightarrow g(u) = 0)$

Exercice 2. Existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui envoie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 3. Existe-t-il une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui envoie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Exercice 4. Soit \mathcal{P} un plan d'équation $x + 2y - z = 0$ et \mathcal{D} une droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer une représentation paramétrique de \mathcal{P} .
- (b) Déterminer des générateurs de l'image de \mathcal{P} par l'application linéaire f de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
- (c) Déterminer une équation de l'image de \mathcal{P} .
- (d) Déterminer l'image réciproque de \mathcal{D} par f .

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'elle est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6. (*Examen, janvier 2016*). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Expliciter l'application linéaire ϕ associée à A , en précisant bien les espaces de départ et d'arrivée.
- Déterminer $\text{Ker } \phi$. L'application ϕ est-elle injective ?
- Décrire $\text{Im } \phi$ comme un plan vectoriel engendré par deux vecteurs à préciser, puis en en donnant une équation. L'application ϕ est-elle surjective ? Bijective ?
- On définit une deuxième application linéaire ψ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 par l'expression : $\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \\ 0 \\ 2x+z \end{pmatrix}$.
 - L'application $\phi \circ \psi$ est-elle définie ? Si oui, donner la matrice associée.
 - L'application $\psi \circ \phi$ est-elle définie ? Si oui, donner la matrice associée.

3. RÉVISIONS ET APPROFONDISSEMENT

Exercice 7. Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 , e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique, $u = e_1 + 2e_2$ et $v = -e_1 + e_2$. On suppose que $f(u) = e_1$ et $f(v) = 2e_1 + e_2$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique et calculer l'image de $3e_1 + 3e_2$.

Exercice 8. Déterminer image et noyau de l'application linéaire associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Les applications linéaires de matrices ci-dessous sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'image et le noyau dans chaque cas.

Exercice 10. (*Contrôle continu, novembre 2015*). Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z+t \\ 2x+3y+z+6t \\ y+t \\ x+2y+z+3t \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

- Écrire la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .
- Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
- Rappeler les définitions du noyau et de l'image de f . Donner une représentation paramétrique du noyau de f et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- Donner une représentation en compréhension de l'image de f . En déduire que l'image de f est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par trois vecteurs que l'on écrira explicitement.
- L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
- Sans calculs*, donner une description paramétrique de l'ensemble des antécédents de $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z + 3 = 0 \text{ et } y + az - 1 = 0\}$. Donner une description paramétrique de \mathcal{D}_a , puis discuter en fonction de a si \mathcal{D}_a intersecte le plan d'équation $x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 12. (*Examen session 2, juin 2018*). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \alpha \\ -1 & \alpha & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour quels α la matrice B_α est-elle inversible ?

Exercice 13. Si A_1 et A_2 sont inversibles, B_1 est l'inverse de $3A_1$ et B_2 l'inverse de $\frac{1}{2}A_2$, quel est l'inverse de A_1A_2 ?
 (a) $6B_1B_2$? (b) $\frac{1}{6}B_1B_2$? (c) $\frac{2}{3}B_1B_2$? (d) $\frac{3}{2}B_1B_2$? (e) $6B_2B_1$? (f) $\frac{1}{6}B_2B_1$? (g) $\frac{2}{3}B_2B_1$? (h) $\frac{3}{2}B_2B_1$?

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , A^3 puis A^{17} et A^{2018} .

Exercice 15. On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 8A - 16I$, puis que $A^n = n4^{n-1}A - (n-1)4^nI$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On note $f^2 = f \circ f$.

- Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.
- Montrer l'équivalence entre « $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ » et « $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ ».