1.3 Applications linéaires

1.3.1 Définitions

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit une application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to F \\ x &\mapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

Définition 13. *On dit que φ est $\mathbb{K}$-linéaire ou simplement linéaire si*

1. $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E, \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.

Remarque 7. *Ces deux conditions équivalent à la condition*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y).$$

Si $E = F$, on dit que φ est un endomorphisme de E. On note $End(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Lorsque $f : E \to F$ est une application linéaire et que E est de dimension finie, la théorie de la dimension fournit de nouvelles propriétés très riches pour l'application linéaire f.

Définition 14. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels.*

— *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications $\mathbb{K}$-linéaires de E dans F.*
— *Si $E = F$, l'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ correspond à $End(E)$.*
— *Si $F = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ est appelé le dual de E.*
— *Les applications $\varphi : E \to \mathbb{K}$ s'appellent les formes $\mathbb{K}$-linéaires sur E.*

Proposition 8. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F (noté F^E), c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. On admet que F^E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des lois suivantes. Pour $f, g : E \to F$, on considère

$$\begin{aligned} f + g : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) + g(x), \end{aligned}$$

et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda f : E &\to F \\ x &\mapsto \lambda f(x). \end{aligned}$$

On a $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$.

1. $0_{F^E} : x \in E \mapsto 0 \in F$ est $\mathbb{K}$-linéaire donc $0 \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Soient $\varphi, \psi : E \to F$ deux applications $\mathbb{K}$-linéaires. Alors $\varphi + \psi$ est $\mathbb{K}$-linéaire. En effet on vérifie (il faut le faire au tableau) que

$$(\varphi + \psi)(x + \lambda y) = (\varphi + \psi)(x) + \lambda(\varphi + \psi)(y).$$

3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\lambda\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On vérifie (il faut le faire au tableau) que

$$\lambda\varphi(x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \lambda\mu\varphi(y).$$

□

On retiendra que $\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}(E,E)$ et E^* sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (une partie de ces ces résultats est vue en TD, l'autre pourra faire l'objet d'un exercice d'examen).

Proposition 9. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $\psi \circ \varphi : x \in E \to \psi(\varphi(x)) \in G$ est $\mathbb{K}$-linéaire, donc $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E,G)$. D'autre part $1_E : x \in E \to x \in E$ est $\mathbb{K}$-linéaire donc $1_E \in \mathcal{L}(E,E) = End(E)$.*

Démonstration. Le dernier résultat est évident.
Montrons que $\psi \circ \varphi$ est $\mathbb{K}$-linéaire si φ et ψ le sont. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(x + \lambda y) &= \psi(\varphi(x + \lambda y))\\ &= \psi(\varphi(x) + \lambda\varphi(y))\\ &= \psi(\varphi(x)) + \lambda\psi(\varphi(y))\\ &= (\psi \circ \varphi)(x) + \lambda(\psi \circ \varphi)(y).\end{aligned}$$

□

On énonce des propriétés ensemblistes des applications linéaires.

Proposition 10. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Si φ est bijective alors $\varphi^{-1} : F \to E$ est $\mathbb{K}$-linéaire.*

Démonstration. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On doit montrer que φ^{-1} est linéaire, c'est-à-dire que

$$\varphi^{-1}(x + \lambda y) = \varphi^{-1}(x) + \lambda\varphi^{-1}(y).$$

Or $x = \varphi(\varphi^{-1}(x))$ et $y = \varphi(\varphi^{-1}(y))$. Donc $\varphi^{-1}(x + \lambda y) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x)) + \lambda\varphi(\varphi^{-1}(y))) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x) + \lambda\varphi^{-1}(y))) = \varphi^{-1}(x) + \lambda\varphi^{-1}(y)$ par linéarité de φ. □

Définition 15. *Si φ est une application linéaire bijective, on dit que c'est un isomorphisme.*

1.3.2 Image et image réciproque de sous-espaces

Soit $\varphi : E \to F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. On peut montrer que :
- Soit $A \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\}$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Soit $B \subset F$ un sous-espace vectoriel de F. Alors $\varphi^{-1}(B) = \{x \in E | \varphi(x) \in B\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

On ne fait pas la démonstration, laissée en exercice.

Définition 16. *(Image et noyau)*
- *$\varphi(E) = Im(\varphi) = \{\varphi(x), x \in E\}$ est l'image de φ. C'est un sous-espace vectoriel de F. $\varphi(E) = F$ si et seulement si φ est surjective.*
- *$\varphi^{-1}(\{0_F\}) = Ker(\varphi) = \{x \in E | \varphi(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de φ.*

Proposition 11. *φ est injective si et seulement si son noyau est le sous-espace nul.*

Démonstration. Supposons φ est injective. Pour $x \in E$, $\varphi(x) = 0$ équivaut à $\varphi(x) = \varphi(0)$ puisque φ est linéaire. L'injectivité implique que $x = 0$. Donc $Ker(\varphi) = \{x \in E | \varphi(x) = 0\} = \{0_E\}$.
Inversement supposons que $Ker(\varphi) = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors $\varphi(x) - \varphi(y) = 0$. Par linéarité, on a $\varphi(x - y) = 0$. Donc $x - y \in Ker(\varphi) = \{0_E\}$. Donc $x - y = 0_E$ ce qui implique $x = y$. Ainsi φ est injective. □

Remarque 8. *En particulier, φ est un isomorphisme si et seulement si $Im(\varphi) = F$ ET $Ker(\varphi) = \{0\}$.*

1.3.3 Applications linéaires et dimension

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi : E \to F$ une application linéaire.

