Mathématiques pour économistes

L1 économie

Mickael Beaud

Maître de conférences des universités (MCU)
Faculté d'économie de l'université de Montpellier (UM)
Centre d'Economie de l'Environnement de Montpellier (CEE-M)
(Courriel: mickael.beaud@umontpellier.fr)

March 24, 2023

Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- L'**optimisation** est fondamentale en sciences économiques et les méthodes mathématiques d'**optimisation** sont à la base de la plupart des **modèles économiques**.
- Par exemple, la **théorie de la demande** est basée sur un modèle de décision dans lequel le consommateur choisit le panier de biens qu'il préfère (i.e. celui qui **maximise son utilité**) parmi les paniers de biens accessibles (compte tenu de son budget).
- De même, la **théorie de l'offre** est basée sur un modèle de décision dans lequel l'entreprise choisit la combinaison de facteurs la **moins couteuse** (i.e. celle qui **minimise son coût de production**) parmi les combinaisons de facteurs permettant de réaliser un certain niveau de production. Puis, l'entreprise choisit le niveau de production qui **maximise son profit**.

Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- L'**optimisation** et la **rationalité** sont pratiquement synonymes en économie.
- Formellement, **optimiser** signifie **maximiser** ou **minimiser** une fonction sur un ensemble donné.
- L'**optimisation** permet de **résoudre** ou de **trouver les solutions** des **modèles économiques**.
- Les **prédictions** des **modèles économiques** découlent des **solutions** des **problèmes d'optimisation** qu'ils contiennent.

Thème 2: Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- Les **valeurs extrêmes** d'une fonction sont les valeurs **maximales** ou **minimales** de la fonction.
- Les **valeurs stationnaires** d'une fonction correspondent aux points où les **dérivées partielles d'ordre 1** de la fonction sont **toutes nulles**.

Definition (1)

La **valeur stationnaire** d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^n$, apparaît en un **point stationnaire** $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ où les n égalités suivantes sont vérifiées simultanément:

$$\begin{array}{rcl} f_1\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) & = & 0 \\ f_2\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) & = & 0 \\ & & ... \\ f_n\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) & = & 0 \end{array}$$

Ce sont les **conditions du premier ordre**.

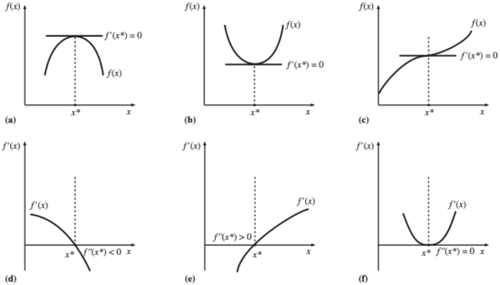
Conditions du premier ordre

- Pour les **fonctions à une variable**, les **points stationnaires** ne correspondent pas nécessairement aux **valeurs extrêmes** d'une fonction (lorsqu'il s'agit de **points d'inflexion** de la fonction).
- C'est également le cas pour les **fonctions à plusieurs variables**.
- Pour une fonction à n variables, une **valeur stationnaire** de la fonction peut correspondre à **un point selle**, où la fonction atteint un **maximum** par rapport à certaines variables et un **minimum** par rapport aux autres variables.

- Pour une **fonction à une variable** $f(x)$, si $f'(x^*) = 0$ pour une certaine valeur de $x = x^*$, alors la fonction f admet soit un **maximum**, soit un **minimum**, soit un **point d'inflexion** en $x = x^*$.
  - Si $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) > 0$, alors f admet un **minimum local** au point $x = x^*$.
  - Si $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) < 0$, alors f admet un **maximum local** au point $x = x^*$.
  - Noter que $f''(x^*) = 0$ est **nécessaire** pour que f admette un **point d'inflexion** au point $x = x^*$. Ce cas est donc exclu si $f''(x^*) > 0$ ou $f''(x^*) < 0$.

Conditions du premier ordre

Fonctions à une variable: Maximum, minimum et point d'inflexion

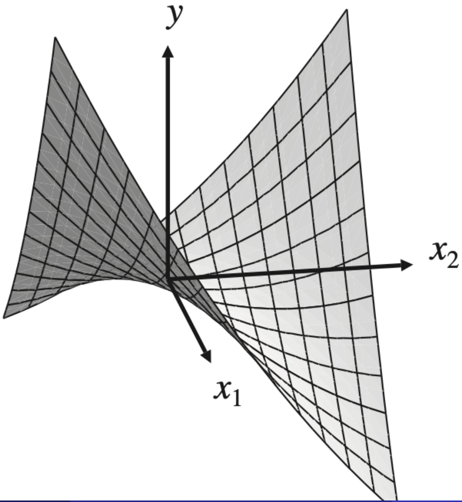


Conditions du premier ordre

- Pour une **fonction à une variable**, il n'y a qu'une seule façon de quitter un point x^*.
- Mais pour une **fonction à plusieurs variables**, il existe une infinité de façons de quitter un point $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$.
- Il est donc plus complexe de caractériser les **valeurs extrêmes** d'une **fonction à plusieurs variables**.
- Par exemple, pour une fonction à deux variables $f(x_1, x_2)$, les conditions $f_1(x_1^*, x_2^*) = f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$, $f_{11}(x_1^*, x_2^*) > 0$ et $f_{22}(x_1^*, x_2^*) > 0$, ne sont pas **suffisantes** pour garantir un **minimum local** au point (x_1, x_2).

Conditions du premier ordre

- Les complications qui apparaissent dans le cas de fonctions à plusieurs variables sont ici similaires à celles que nous avons évoqué au début de la **Section 1.4** et à travers l'**Exemple 24** et la **Figure 15** pour la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2$ (avec $f_1 = 2x_1 - 5x_2$ et $f_2 = 2x_2 - 5x_1$).
- Nous avons en effet remarqué que cette fonction n'est pas **convexe**, alors que $f_{11} = 2 > 0$ et $f_{22} = 2 > 0$.
- Cette fonction admet un **minimum local** au point $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ lorsque l'on fait varier x_1 **seulement** (car $f_1 = 0$ et $f_{11} > 0$), ou x_2 **seulement** (car $f_2 = 0$ et $f_{22} > 0$).
- Toutefois, la **Figure 15** montre que la fonction n'admet pas un **minimum local** au point $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ lorsque l'on fait varier x_1 **et** x_2.


y
x_2
x_1

Conditions du premier ordre

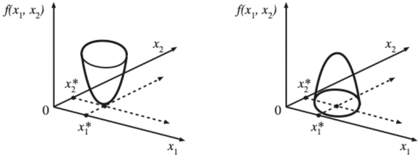
- Comme pour les **fonctions à une variable**, le fait qu'une **fonction de plusieurs variables** admette une **valeur stationnaire** en un point ne garantit pas qu'il s'agisse d'une **valeur extrême** (**minimum** ou **maximum**) de la fonction.
- Les **conditions du premier ordre** sont **nécessaires** mais pas **suffisantes**.
- Nous devons considérer les **conditions du second ordre** et étudier les **dérivées partielles d'ordre 2**.
- En outre, nous devons tenir compte non seulement des **dérivées partielles d'ordre 2 directes** (f_{ii}), mais également des **dérivées partielles d'ordre 2 croisées** (f_{ij}, $i \neq j$).

