TD de mathématiques pour économistes

Licence 1 Economie

Mickael Beaud
Université de Montpellier

November 29, 2023

Thème 2. Optimisation des fonctions à plusieurs variables

1 Conditions du premier ordre

Exercice 1

Déterminer les valeurs stationnaires des fonctions suivantes:

1. $y = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5$
2. $y = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 1$
3. $y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2$
4. $y = \frac{1}{2}x_1 - 2x_1^2 + 4x_2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2$
5. $y = 2x_1^3 - 3x_1x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$
6. $y = \left[x_1^2 + x_2^4 + x_3^6\right]^2$
7. $y = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1 + 5x_3$
8. $y = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$
9. $y = 2\left[x_1 - x_2\right]^2 - x_1^4 - x_2^4$

Exercice 2

Considérer le modèle du duopole de Cournot (voir la **Section 2.1** du CM):

1. Calculer la quantité totale vendue si le prix égalise le coût marginal (i.e. comme sur un marché parfaitement concurrentiel).
2. Calculer la quantité totale vendue si les deux entreprises s'entendent pour maximiser le profit global (i.e. comme un monopole).
3. En déduire que la quantité totale vendue dans le duopole de Cournot se situe entre ces deux extrêmes.

Exercice 3

Une entreprise produit un bien qu'elle vend sur deux marchés séparés. Le marché 1 est un marché concurrentiel où le prix de vente unitaire est $p_1 = 60$. Le marché 2 est un marché où l'entreprise est en situation de monopole, avec une demande $p_2 = 100 - q_2$, où q_2 est la quantité vendue sur le marché 2. La fonction de coût total de l'entreprise est $C = \left[q_1 + q_2\right]^2$, où q_1 est la quantité vendue sur le marché concurrentiel 1.

1. Calculer les quantités qui maximisent le profit de l'entreprise. Montrer que l'entreprise égalise sa recette marginale sur les deux marchés.

2. Supposons que le prix concurrentiel chute et devient $p_1 = 10$. Calculer les quantités qui maximisent le profit de l'entreprise. Commenter.

Exercice 4

Deux entreprises en situation de duopole produisent un même bien qu'elles vendent sur un marché dont la demande est $p = 10 - \frac{1}{10}[q_1 + q_2]$, où q_1 est la quantité produite par l'entreprise 1, et q_2 est la quantité produite par l'entreprise 2. Leurs fonctions de coût total sont $C_1 = \frac{1}{4}q_1$ pour l'entreprise 1, et $C_2 = \frac{1}{2}q_2$ pour l'entreprise 2.

1. Déterminer l'équilibre de Cournot.

2. Les firmes décident de s'entendre et se comportent comme un monopole. Calculer l'équilibre.

3. Comparer les deux équilibres. Commenter.

Exercice 5

Un monopole monoproduit fait face à une demande $p = 100 - Q$. Le monopole produit la quantité $Q = q_1 + q_2$ à partir de deux sites de production, la quantité q_1 sur le site 1 et la quantité q_2 sur le site 2, avec $Q = q_1 + q_2$. Le site de production 1 réalise la quantité q_1 pour un coût total $C_1 = 2q_1^2$. Le site de production 2 réalise la quantité q_2 pour un coût total $C_2 = 3q_2^2$.

1. Etablir les conditions du premier ordre nécessaires à la maximisation du profit et calculer l'équilibre.

2. Comparer le coût marginal des deux sites de production à l'équilibre. Commenter.

2 Conditions du second ordre

Exercice 1

Considérer les fonctions de l'Exercice 1 ci-dessus (conditions du premier ordre) pour lesquelles nous avons identifié les valeurs stationnaires. Dans chaque cas, déterminer s'il s'agit d'une valeur maximale, minimale, ou d'un point selle.

Exercice 2

Montrer que la fonction de profit du monopole multiproduit (**Section 2.1** du CM) est strictement concave. En déduire que l'équilibre identifié est un maximum global.

Exercice 3

Montrer que la fonction de profit des entreprises en duopole (**Section 2.1** du CM) est strictement concave. En déduire que les fonctions de meilleure réponse maximisent effectivement le profit.

Exercice 4

Montrer que la fonction de profit dans l'Exercice 6 ci-dessus (conditions du premier ordre) est strictement concave. En déduire que l'équilibre identifié est un maximum global.

Exercice 5

Une entreprise opérant sur des marchés concurrentiels produit un bien en quantité y, vendu au prix unitaire $p = 64$, en utilisant deux facteurs de production, le travail en quantité L, acheté au prix unitaire $w = 2$, et le capital en quantité K, acheté au prix unitaire $r = 4$. La fonction de production de l'entreprise est de type Cobb-Douglas $y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}}$.

1. Etablir les conditions du premier ordre nécessaires à la maximisation du profit. Calculer les quantités optimales de facteurs utilisées.
2. Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum.

Exercice 6

Considérer le même contexte que l'Exercice 5 ci-dessus, mais avec une fonction de production $y = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{3}{4}}$.

1. Quel problème apparaît? Commenter.

3 Restrictions directes sur les variables

Exercice 1

Résoudre les problèmes suivants:

1. $\min\limits_{x_1,x_2} : y = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 10,\ 2 \leq x_2 \leq 10$

2. $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1$

3. $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2 \quad s.c.\ 1 \leq x_1 \leq 2,\ 1 \leq x_2 \leq 2$

4. $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2 + x_1x_2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 1 \leq x_2 \leq 2$

5. $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1^3 - 3x_1x_2 + x_1^2 - 2x_2^2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1$

6. $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1^3 - 3x_1x_2 + x_1^2 - 2x_2^2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 1 \leq x_2 \leq 2$