Définition 17. *On appelle rang de φ la dimension de son image notée $Rg(\varphi)$.*

$$Rg(\varphi) = dim(Im(\varphi)).$$

Remarque 9. *Puisque $Im(\varphi) \subset F$, on a $Rg(\varphi) \leq dim(F)$. Et $Rg(\varphi) = dim(F)$ si et seulement si φ est surjective.*

Théorème 3. *(du rang) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi : E \to F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. Alors*

$$dim(E) = Rg(\varphi) + dim(Ker(\varphi)).$$

Corollaire 3. *On a*

- *φ est injective si et seulement si $dim(E) = Rg(\varphi) \Rightarrow dim(E) \leq dim(F)$.*
- *φ est surjective $\Rightarrow dim(F) \leq dim(E)$.*
- *φ bijective $\Rightarrow dim(F) = dim(E)$.*

Démonstration. Soit $\varphi : E \to F$. On a $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset E$.
Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. En utilisant le théorème de la base incomplète, on la complète en une base $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ de E.
On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(E) &= \varphi\left(\langle e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\rangle\right) \\
&= \{\varphi(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) |\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \\
&= \{\lambda_1 \varphi(e_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(e_n) |\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \text{ par linéarité de } \varphi \\
&= \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\rangle \\
&= \langle 0, \ldots, 0, \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)\rangle \text{ car } (e_1, \ldots, e_k) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi) \\
&= \langle \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)\rangle
\end{aligned}$$

qui contient $n - k$ vecteurs. Donc $\mathrm{Rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq n - k = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$.
Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Il suffit même de montrer qu'elle est libre, puisqu'elle est maximale. Soient $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \ldots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0.$$

Par linéarité, c'est équivalent à

$$\varphi(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\lambda_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in \mathrm{Ker}(\varphi) = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle.$$

Donc il existe $\mu_1, \ldots, \mu_k$ tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \ldots \mu_k e_k \\
\Leftrightarrow &\mu_1 e_1 + \ldots \mu_k e_k - \lambda_{k+1}e_{k+1} - \ldots - \lambda_n e_n = 0 \\
\Rightarrow &\ \mu_1 = \ldots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0,
\end{aligned}$$

car $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
Ainsi $\dim(\varphi(E)) = \mathrm{Rg}(\varphi) = n - k = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$. □

On retiendra que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))).$$

1.3.4 Représentation matricielle des applications linéaires

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie : $p = dim(E)$ et $n = dim(F)$.
Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Soit $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de F.
Soit $1 \leq j \leq p$, alors :

$$\varphi(e_j) = m_{1j}e'_1 + \ldots + m_{n,j}e'_n,$$

où $m_{1j}, \ldots, m_{n,j}$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$. Le tableau de ces scalaires $M = (m_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ est une matrice à n lignes et p colonnes. C'est donc un élément de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
On note cette matrice $M = Mat_{B\to B'}(\varphi)$ ou $M = Mat^B_{B'}(\varphi)$, la matrice de φ dans les bases B (base de départ) et B' (base d'arrivée).

1.3.5 Matrice d'un vecteur ou d'un système de vecteurs

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p. $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Un vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique

$$x = x_1e_1 + \ldots x_pe_p.$$

Définition 18. *On appelle matrice de x dans la base B et on note $Mat_B(x)$ le vecteur colonne*

$$Mat_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, on note

$$Mat_B(x_1, \ldots, x_n) = (C_1 \ldots C_n),$$

où $C_j = Mat_B(x_j)$. C'est donc une matrice $p \times n$.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie : $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le but est de traduire l'égalité vectorielle

$$y = f(x)$$

en une égalité matricielle. Soient B une base de E et B' une base de F.