Conditions du premier ordre

- La **Figure 1** ci dessous illustre quatre cas ou une fonction à deux variables admet une **valeur stationnaire**.
- Seuls les cas (a) et (b) correspondent à des **valeurs extrêmes**. Un **minimum** cas (a). Un **maximum** cas (b).
- Les cas (c) et (d) illustrent un **point selle**. Un **minimum** dans la direction de x_1 et un **maximum** dans la direction de x_2 cas (c).Un **maximum** dans la direction de x_1 et un **minimum** dans la direction de x_2 cas (d)

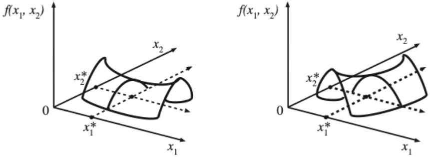
Conditions du premier ordre

Figure 1. Valeur stationnaire



(a) minimum in x_1-direction, minimum in x_2-direction

(b) maximum in x_1-direction, maximum in x_2-direction



(c) minimum in x_1-direction, maximum in x_2-direction

(d) maximum in x_1-direction, minimum in x_2-direction

Conditions du premier ordre

Theorem (1)

Si une fonction $f(\mathbf{x})$*, définie sur* $\mathbb{R}^n$*, admet un* **maximum local** *au point* $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$*, soit*

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$$

pour tous les points $\mathbf{x}$ *aux alentours (éventuellement très proches) du point* $\mathbf{x}^*$*, alors la fonction* f *admet une* **valeur stationnaire** *en* $\mathbf{x}^*$*:*

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) &= 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) &= 0 \\ &\ldots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) &= 0 \end{aligned}$$

sont vérifiées simultanément. Ces **conditions du premier ordre** *sont donc* **nécessaires** *pour un* **maximum local***.*

Conditions du premier ordre

- Pour illustrer le fait que les **conditions du premier ordre** sont **nécessaires** (**Théorème 1**), considérons la **différentielle totale** au point $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ où la fonction admet un **maximum local**:

$$dy = df(\mathbf{x}^*) = f_1(\mathbf{x}^*)\,dx_1 + f_2(\mathbf{x}^*)\,dx_2 + ... + f_n(\mathbf{x}^*)\,dx_n$$

- Si $\mathbf{x}^*$ correspond à un **maximum local**, alors $dy = 0$.

Conditions du premier ordre

$$dy = df\left(\mathbf{x}^*\right) = f_1\left(\mathbf{x}^*\right) dx_1 + f_2\left(\mathbf{x}^*\right) dx_2 + ... + f_n\left(\mathbf{x}^*\right) dx_n$$

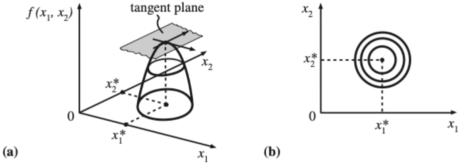
- **Raisonnons par l'absurde** et supposons qu'au moins une des **dérivées partielles d'ordre 1** ne soit pas nulle.
  - Par exemple, si $f_1\left(\mathbf{x}^*\right) > 0$, choisissons $dx_1 > 0$ (et $dx_2 = dx_3 = ... = dx_n = 0$). On obtient $dy > 0$, et donc $\mathbf{x}^*$ n'est pas un **maximum local**.
  - De même, si $f_1\left(\mathbf{x}^*\right) < 0$, choisissons $dx_1 < 0$ (et $dx_2 = dx_3 = ... = dx_n = 0$). On obtient $dy > 0$, et donc $\mathbf{x}^*$ n'est pas un **maximum local**.
  - Si $\mathbf{x}^*$ correspond à un **maximum local**, on doit donc avoir $f_1\left(\mathbf{x}^*\right) = 0$, sinon il est toujours possible d'augmenter localement la valeur de la fonction avec $dx_1 \neq 0$ (et $dx_2 = dx_3 = ... = dx_n = 0$).

Conditions du premier ordre

- Les **Figure 2a** et **2b** illustrent un **maximum** (**global**) pour une fonction à deux variables.
- Sur la **Figure 2a**, on observe que le **plan tangent** est **horizontal** au point où la fonction atteint son **maximum**. Ainsi, on a $f_1\left(x_1^*, x_2^*\right) = 0$ et $f_2\left(x_1^*, x_2^*\right) = 0$.
- Sur la **Figure 2b**, on a représenté les **courbes de niveau** de la fonction. Le niveau le plus haut correspond au point où la fonction atteint son **maximum**.

Conditions du premier ordre

Figure 2



Conditions du premier ordre

- Un raisonnement symétrique s'applique dans le cas d'un **minimum**.
- Nous disposons donc également du **Théorème 2** suivant.

Conditions du premier ordre

Theorem (2)

Si une fonction $f(\mathbf{x})$, définie sur $\mathbb{R}^n$, admet un **minimum local** *au point $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, soit*

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$$

pour tous les points x aux alentours (éventuellement très proches) du point $\mathbf{x}^*$, alors la fonction f admet une **valeur stationnaire** *en $\mathbf{x}^*$:*

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) & = & 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) & = & 0 \\ & & ... \\ f_n(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) & = & 0 \end{array}$$

sont vérifiées simultanément. Ces **conditions du premier ordre** *sont donc* **nécessaires** *pour un* **minimum local**.

Example (1)

Cherchons les **valeurs stationnaires** des fonctions à plusieurs variables suivantes

$$\begin{array}{rrcl}
(i) & f(x_1, x_2) & = & 2x_1^2 + x_2^2 \\
(ii) & f(x_1, x_2) & = & 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 \\
(iii) & f(x_1, x_2) & = & 4x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_1^3 \\
(iv) & f(x_1, x_2, x_3) & = & 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3 \\
(v) & f(x_1, x_2) & = & x_1^2 - x_2^2
\end{array}$$

(i) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$.

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = 2x_2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$4x_1^* = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2^* = 0$$

- Elles sont satisfaites (uniquement) au point $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.
- La fonction f a une **unique valeur stationnaire** (uniquement) au point $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.

(ii) $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2.$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$4 - 2x_1^* + x_2^* = 0 \quad \text{et} \quad 2 - 2x_2^* + x_1^* = 0$$

- Elles sont satisfaites (uniquement) au point $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) \approx (3.33, 2.67)$.
- La fonction f possède une **unique valeur stationnaire** au point $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

(*iii*) $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1^3$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 8x_1 - x_2 - 3x_1^2 \quad \text{et} \quad f_2 = -x_1 + 2x_2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$8x_1^* - x_2^* - 3\left[x_1^*\right]^2 = 0 \quad \text{et} \quad -x_1^* + 2x_2^* = 0$$

- Elles sont satisfaites aux points $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{15}{6}, \frac{5}{4}\right) = (2.5, 1.25)$ et $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0, 0)$.
- La fonction f possède **deux valeurs stationnaires**, une au point $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{15}{6}, \frac{5}{4}\right)$, et une au point $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0, 0)$.

