Université de Montpellier & Polytech — L1 PEIP
HA8201H Mathématiques

Devoir encadré - 16 février 2024

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier les affirmations vraies. Trouver un contre-exemple en cas d'affirmation fausse.

1. Une famille libre de vecteurs de E a au plus n vecteurs.
2. Une famille de vecteurs de E ayant plus de n vecteurs est génératrice.
3. Une famille génératrice de E contient toujours une base.
4. Une famille libre de E contient toujours une base.
5. La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition de correction :

1. Vrai. C'est une conséquence du théorème de la base incomplète.
2. Faux. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((0,1),(0,1),(0,1))$ a trois vecteurs mais n'est pas génératrice.
3. Vrai. C'est une conséquence du théorème de la base incomplète.
4. Faux. La famille vide est libre mais ne contient pas de base.
5. Faux. Prendre dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces vectoriels $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ et $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$. $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car $(0,1)$ et $(1,0)$ sont dans $F \cup G$ mais pas leur somme $(1,1)$.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^4$

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs

$$\mathbf{u} = (1,-1,0,0), \quad \mathbf{v} = (0,1,-1,0), \quad \mathbf{w} = (0,0,1,-1).$$

1. Calculer la dimension de $\langle \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \rangle$.
2. Trouver une équation qui caractérise $\langle \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \rangle$.

Proposition de correction :

1. Les trois vecteurs sont linéairement indépendants, la famille $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ est donc libre. Comme elle engendre $\langle \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \rangle$, c'est donc une base de $\langle \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \rangle$. La dimension de l'espace est égale au cardinal de la famille, c'est à dire 3.
2. $\langle \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \rangle = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = 0\}$.

Exercice 3 : Familles libres et génératrices

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que
   — si $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe (de somme non nécessairement égale à E),
   — et si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{L}_i$ est une famille libre dans F_i,

   alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i$ est libre dans E.
2. Montrer que
   — si $F_1 + \ldots + F_n = E$
   — et si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{G}_i$ est une famille génératrice de F_i,

   alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$ est une famille génératrice de E.
3. Montrer que
   — si $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires dans E (en somme directe et de somme égale à E),
   — et si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{B}_i$ est une base F_i,

   alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ est une base de E.

Proposition de correction :

1. Notons $\mathcal{L}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,N_i})$ la famille libre finie de F_i (elle contient N_i éléments), on fait de même pour chaque $i = 1, \ldots, n$. On considère la réunion des familles L_i. On considère la combinaison linéaire
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N_i} \lambda_{ij} x_{ij} = 0$$
   Puisque F_i est un sev, $\sum_{j=1}^{N_i} \lambda_{ij} x_{ij} \in F_i$. Comme les F_i sont en somme directe, on en déduit que $\sum_{j=1}^{N_i} \lambda_{ij} x_{ij} = 0$. Or la famille $\mathcal{L}_i$ est libre, les coefficients $\lambda_{ij} = 0$ pour $ij = 1, \ldots, N_i$. Ceci est vrai pour tout $i = 1, \ldots, n$. Donc la famille est libre.
2. $\displaystyle \text{vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{vect}(\mathcal{G}_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i = E.$
3. Résulte de 1. et 2.

Exercice 4 : Base de fonctions affines par morceaux

1. Soient $p_0(x) = 1 - x$ et $p_1(x) = x$ définies sur $[0, 1]$. Montrer (p_0, p_1) forme une base des fonctions affines définies sur $[0, 1]$.
2. On considère maintenant une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ constituée des $N+2$ points $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$ avec $h = \dfrac{1}{N+1}$. Soient $(\varphi_i)_{i=1,\ldots,N}$ la famille constituée des N fonctions définies par
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

(a) Représenter les graphes des fonctions φ_1, φ_N et d'une fonction φ_i, pour $i = 2, \ldots, N-1$. On pourra d'abord calculer $\varphi_i(x_{i-1})$, $\varphi_i(x_i)$ et $\varphi_i(x_{i+1})$.

(b) Montrer que $(\varphi_i)_{i=1,\ldots,N}$ est une famille libre.

(c) On considère l'ensemble

$$H = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continues sur [0,1] t.q. } f(0) = f(1) = 0 \\ \text{et } f_{|[x_i,x_{i+1}]} \text{ est affine pour } i = 0, \ldots, N\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $(\varphi_i)_{i=1,\ldots,N}$ est une base de H. Déterminer la dimension de H.

Proposition de correction :

1. Soit f une fonction polynomiale de degré 1. Elle s'écrit donc $f(x) = ax + b$ avec a, b deux réels. L'ensemble des fonctions polynomiales de degré 1 est donc de dimension 2. La famille $(p_0, p1)$ contient bien deux éléments. On observe que la famille est libre. En effet supposons $\alpha p_0(x) + \beta p_1(x) = 0$ pour tout x réel. Pour $x = 0$, on a $\alpha p_0(0) + \beta p_1(0) = 0$ implique $\alpha = 0$. En évaluant en $x = 1$, on trouve $\beta = 0$. La famille est donc libre.

   (p_0, p_1) forme donc une base des fonctions polynomiales de degré 1 définies sur $[0, 1]$.

2. (a) Au tableau.

   (b) Soient α_i, $i = 1, \ldots, N$, des réels. On considère la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(x) = 0$. Montrons que $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Pour cela, on observe que $\varphi_i(x_i) = 1$ et $\varphi_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$. On évalue alors la combinaison linéaire en x_j. On obtient que $\alpha_j = 0$. En faisant de même pour chaque point x_j, $i = 1, \ldots, N$, on en déduit que tous les α_i sont nuls. La famille est donc libre.

   (c) Les φ_i sont des fonctions continues sur $[0, 1]$, nulles en 0 et 1 et affines par morceaux. Ce sont donc des éléments de l'ensemble considéré, noté H. On va montrer que $(\varphi_i)_i$ forme une famille génératrice de H. Soit $v \in H$. On pose $w(x) = \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\varphi_i(x)$. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction w coïncide avec la fonction v aux points x_i et x_{i+1} et donc sur $[0, 1]$ tout entier. Ainsi toute fonction de H s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions φ_i, $i = 0, \ldots, N$.

   La famille est donc génératrice. C'est donc une base de H. Comme elle compte N éléments, $\dim(H) = N$.