Proposition 12. *On note :*

— $A = Mat_{B\to B'}(f)$,

— *pour* $x \in E$, $X = Mat_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$,

— *pour* $y \in F$, $Y = Mat_{B'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Alors si $y = f(x)$, on a $Y = AX$, autrement dit

$$Mat_{B'}(f(x)) = Mat^B_{B'}(f)Mat_B(x).$$

Démonstration 1. *Soient $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de F. Considérons $x \in E$ alors*

$$Mat_{B'}(f(x)) = Mat_{B'}^{B}(f) Mat_B(x).$$

En effet soit $M = Mat_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,p} \end{pmatrix}$.
Alors $x = x_1 e_1 + \ldots x_p e_p = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$.
Il s'en suit que $f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$ par linéarité de f.
Or $f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} e'_k$. Donc $f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{k=1}^{n} m_{kj} e'_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} m_{kj} x_j \right) e'_k = \sum_{k=1}^{n} y_k e'_k$, où $y_k = \sum_{j=1}^{p} m_{kj} x_j$.
Ainsi $Y = MX$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

1.3.6 Composition des applications linéaires et matrices

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On introduit trois bases :
- $B = (e_1, \ldots, e_p)$ base de E,
- $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ base de F,
- $B" = (e_1", \ldots, e_m")$ base de G.

Soient $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux applications linéaires. On considère la composée

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi : E &\to G \\ x &\mapsto \psi(\varphi(x)) \end{aligned}$$

qui est également linéaire.

Proposition 13.

$$Mat_{B \to B''}(\psi \circ \varphi) = Mat_{B' \to B''}(\psi) Mat_{B \to B'}(\varphi).$$

Démonstration. On note

$$A = Mat_{B \to B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix},$$

$$B = Mat_{B' \to B''}(\psi) = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$C = Mat_{B \to B''}(\psi \circ \varphi) = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}.$$

Le produit $BA = (d_{ik})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq k \leq p}$ où $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}$.
On doit montrer que $BA = C$.
Or $(\psi \circ \varphi)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} e''_i$, pour $1 \leq k \leq p$, par définition de C.

Et

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(e_k) &= \psi(\varphi(e_k)) \\
&= \psi\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} e'_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \psi(e'_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} e_i" \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}\right) e_i" \\
&= \sum_{i=1}^{m} d_{ik} e_i".
\end{aligned}$$

Donc $d_{ik} = c_{ik}$ et $BA = C$. □

1.3.7 Matrice de passage et formule de changement de base

Que se passe-t-il si on considère des bases différentes pour les espaces de départ et d'arrivée ? Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 19. *Soit B et B' deux base de E. On appelle matrice de passage de la base B vers B' la matrice carrée de taille $n \times n$ notée $P_{B \to B'}$, dont les colonnes sont les corrdonnées des vecteurs de la base B' exprimés dans la base B.*

Proposition 14. *La matrice de passage $P_{B \to B'}$ est la matrice associée à l'identité*

$$\begin{aligned} id_E : (E, B') &\to (E, B) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

où l'espace de départ est muni de la base B' et celui d'arrivée muni de la base B. Autrement dit

$$P_{B \to B'} = Mat_{B' \to B}(id_E).$$

Proposition 15. *On a deux résultats*

1. *La martice de passage est inversible et*

$$P_{B' \to B} = (P_{B \to B'})^{-1}.$$

2. *Si B, B' et $B"$ sont trois bases de E, alors*

$$P_{B \to B''} = P_{B \to B'} P_{B' \to B''}.$$

Les démonstrations sont laissées en exercices (ou feront l'objet d'un devoir encadré).

Proposition 16. *Soit B et B' deux bases de E. Soit $x \in E$. Alors*

$$Mat_B(x) = P_{B \to B'} Mat_{B'}(x).$$

On en vient à la formule générale de changement de base.

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Soient B_E et B'_E deux bases de E.
- Soient B_F et B'_F deux bases de F.
- Soit $P = P_{B_E \to B'_E}$ la matrice de passage de B_E à B'_E.
- Soit $Q = P_{B_F \to B'_F}$ la matrice de passage de B_F à B'_F.
- Soit $A = Mat_{B_E \to B_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base B_E vers la base B_F.
- Soit $B = Mat_{B'_E \to B'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base B'_E vers la base B'_F.

Théorème 4. *(Formule de changement de base)*

$$B = Q^{-1}AP.$$

Démonstration. L'application $f : (E, B'_E) \to (F, B'_F)$ se factorise de la façon suivante

$$(E, B'_E) \overset{\mathrm{Id}_E}{\to} (E, B_E) \overset{f}{\to} (F, B_F) \overset{\mathrm{Id}_F}{\to} (F, B'_F),$$

avec $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$. On a donc l'égalité des matrices suivantes :

$$\begin{aligned} B &= Mat_{B'_E \to B'_F}(f) \\ &= Mat_{B_F \to B'_F}(id_F) \times Mat_{B_E \to B_F}(f) \times Mat_{B'_E \to B_E}(id_E) \\ &= P_{B_F \to B'_F} \times Mat_{B_E \to B_F}(f) \times P_{B_E \to B'_E}, \end{aligned}$$

d'où la formule. □

Remarque 10. *Par convention on a que $Mat_B(\varphi) = Mat_{B \to B}(\varphi)$.*

On remarque en particulier que si $E = F$, φ est un endomorphisme. On considère B et B' deux bases de E. Alors

$$Mat_{B'}(\varphi) = P^{-1} Mat_B(\varphi) P,$$

où $P = Mat_B(B')$.