(iv) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1 - 1, \quad f_2 = 2x_2 \quad \text{et} \quad f_3 = 8x_3 + 2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$4x_1^* - 1 = 0, \quad 2x_2^* = 0 \quad \text{et} \quad 8x_3^* + 2 = 0$$

- Elles sont satisfaites (uniquement) au point $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right) = (0.25, 0, -0.25)$.
- La fonction f possède une **unique valeur stationnaire** au point $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$.

$(v) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 2x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = -2x_2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$2x_1^* = 0 \quad \text{et} \quad -2x_2^* = 0$$

- Elles sont satisfaites (uniquement) au point $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.
- La fonction f possède une **unique valeur stationnaire** au point $(0, 0)$.

- On considère un **monopole multiproduit** produisant deux biens. Le bien 1 est produit en quantité x_1, vendu au prix unitaire p_1, et le bien 2 est produit en quantité x_2, vendu au prix unitaire p_2.
- Les **fonctions de demande** (supposées **linéaires**) sont

$$\begin{aligned} x_1(p_1, p_2) &= 100 - 2p_1 + p_2 \\ x_2(p_1, p_2) &= 120 + 3p_1 - 5p_2 \end{aligned}$$

- Comme $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} > 0$ et $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$, les biens sont des **substituts** pour les consommateurs.

- Les **fonctions de demande inverses** sont

$$\begin{aligned} p_1(x_1, x_2) &= \frac{620}{7} - \frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 \\ p_2(x_1, x_2) &= \frac{540}{7} - \frac{3}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2 \end{aligned}$$

- Remarquons que $\frac{\partial p_1}{\partial x_2} < 0$ et $\frac{\partial p_2}{\partial x_1} < 0$.
- Par exemple si la production de x_1 augmente, son prix p_1 baisse, la demande de bien 2 diminue (car substituts) et son prix p_2 baisse pour tout niveau de production de bien 2. Donc $\frac{\partial p_2}{\partial x_1} < 0$. La demande inverse de bien 2 se déplace parallèlement à elle-même vers le bas dans le repère (x_2, p_2).

- Supposons que la **fonction de coût** du **monopole** est également **linéaire**:

$$C(x_1, x_2) = 50 + 10x_1 + 20x_2$$

- La **fonction de profit** est

$$\pi(x_1, x_2) = p_1(x_1, x_2)\,x_1 + p_2(x_1, x_2)\,x_2 - C(x_1, x_2)$$

- En injectant les **demandes inverses** et la **fonction de coût** dans la **fonction de profit**, on obtient

$$
\begin{aligned}
\pi\left(x_1, x_2\right) &= p_1\left(x_1, x_2\right) x_1 + p_2\left(x_1, x_2\right) x_2 - C\left(x_1, x_2\right) \\
&= \left[\frac{620}{7} - \frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2\right] x_1 + \left[\frac{540}{7} - \frac{3}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2\right] x_2 \\
&\quad - \left[50 + 10x_1 + 20x_2\right] \\
&= -\frac{5}{7}x_1^2 - \frac{2}{7}x_2^2 - \frac{4}{7}x_1 x_2 + \frac{550}{7}x_1 + \frac{400}{7}x_2 - 50
\end{aligned}
$$

- D'après le **Théorème 1**, les **conditions du premier ordre** sont:

$$
\begin{aligned}
\pi_1\left(x_1^*, x_2^*\right) &= -\frac{10}{7}x_1^* - \frac{4}{7}x_2^* + \frac{550}{7} = 0 \\
\pi_2\left(x_1^*, x_2^*\right) &= -\frac{4}{7}x_2^* - \frac{4}{7}x_1^* + \frac{400}{7} = 0
\end{aligned}
$$

- Les **conditions du premier ordre** sont équivalentes à

$$\begin{aligned} 5x_1^* + 2x_2^* &= 275 \\ x_2^* + x_1^* &= 100 \end{aligned}$$

- Les solutions sont $(x_1^*, x_2^*) = (25, 75)$. En injectant les solutions dans les **demandes inverses** on a $(p_1^*, p_2^*) = (60, 45)$. En injectant les solutions dans la **fonction de coût** on a $C^* = 1800$. En injectant les solutions dans la **fonction de profit** on a $\pi^* = 3075$.
- Nous verrons comment vérifier que c'est un **maximum** dans la section suivante.

- La **règle de Cramer** permet de **résoudre** les **systèmes d'équations linéaires**

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= e \\ cx_1 + dx_2 &= f \end{aligned}$$

- Sous **forme matricielle**, il s'écrit:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

- Si $ad - bc \neq 0$ le système admet une **unique solution**

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - bc} \quad \text{et} \quad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

- On peut appliquer la **règle de Cramer** pour le **système d'équations linéaires** formé par les **conditions du premier ordre** associées à la **maximisation du profit du monopole multiproduit**.
- Sous **forme matricielle**, il s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 \\ 100 \end{pmatrix}$$

où $a = 5$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 275$ et $f = 100$.

- Obtient une **unique solution** (car $ad - bc = 3 \neq 0$):

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 275 & 2 \\ 100 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{275 - 200}{5 - 2} = \frac{75}{3} = 25$$

$$x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 275 \\ 1 & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{500 - 275}{5 - 2} = \frac{225}{3} = 75$$

- On peut également appliquer la **règle de Cramer** pour trouver les **demandes inverses.**
- Sous **forme matricielle** elles s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - x_1 \\ 120 - x_2 \end{pmatrix}$$

où $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$, $d = 5$, $e = 100 - x_1$ et $f = 120 - x_2$.

- Obtient une **unique solution** (car $ad - bc = 7 \neq 0$):

$$\begin{aligned}
p_1^* &= \frac{\begin{vmatrix} 100 - x_1 & -1 \\ [120 - x_2] & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{[100 - x_1]\,5 - [120 - x_2]\,[-1]}{10 - 3} \\
&= \frac{620 - 5x_1 - x_2}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2^* &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 100 - x_1 \\ -3 & [120 - x_2] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2\,[120 - x_2] - [100 - x_1]\,[-3]}{10 - 3} \\
&= \frac{540 - 3x_1 - 2x_2}{7}
\end{aligned}$$

- Deux entreprises en situation de **duopole**, l'entreprise 1 et l'entreprise 2, produisent le même bien, et le vendent sur un marché dont la fonction de demande est **linéaire**:

$$P(Q) = 100 - Q$$

où

$$Q = q_1 + q_2$$

est la quantité totale de bien sur le marché, et où q_i est la quantité fournie par l'entreprise $i = 1, 2$.

- Dans le modèle du **duopole de Cournot**, chaque entreprise choisit son **niveau de production** (concurrence par les quantités) dans le but de **maximiser son profit**, quel que soit le niveau de production de l'autre entreprise (quelle considère comme une donnée). Pour simplifier, on suppose qu'elles ont le même coût, normalisé à zéro.
- La **fonction de profit** de l'entreprise 1 est

$$\pi\left(q_1\right) = P\left(Q\right) q_1 = \left[100 - q_1 - q_2\right] q_1$$

- La **fonction de profit** de l'entreprise 2 est

$$\pi\left(q_2\right) = P\left(Q\right) q_2 = \left[100 - q_1 - q_2\right] q_2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi\left(q_1\right)}{\partial q_1} &= 100 - 2q_1 - q_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi\left(q_2\right)}{\partial q_2} &= 100 - q_1 - 2q_2 = 0\end{aligned}$$

- Elles donnent ce que l'on nomme des **fonctions de réaction** ou **fonctions de meilleure réponse**:

$$\begin{aligned}q_1 &= MR_1\left(q_2\right) = 50 - \frac{1}{2}q_2 \\ q_2 &= MR_2\left(q_1\right) = 50 - \frac{1}{2}q_1\end{aligned}$$

- A l'**équilibre de Cournot** (qui est un **équilibre de Nash** du point de vue de la **théorie des jeux**), chaque entreprise produit une quantité qui est une **meilleure réponse** à la quantité de l'autre:

$$q_1^* = MR_1\left(q_2^*\right) \quad \text{et} \quad q_2^* = MR_2\left(q_1^*\right)$$

- L'**unique solution** est $q_1^* = q_2^* = \frac{100}{3}$. Ainsi, $Q^* = \frac{200}{3}$, $P^* = \frac{100}{3}$ et $\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{10000}{9}$.

- On peut utiliser la **règle de Cramer** pour trouver l'**équilibre** du **duopole de Cournot**.
- Sous **forme matricielle**, les **fonctions de meilleure réponse** s'écrivent

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

où $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 1$, $e = 50$ et $f = 50$.

- Comme $ad - bc = \frac{3}{4} \neq 0$ le système admet une **unique solution**

$$
\begin{aligned}
q_1^* &= \frac{\begin{vmatrix} 50 & \frac{1}{2} \\ 50 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{50 - 50\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{100}{3} \\
q_2^* &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ \frac{1}{2} & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{50 - 50\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{100}{3}
\end{aligned}
$$

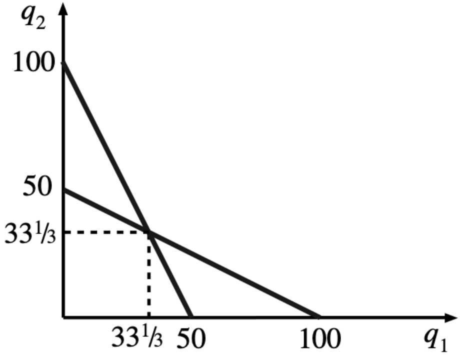
- On peut remarquer que comme les **conditions du premier ordre** forment un système d'équations linéaires, elles correspondent aux équations de deux droites dans le repère (q_1, q_2).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi (q_1)}{\partial q_1} &= 0 \Leftrightarrow q_2 = 100 - 2q_1\\ \frac{\partial \pi (q_2)}{\partial q_2} &= 0 \Leftrightarrow q_2 = 50 - \frac{1}{2}q_1\end{aligned}$$

- L'**unique solution** est obtenue lorsque les deux droites se croisent, le point d'intersection vérifiant les deux **conditions du premier ordre** simultanément.
- Ceci est illustré **Figure 4**.

Conditions du premier ordre

Figure 4. Duopole de Cournot



- Les **conditions du premier ordre** ne permettent pas de distinguer une **valeur maximale**, d'une **valeur minimale**, d'un **point d'inflexion** ou d'un **point selle**, car elles sont vérifiées dans chacun de ces cas.
- Les **conditions du second ordre** permettent d'effectuer cette distinction.

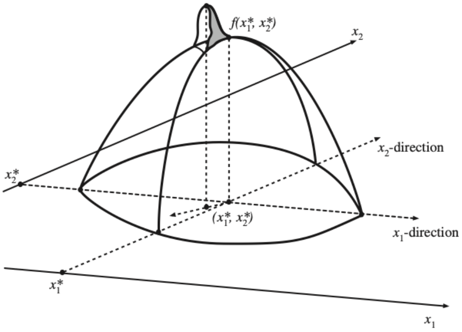
Conditions du second ordre

- Supposons qu'une fonction admette une **valeur stationnaire** au point $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. Si nous effectuons de "petites" variations à partir de ce point dans **toutes les directions possibles**, et que le résultat est de:
  - **Toujours réduire** la valeur de la fonction, alors nous savons que $\mathbf{x}^*$ correspond à un **maximum local**.
  - **Toujours augmenter** la valeur de la fonction, alors nous savons que $\mathbf{x}^*$ correspond à un **minimum local**.
  - **Réduire** la valeur de la fonction dans **certaines directions** et **augmenter** la valeur de la fonction dans **les autres directions**, alors nous savons que $\mathbf{x}^*$ correspond à un **point selle**.

- Noter qu'effectuer des variations dans **toutes les directions possibles** ne signifie pas faire varier x_1 seulement, puis x_2 seulement, ..., puis x_n seulement.
- Si tel était le cas, une partie seulement de **toutes les direction possibles de variation** serait effectuée. Cela ne garantirait pas un **extremum local**.

- La **Figure 5** illustre ce point pour une fonction à deux variables.
- Quitter le **point stationnaire** (x_1^*, x_2^*) dans la direction x_1 seulement (i.e. $dx_1 \neq 0$ et $dx_2 = 0$), ou la direction x_2 seulement (i.e. $dx_1 = 0$ et $dx_2 \neq 0$), réduit la valeur de la fonction. Mais quitter (x_1^*, x_2^*) dans la direction indiquée (non parallèle aux axes), à la fois dans la direction x_1 et la direction x_2 (i.e. $dx_1 < 0$ et $dx_2 < 0$), la fonction augmente. Donc le **point stationnaire** (x_1^*, x_2^*) ne correspond pas à un **maximum local**.

Figure 5



Conditions du second ordre

- La nécessité de prendre en compte **toutes les directions possibles de variation** est ce qui complique l'analyse des **conditions du second ordre** (par rapport aux fonctions à une variable).
- Comme nous l'avons observé **Section 1.4.**, c'est cette même nécessité qui complique la détermination de la **courbure** des fonctions à plusieurs variables (par rapport aux fonctions à une variable).
- Nous avions en effet remarqué qu'étudier le signe des **dérivées partielles directes d'ordre 2** ne suffisait pas (car elles donnent la **courbure** seulement dans la direction x_i d'une des variables).

Conditions du second ordre

- Le signe de la **dérivée partielle directe d'ordre 2**, f_{ii}, nous renseigne sur la **courbure** de f dans la direction de x_i.
- Si un point $\mathbf{x}^*$ correspond à un **maximum**, alors on doit avoir $f_{ii}\left(\mathbf{x}^*\right) < 0$ pour tout $i = 1, ..., n$.
- Cette condition est **nécessaire**, mais elle n'est pas **suffisante**.

Conditions du second ordre

- La condition **nécessaire** et **suffisante** est obtenue en envisagent **n'importe quelle direction possible de variation** à partir de $\mathbf{x}^*$.
- On doit alors étudier le signe de la **différentielle totale d'ordre 2** pour s'assurer que la **courbure** est **concave** ou **convexe** dans **toutes les directions aux alentours proches** de $\mathbf{x}^*$.

Conditions du second ordre

- Si une fonction prend une **valeur stationnaire au point $\mathbf{x}^*$**, on sait que $dy = df(\mathbf{x}^*) = 0$.
- Si, pour n'importe quelle "petite" variation autour de $\mathbf{x}^*$, dy **diminue** ($d^2y < 0$)et devient **négative**, alors il s'agit d'un **maximum local**.
- Si, pour n'importe quelle "petite" variation autour de $\mathbf{x}^*$, dy **augmente** ($d^2y > 0$) et devient **positive**, alors il s'agit d'un **minimum local**.

Conditions du second ordre

- Les **conditions suffisantes** pour un **maximum local** ou un **minimum local** s'expriment donc en fonction de l'**évolution** de la **différentielle totale d'ordre 1** dy lorsque l'on s'éloigne de $\mathbf{x}^*$, donnée par le signe de la **différentielle totale d'ordre 2**, $d^2 y = d^2 f\left(\mathbf{x}^*\right)$.
- La **différentielle totale d'ordre 2** de f au point $\mathbf{x}^*$ (voir **Section 1.4**) est

$$d^2 y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(\mathbf{x}^*\right) dx_i dx_j$$

Conditions du second ordre

Theorem (3)

Pour toute fonction à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *deux fois continûment différentiable, si*

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$$

et

$$d^2 y = d^2 f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{x}^*)\, dx_i dx_j < 0$$

i.e. H est **définie négative** *au point* $\mathbf{x}^*$*, alors la fonction f atteint un* **maximum local** *au point* $\mathbf{x}^*$.

Theorem (4)

Pour toute fonction **strictement concave** *à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si*

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$$

alors la fonction f atteint un **unique maximum global** *au point $\mathbf{x}^*$.*

Conditions du second ordre

Theorem (5)

Pour toute fonction à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *deux fois continûment différentiable, si*

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$$

et

$$d^2y = d^2f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\mathbf{x}^*)\, dx_i dx_j > 0$$

i.e. H *est* **définie positive** *au point* $\mathbf{x}^*$, *alors la fonction* f *atteint un* **minimum local** *au point* $\mathbf{x}^*$.

Theorem (6)

Pour toute fonction **strictement convexe** *à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si*

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

alors la fonction f atteint un **unique minimum global** *au point $\mathbf{x}^*$.*

Example (2)

Pour chacune des fonctions de l'**Exemple 1**, déterminons si le **point stationnaire** identifié est un **maximum local** ou **global**, un **minimum local** ou **global**, ou encore un **point selle**.

$(i) \quad f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2.$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = 2x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 4 \quad f_{12} = f_{21} = 0 \quad \text{et} \quad f_{22} = 2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$\begin{aligned} |H_1| &= |f_{11}| = f_{11} = 4 > 0 \\ |H_2| &= |H| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \end{aligned}$$

- H est donc **définie positive** en tout point. La fonction f est **strictement convexe**. D'après le **Théorème 6**, la fonction f atteint un **unique minimum global** au **point stationnaire** $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.

$(ii) \quad f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2.$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = -2 \quad f_{12} = f_{21} = 1 \quad \text{et} \quad f_{22} = -2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$\begin{aligned} |H_1| &= -2 < 0 \\ |H_2| &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \end{aligned}$$

- H est donc **définie négative** en tout point. La fonction f est **strictement concave**. D'après le **Théorème 4**, la fonction f atteint un **unique maximum global** au **point stationnaire** $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

$(iii) \quad f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_1^3$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 8x_1 - x_2 - 3x_1^2 \quad \text{et} \quad f_2 = -x_1 + 2x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 8 - 6x_1 \quad f_{12} = f_{21} = -1 \quad \text{et} \quad f_{22} = 2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} 8 - 6x_1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- On a identifié deux **points stationnaires** dans le cas (iii): $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{15}{6}, \frac{5}{4}\right)$ et $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0, 0)$.

- Au **point stationnaire** $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0,0)$, les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$\begin{aligned} |H_1| &= 8 > 0 \\ |H_2| &= \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0 \end{aligned}$$

- H est donc **définie positive** au **point stationnaire** $(x_1^{*}, x_2^{*}) = (0,0)$. D'après le **Théorème 5**, la fonction f atteint un **minimum local** au **point stationnaire** $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0,0)$.

- Au **point stationnaire** $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{15}{6}, \frac{5}{4}\right)$, les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$
\begin{aligned}
|H_1| &= 8 - 6\frac{15}{6} = -7 < 0 \\
|H_2| &= \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -15 < 0
\end{aligned}
$$

- H n'est ni **définie négative**, ni **définie positive**, au **point stationnaire** $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{15}{6}, \frac{5}{4}\right)$. On ne peut ni appliquer le **Théorème 3**, ni appliquer le **Théorème 5**. On a un **point selle**. En effet $f_{11} = -7 < 0$ (**maximum** dans la direction x_1) et $f_{22} = 2 > 0$ (**minimum** dans la direction de x_2).

$(iv) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1 - 1, \quad f_2 = 2x_2 \quad \text{et} \quad f_3 = 8x_3 + 2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 4, \quad f_{22} = 2, \quad f_{33} = 8 \quad \text{et} \quad f_{ij} = 0 \ (i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j)$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- Les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$\begin{aligned} |H_1| &= 4 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \\ |H_3| &= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = f_{11}D_{11} - f_{12}D_{12} + f_{13}D_{13} \\ &= f_{11}D_{11} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0 \end{aligned}$$

- H est donc **définie positive** en tout point. La fonction f est **strictement convexe**. D'après le **Théorème 6**, la fonction f atteint un **unique minimum global** au **point stationnaire** $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$.

(v) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 2x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = -2x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 2 \quad f_{12} = f_{21} = 0 \quad \text{et} \quad f_{22} = -2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- Les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$
\begin{aligned}
|H_1| &= 2 > 0 \\
|H_2| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0
\end{aligned}
$$

- H n'est ni **définie négative**, ni **définie positive**, au **point stationnaire** $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. On ne peut ni appliquer le **Théorème 3**, ni appliquer le **Théorème 5**. On a un **point selle**. En effet $f_{11} = 2 > 0$ (**minimum** dans la direction x_1) et $f_{22} = -2 < 0$ (**maximum** dans la direction de x_2).

- Une entreprise produit un bien en quantité y, grâce à deux **facteurs de production**, le travail L et le capital K.
- L'entreprise dispose d'une technologie de production de type **Cobb-Douglas**
$$y = AL^{\alpha}K^{\beta} \quad A, \alpha, \beta > 0$$
- L'entreprise vend le bien qu'elle produit sur un **marché concurrentiel** au prix p, et achète également ses entrants sur des **marchés concurrentiels** au prix w pour le travail, et au prix r pour le capital.

- L'entreprise choisit ses facteurs de production L et K de manière à **maximiser son profit**

$$\begin{aligned} \pi(L, K) &= py - wL - rK \\ &= pAL^{\alpha}K^{\beta} - wL - rK \end{aligned}$$

- D'après la **Définition 1**, les **conditions du premier ordre** sont

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \alpha pAL^{\alpha-1}K^{\beta} - w = 0 \\ \pi_2 &= \beta pAL^{\alpha}K^{\beta-1} - r = 0 \end{aligned}$$

- D'après le **Théorème 4**, les **conditions du premier ordre** permettent d'identifier un **unique maximum global** si la **matrice Hessienne** est **définie négative** en tout point, impliquant que la **fonction de profit** est **strictement concave**.
- Les **déterminants** des **sous-matrices principales successives** sont:

$$
\begin{aligned}
|H_1| &= |\pi_{11}| = [\alpha - 1]\,\alpha p A L^{\alpha-2} K^{\beta} \\
|H_2| &= \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} [\alpha - 1]\,\alpha p A L^{\alpha-2} K^{\beta} & \alpha\beta p A L^{\alpha-1} K^{\beta-1} \\ \alpha\beta p A L^{\alpha-1} K^{\beta-1} & [\beta - 1]\,\beta p A L^{\alpha} K^{\beta-2} \end{vmatrix} \\
&= [1 - \alpha - \beta]\,\alpha\beta p^2 A^2 L^{2\alpha-2} K^{2\beta-2}
\end{aligned}
$$

- $|H_1| < 0$ si $\alpha < 1$.
- $|H_2| > 0$ si $\alpha + \beta < 1$ (**rendements d'échelle décroissants**).
- Sous ces hypothèses, H est **définie négative** en tout point. La **fonction de profit** est **strictement concave** et les **conditions de premier ordre** indiquent un **unique maximum global.**
- Noter que les **rendements d'échelle croissants** $(\alpha + \beta > 1)$ ou **constants** $(\alpha + \beta = 1)$ sont incompatibles avec l'hypothèse de **marchés concurrentiels**.

Restrictions directes sur les variables

- Dans la majorité des problèmes économiques, les agents décident du niveau d'une variable qui appartient à un **intervalle**.
- Par exemple, les **quantités** et les **prix** sont **positifs** et ne sont **jamais infinis**.
- Si une entreprise est soumise à un **quota de production**, elle choisit son niveau de production dans l'intervalle $[0, y^{\max}]$.
- De même, si un individu réparti son revenu entre consommation et épargne, cela équivaut à choisir une proportion $\alpha \in [0, 1]$ du revenu qui est consommée, la proportion $(1 - \alpha)$ étant alors épargnée.

Restrictions directes sur les variables

- Dans la **résolution mathématique des modèles économiques**, il est souvent utile de rendre **explicites** les **restrictions directes sur les variables**.
- Noter que si la restriction concernant une variable est **implicite**, il n'y a pas de perte de généralité à la rendre **explicite** (e.g. quantité positive).
- Cela permet parfois de résoudre des difficultés à interpréter les **conditions du premier ordre**.

Restrictions directes sur les variables

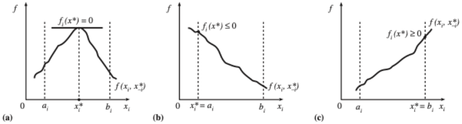
- Dans le contexte des **fonctions à plusieurs variables**, supposons que chaque variable appartient à un **intervalle**, i.e. $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, ..., n$.
- Pour certaines variables, on peut avoir $a_i = -\infty$ et/ou $b_i = +\infty$ (pas de restriction à gauche ou à droite, ou pas de restriction du tout).
- Supposons simplement que pour au moins une variable, a_i et b_i prennent des valeurs finies (avec évidemment $a_i < b_i$).

Restrictions directes sur les variables

- Supposons qu'une fonction $f(\mathbf{x})$, atteigne une valeur maximale au point $\mathbf{x}^*$.
- Alors pour chaque variable x_i, on a seulement trois cas possibles.
- Ces trois cas sont illustrés **Figure 6**, où le vecteur $\mathbf{x}^*_{-i} = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, ..., x_n^*\right)$ contient toutes les variables sauf la variable x_i.

Restrictions directes sur les variables

Figure 6



Restrictions directes sur les variables

- **Cas 1** (**solution intérieure**): $a_i < x_i^* < b_i$. On doit **nécessairement** avoir $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Sinon, on peut augmenter la valeur de la fonction en se déplaçant à gauche ou à droite de $\mathbf{x}^*$ (en contradiction avec le fait que f atteint une valeur maximale au point $\mathbf{x}^*$).
- On peut le voir avec la **différentielle totale**.
- Si $f_i(\mathbf{x}^*) \neq 0$, on peut choisir $dx_i \neq 0$ telle que $df = f_i(\mathbf{x}^*)\, dx_i > 0$.

Restrictions directes sur les variables

- **Cas 2 (solution en coin à gauche)**: $x_i^* = a_i$. On doit **nécessairement** avoir $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$. Sinon, on peut augmenter la valeur de la fonction en se déplaçant à droite de $\mathbf{x}^*$ (en contradiction avec le fait que f atteint une valeur maximale au point $\mathbf{x}^*$).
- On peut le voir avec la **différentielle totale**.
- Si $f_i(\mathbf{x}^*) > 0$, on peut choisir $dx_i > 0$ telle que $df = f_i(\mathbf{x}^*)\, dx_i > 0$.
- Par contre, si $f_i(\mathbf{x}^*) < 0$, on peut choisir $dx_i < 0$ telle que $df = f_i(\mathbf{x}^*)\, dx_i > 0$, mais on violerait la contrainte $x_i \geq a_i$.
- De même, si $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$, on peut choisir $dx_i \neq 0$, mais on a $df = f_i(\mathbf{x}^*)\, dx_i = 0$.

Restrictions directes sur les variables

- **Cas 3 (solution en coin à droite)**: $x_i^* = b_i$. On doit **nécessairement** avoir $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$. Sinon, on peut augmenter la valeur de la fonction en se déplaçant à gauche de $\mathbf{x}^*$ (en contradiction avec le fait que f atteint une valeur maximale au point $\mathbf{x}^*$).
- On peut le voir avec la **différentielle totale**.
- Si $f_i(\mathbf{x}^*) < 0$, on peut choisir $dx_i < 0$ telle que $df = f_i(\mathbf{x}^*)\, dx_i > 0$.
- Par contre, si $f_i(\mathbf{x}^*) > 0$, on peut choisir $dx_i > 0$ telle que $df = f_i(\mathbf{x}^*)\, dx_i > 0$, mais on violerait la contrainte $x_i \leq b_i$.
- De même si $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$, on peut choisir $dx_i \neq 0$, mais on a $df = f_i(\mathbf{x}^*)\, dx_i = 0$.

Restrictions directes sur les variables

- Ces observations conduisent au **Théorème 7** et au **Théorème 8** ci-dessous.

Restrictions directes sur les variables

Theorem (7)

Si $\mathbf{x}^*$ est une solution du programme

$$\max_{\mathbf{x}} : f(\mathbf{x}) \quad s.c.\ a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, ..., n)$$

alors, $\forall i = 1, ..., n$, au moins une des conditions suivantes est vérifiée:

1. $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad si\ x_i^* < b_i.$
2. $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad si\ x_i^* > a_i.$

Restrictions directes sur les variables

- Remarquer que dans le cas d'une **solution intérieure**, i.e. si $a_i < x_i^* < b_i$, alors la **condition 1** "et" la **condition 2** du **Théorème 7** doivent être vérifiées.
- Noter également que différentes conditions peuvent être vérifiées pour différentes variables. Par exemple, x_1^* vérifie la **condition 2** seulement, tandis que x_2^* vérifie les **conditions 1 et 2**.
- Avec les mêmes arguments supportant le **Théorème 7**, on peut établir le **Théorème 8** pour un **programme de minimisation**.

Restrictions directes sur les variables

Theorem (8)

Si $\mathbf{x}^*$ *est une solution du programme*

$$\min_{\mathbf{x}} : f(\mathbf{x}) \quad s.c. \; a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, ..., n)$$

alors, $\forall i = 1, ..., n$*, au moins une des conditions suivantes est vérifiée:*

1. $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad si \; x_i^* < b_i.$
2. $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad si \; x_i^* > a_i.$

- Encore une fois, dans le cas d'une **solution intérieure**, i.e. si $a_i < x_i^* < b_i$, alors la **condition 1** "et" la **condition 2** du **Théorème 8** doivent être vérifiées.

Example (3)

Résolvons les **programmes de maximisation** suivants:

$$
\begin{array}{rrcl}
(i) & \max\limits_{x_1,x_2} : y & = & 10x_1 - 5x_2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 20,\ 0 \leq x_2 \leq 20 \\
(ii) & \max\limits_{x_1,x_2} : y & = & x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 10,\ 0 \leq x_2 \leq 10 \\
(iii) & \max\limits_{x_1,x_2} : y & = & 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 \\
 & s.c.\ 0 & \leq & x_1 \leq 10,\ 0 \leq x_2 \leq 10 \\
(iv) & \max\limits_{x_1,x_2} : y & = & 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 \\
 & s.c.\ 0 & \leq & x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq \dfrac{8}{3}
\end{array}
$$

(i) $\max_{x_1, x_2} : y = 10x_1 - 5x_2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 20,\ 0 \leq x_2 \leq 20$

- Sans contraintes, il n'y aurait pas de solution car la fonction est **linéaire** et $f_1 = 10 > 0$ et $f_2 = -5 < 0$.
- Compte tenu des contraintes, et du signe des **dérivées partielles d'ordre 1**, on peut conclure aisément que $x_1^* = b_1 = 20$ et $x_2^* = a_2 = 0$.
- Les deux contraintes sont **saturées**. La **solution en coin** $\mathbf{x}^* = (20, 0)$ satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**:
  - $f_1\,(20, 0) = 10 \geq 0$ (**condition 2** car $x_1^* > a_1$).
  - $f_2\,(20, 0) = -5 \leq 0$ (**condition 1** car $x_2^* < b_2$).

$(ii) \quad \max_{x_1, x_2} : y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 10,\ 0 \leq x_2 \leq 10$

- Compte tenu des contraintes, et du signe des **dérivées partielles d'ordre 1**, on peut conclure aisément que $x_1^* = 10$ et $x_2^* = 10$.
- Les deux contraintes sont **saturées**. La **solution en coin** $\mathbf{x}^* = (10, 10)$ satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**:
  - $f_1\,(10, 10) = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \geq 0$ (**condition 2** car $x_1^* > a_1$).
  - $f_2\,(10, 10) = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \geq 0$ (**condition 2** car $x_2^* > a_2$).

(iii) $\max_{x_1,x_2} : y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \quad 0 \leq x_1 \leq 10,\ 0 \leq x_2 \leq 10$

- Nous avons étudié cette fonction dans l'**Exemple 1** et trouvé un **point stationnaire** $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) \approx (3.33, 2.67)$. Ainsi, on sait que $f_1\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = 0$ et $f_2\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = 0$.
- Aucune des contraintes n'est **saturée**. La **solution intérieure** $\mathbf{x}^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$ satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**:
  - $f_1\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = 0$ (**conditions 1 et 2** car $a_1 < x_1^* < b_1$).
  - $f_2\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = 0$ (**conditions 1 et 2** car $a_2 < x_2^* < b_2$).

(iv) $\max_{x_1, x_2} : y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 \quad 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$

- Nous avons la même fonction que dans (iii) mais avec des **restrictions** différentes.
- Au point stationnaire $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $x_1^* \notin [0, 1]$ ne vérifie pas la restriction, tandis que x_2^* **sature** la contrainte à droite.
- Nous pourrions être tentés de conclure que la solution est $(x_1^*, x_2^*) = \left(1, \frac{8}{3}\right)$. Mais attention ce n'est pas le cas.

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

- Ainsi, au point $(x_1^*, x_2^*) = (1, \frac{8}{3})$, on a

$$\begin{aligned} f_1\left(1, \frac{8}{3}\right) &= \frac{14}{3} \approx 4,67 > 0 \\ f_2\left(1, \frac{8}{3}\right) &= -\frac{7}{3} \approx -2,34 < 0 \end{aligned}$$

- Les **conditions nécessaires** du **Théorème 7** sont satisfaites pour $x_1^* = 1$ mais pas pour $x_2^* = \frac{8}{3}$:
  - $f_1\left(1, \frac{8}{3}\right) = 4,67 \geq 0$ (**condition 2** car $x_1^* > a_1$).
  - $f_2\left(1, \frac{8}{3}\right) = -2,34 \ngeq 0$ (**condition 2** car $x_2^* > a_2$).
- Le point $(x_1^*, x_2^*) = \left(1, \frac{8}{3}\right)$ n'est pas solution du **programme de maximisation** (iv).

- On peut remarquer que $f_1 > 0$ pour tout (x_1, x_2) satisfaisant les restrictions. La solution est donc telle que $x_1^* = 1$.
- Nous venons de voir qu'au point $\left(1, \frac{8}{3}\right)$, on a $f_2 < 0$. On peut alors augmenter y en réduisant x_2. Mais de combien?
- On peut trouver la solution en fixant $x_1^* = 1$ et en maximisant la fonction $f(1, x_2)$ par rapport à $x_2 \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$:

$$\max_{x_2} : f(1, x_2) = 3 + 3x_2 - x_2^2 \quad s.c.\ 0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$$

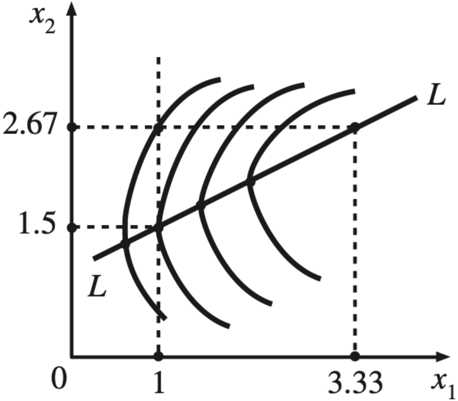
- On peut s'attendre à une **solution intérieure** avec

$$f_2(1, x_2) = 3 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{3}{2}$$

- Le point $\mathbf{x}^* = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**:
    - $f_1\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} \geq 0$ (**condition 2** car $x_1^* > a_1$).
    - $f_2\left(1, \frac{3}{2}\right) = 0$ (**conditions 1 et 2** car $a_2 < x_2^* < b_2$).
- Le point $(x_1^*, x_2^*) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**.

Restrictions directes sur les variables

- La **Figure 7** illustre ce qui se produit pour le programme (iv).
- La forme des courbes de niveau reflète la **concavité** de la fonction.
- Le point $\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) \approx (3.33, 2.67)$ ne satisfait pas les restrictions car $\frac{10}{3} > 1$.
- Le point $\left(1, \frac{8}{3}\right) \approx (1, 2.67)$ satisfait les restrictions mais ne maximise pas la fonction.
- Le point $(1, 1.5)$ satisfait les restrictions et maximise la fonction. C'est la solution du **programme de maximisation** (iv).



x_2
2.67
1.5
0
1
3.33
x_1
L
L

- On peut considérer que nous avons beaucoup "tâtonné" pour identifier la solution du **programme de maximisation (iv)**.
- Une méthode plus systématique consiste à d'abord résoudre le problème avec x_1 fixée. Puis de résoudre le problème avec x_2 fixée (en tenant compte de la solution du problème avec x_1 fixée):

$$\max_{x_2} : f\left(x_1, x_2\right) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 \quad s.c.\ 0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$$

- La **condition du premier ordre** est:

$$f_2\left(x_1, x_2\right) = 2 - 2x_2 + x_1 = 0 \Rightarrow x_2^* = 1 + \frac{1}{2}x_1$$

- On injecte la solution dans la fonction:

$$\begin{aligned} f\left(x_1, 1+\frac{1}{2}x_1\right) &= 4x_1 + 2\left[1+\frac{1}{2}x_1\right] - x_1^2 \\ &\quad - \left[1+\frac{1}{2}x_1\right]^2 + x_1\left[1+\frac{1}{2}x_1\right] \\ &= 1 + 5x_1 - \frac{3}{4}x_1^2 \end{aligned}$$

- On maximise alors par rapport à x_1

$$\max_{x_1} f\left(x_1, 1+\frac{1}{2}x_1\right) = 1 + 5x_1 - \frac{3}{4}x_1^2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1$$

- La solution évidente est $x_1^* = 1$. Ainsi $x_2^* = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

- Graphiquement, sur la **Figure 7**, la première étape consiste à trouver l'équation de la droite LL ($x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_1$) qui contient toutes solutions pour x_1 donnée. Puis on applique $x_1 = 1$ pour trouver la solution globale $(x_1^*, x_2^*) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

- Considérons un **monopole** produisant un bien vendu dans deux pays différents, le pays 1 (domestique) et le pays 2 (étranger).
- Les **fonctions de demande inverse** sont

$$p_1 = 100 - q_1 \quad \text{et} \quad p_2 = 80 - 2q_2$$

- La **fonction de coût total** du **monopole** est

$$CT(Q) = Q^2 = [q_1 + q_2]^2$$

où Q est la **quantité totale produite**.

- Remarquons que le **monopole** est supposé pouvoir vendre sur chacun des deux marchés au même coût.
- Il peut donc **arbitrer** librement (sans coût supplémentaire) entre les deux marchés.
- En l'absence de contrainte, on peut résoudre le problème du **monopole discriminant**.

- Le **monopole** choisit q_1 et q_2 de manière à **maximiser sa fonction de profit**:

$$\max_{q_1, q_2} : \pi(q_1, q_2) = [100 - q_1]\, q_1 + [80 - 2q_2]\, q_2 - [q_1 + q_2]^2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 100 - 4q_1 - 2q_2 = 0 \\ \pi_2 &= 80 - 6q_2 - 2q_1 = 0 \end{aligned}$$

- Les **solutions** sont $q_1^* = 22$ et $q_2^* = 6$. Ainsi, $p_1^* = 78$, $p_2^* = 68$, $Q^* = 28$, $CT^* = 784$, $\pi^* = 1340$.

- On peut utiliser la **règle de Cramer** pour trouver l'**équilibre** du **monopole discriminant**.
- Sous **forme matricielle**, les **conditions du premier ordre** s'écrivent

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix}$$

où $a = 4$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 6$, $e = 100$ et $f = 80$.

- Comme $ad - bc = 20 \neq 0$ le système admet une **unique solution**

$$q_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 2 \\ 80 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{600 - 160}{24 - 4} = 22$$

$$q_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 100 \\ 2 & 80 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{320 - 200}{24 - 4} = 6$$

- Supposons maintenant que l'entreprise soit accusée de "**dumping**" par le gouvernement du pays étranger, car elle y vend son bien moins cher qu'à domicile ($p_2^* = 68 < 78 = p_1^*$).
- En représailles le gouvernement du pays étranger impose un quota d'importation pour le bien à hauteur de 4 unités.
- Déterminons l'impact de ce quota.

- Le **programme de maximisation du profit du monopole** devient

$$\max_{q_1, q_2} : \pi\left(q_1, q_2\right) \quad s.c. \; q_2 \leq 4$$

- On pourrait introduire la contrainte $q_2 \geq 0$, mais comme nous avons trouvé une **solution intérieure** précédemment, on peut présumé que $q_2^* > 0$.

- D'après le **Théorème 7**, on a les **conditions nécessaires** suivantes:
  - $\pi_1(q_1^*, q_2^*) = 100 - 4q_1^* - 2q_2^* = 0$ (**conditions 1 et 2** car $a_1 < q_1^* < b_1$).
  - $\pi_2(q_1^*, q_2^*) = 80 - 6q_2^* - 2q_1^* \geq 0$ (**condition 2** si $q_2^* = 4 > 0$).
  - $\pi_2(q_1^*, q_2^*) = 0$ (**conditions 1 et 2** si $0 < q_2^* < 4$).
- Est-ce que $0 < q_2^* < 4$? Si tel est le cas on doit avoir $\pi_2(q_1^*, q_2^*) = 0$. Mais nous avons montré que dans ce cas $q_2^* = 6$. La réponse est donc non.
- Est-ce que $q_2^* = 4$? Si tel est le cas, $\pi_1(q_1^*, 4) = 0$ donne $q_1^* = 23$. Ainsi $\pi_2(23, 4) = 10 \geq 0$. La **condition 2** est satisfaite. La réponse est oui, $q_2^* = 4$.

- Finalement, on a $q_1^* = 23$, $q_2^* = 4$, $p_1^* = 77$, $p_2^* = 72$, $Q^* = 27$, $CT^* = 729$, $\pi^* = 1330$.
- L'**offre domestique** q_1^* **augmente** $(22 \longrightarrow 23)$ et le **prix domestique** p_1^* **baisse** $(78 \longrightarrow 77)$. L'**offre dans le pays étranger** q_2^* **diminue** $(6 \longrightarrow 4)$ et le **prix dans le pays étranger** p_2^* **augmente** $(68 \longrightarrow 72)$.
- Les **consommateurs du pays étranger** sont donc **perdants** suite à la politique de leur gouvernement.
- Les **consommateurs du pays domestique** sont **gagnants** suite à la politique du gouvernement étranger.
- Le **profit du monopole** π^* **diminue** également $(1340 \longrightarrow 1330)$.

- Les résultats sont illustrés **Figure 8**.
- Le moins évident de ces résultats est la hausse de l'offre dans le pays domestique.
- La raison est que la **baisse de l'offre** sur le **marché étranger réduit** le **coût marginal de production** qui devient **inférieur** à la **recette marginale** sur le **marché domestique**.
- Il est alors optimal pour le **monopole** d'**augmenter l'offre** sur le **marché domestique**.

Restrictions directes sur les variables

Figure 8 Monopole discriminant avec un quota de production