Exercice 1 :

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

  $(x,y) \longmapsto (x^2-y^2, x, y)$

$f(1,2) = (1-4, 1, 2) = (-3, 1, 2)$

$f(2,4) = (4-16, 2, 4) = (-12, 2, 4) \neq 2 \times (-3, 1, 2)$

DONC f n'est pas linéaire

- $g : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$

  $(x,y,z) \longmapsto 2x - y + z$

Soit $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{C}^3$, $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{C}^3$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$g(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$

$= 2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2)$

$= \lambda(2x_1 - y_1 + z_1) + (2x_2 - y_2 + z_2)$

$= \lambda g(x_1, y_1, z_1) + g(x_2, y_2, z_2)$

- $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

  $(x,y) \longmapsto (\sin(x) + \sin(y), \cos(x) - \cos(y))$

$h(-x,-y) = (-(\sin(x) + \sin(y)), \cos(x) - \cos(y))$

$\neq -(\sin(x) + \sin(y), \cos(x) - \cos(y))$

donc h n'est pas linéaire.

Exercice 2:

- $\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$
  $f \longmapsto f(0)f(1)$

$$\varphi(2f) = (2f)(0)(2f)(1)$$
$$= 4f(0)f(1)$$
$$\neq 2f(0)f(1)$$

DONC φ n'est pas linéaire.

- $\psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$
  $p \longmapsto \psi(p)$ où $\psi(p) : x \longmapsto p(x-2)$

Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(\lambda p + q)(x) = (\lambda p + q)(x-2)$$
$$= \lambda p(x-2) + q(x-2)$$
$$= \lambda \psi(p)(x) + \psi(q)(x)$$

$$\Rightarrow \psi(\lambda p + q) = \lambda \psi(p) + \psi(q)$$

DONC ψ est linéaire.

- $\eta : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $(u,v) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(\eta(\lambda u + v))_n = (\lambda u + v)_{2n} = \lambda u_{2n} + v_{2n} = \lambda(\eta(u))_n + (\eta(v))_n$$

DONC η est linéaire.

Exercice 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \}$.

$\rightarrow (x,y,z) \in E \iff z = x + 2y$.

$\Rightarrow E = \{ (x, y, x+2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \text{Vect}((1,0,1), (0,1,2))$

$\rightarrow$ Si $\mathcal{F}_E = (e_i)_{i \in [1,n]}$ est une famille génératrice de E alors $\mathcal{G} = (Ae_i)_{i \in [1,n]}$ est une famille génératrice de l'image de E par A.

OR $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc, en notant F l'image de E par A, on a $F = \text{Vect}((1,2,2), (1,4,3))$

De plus, $\{(1,2,2), (1,4,3)\}$ est libre donc est une base de F.

$\Rightarrow (x,y,z) \in F \iff \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + 3\beta \\ z = 2\alpha + 2\beta \end{cases}$ $\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -1 & \\ & -1 \end{array}$

$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ \beta = 2x - y \\ 2\beta = 2x - z \end{cases}$ $\iff 4x - 2y = 2x - z$
$\iff 2x - 2y + z = 0$.

DONC $\boxed{F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y + z = 0 \}}$

<u>Exercice 4</u> Théorème du rang : si $f : E \to F$ est linéaire alors $rg(f) + \dim(Ker(f)) = \dim(E)$.

4

→ Pour chacune de ces matrices, nous allons calculer $\dim(Ker(A))$ et en déduire $rg(A)$.

• $\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ -a & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y + az = 0 \\ -x - z = 0 \\ -ax + 3y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 & \\ -ax + 3y = 0 & \\ y + az = 0 & \end{cases} \quad \begin{matrix} a \\ 1 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 3y + az = 0 \\ y + az = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 & (1) \\ 3y + az = 0 & (2) \\ 2y = 0 & (3) \end{cases}$

(3) $\Rightarrow y = 0$.

(2) $\Rightarrow az = 0$.

(1) $\Rightarrow x = -z$.

<u>1)</u> Si $a \neq 0$ alors $z = 0$ et $x = 0$.

$\Rightarrow \dim(Ker(A)) = 0$

$\Rightarrow rg(A) = 3$

<u>2)</u> Si $a = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$, $x = -z$.

$\Rightarrow (x, y, z) = (-z, 0, z)$ ~~$\Rightarrow Ker(A)$~~

$\Rightarrow Ker(A) = Vect((-1, 0, 1))$

$\Rightarrow \dim(Ker(A)) = 1$ et $rg(A) = 2$.

- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ ax + y + z + t = 0 \\ x - y + 3z - 3t = 0 \\ 4x + 2y + at = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ (a-1)x + 2z - t = 0 \\ 2x + 2z - t = 0 \\ 2x + 2z + (a-4)t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ (a-1)x + 2z - t = 0 \\ (3-a)x = 0 \\ (3-a)x + (a-3)t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 2t = 0 & (1) \\ (a-1)x + 2z - t = 0 & (2) \\ (3-a)x = 0 & (3) \\ (a-3)t = 0 & (4) \end{cases}$$

1) Si $a \neq 3$ alors $(4) \Rightarrow t = 0$, $(3) \Rightarrow x = 0$

donc $(2) \Rightarrow z = 0$ et $(1) \Rightarrow y = 0$.

ccl : $a \neq 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = 4$

2) $a = 3$ alors (2) $2x + 2z - t = 0 \Rightarrow t = 2x + 2z$.

(1) $x + y - z + 4x + 4z \Rightarrow y = -5x - 3z$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \{(x, -5x-3z, z, 2x+2z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$ (6)

$$= \mathrm{Vect}((1,-5,0,2),(0,-3,1,2))$$

il est claire que $(1,-5,0,2)$ et $(0,-3,1,2)$ forment une famille libre donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$ et donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

- $$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + az + av = 0 \\ ax + y + az + av = 0 \\ ax + ay + z + av = 0 \\ ax + ay + az + v = 0 \end{cases}$$

→ On pourrait chercher à résoudre ce système avec le pivot de Gauss mais il y a plus rapide ! En effet, on peut réécrire le système comme suit :

$$\begin{cases} (1-a)x = a(x+y+z+v) \\ (1-a)y = a(x+y+z+v) \\ (1-a)z = a(x+y+z+v) \\ (1-a)v = a(x+y+z+v) \end{cases}$$

1) si $a = 1$ alors il reste $x+y+z+v = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$

→ ces trois vecteurs forment une famille libre donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 1$

2) si $a \neq 1$ alors

$$x = y = z = t = \frac{a}{a-1}(x+y+z+t)$$

Et donc, en notant $s = x+y+z+t$,

on a

$$s = \left(\frac{a}{a-1}s + \frac{a}{a-1}s + \frac{a}{a-1}s + \frac{a}{a-1}s\right)$$

$$= \frac{4a}{a-1}s$$

$$\Rightarrow \frac{1+3a}{a-1}s = 0$$

si $a \neq -\frac{1}{3}$ alors $s = 0$ et donc $x = y = z = t = 0$.

donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 4$

si $a = -\frac{1}{3}$ alors le système devient

$$\begin{cases} 3x - y - z - t = 0 \\ -x + 3y - z - t = 0 \\ -x - y + 3z - t = 0 \\ -x - y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y - z - t = 0 \\ 8y - 4z - 4t = 0 \\ -4y + 8z - 4t = 0 \\ -4y - 4z + 8t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y - z - t = 0 & (1) \\ 2y - z - t = 0 & (2) \\ 12z - 12t = 0 & (3) \\ \cancel{-12z + 12t = 0} \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow z = t$

$(2) \Rightarrow y = t$

$(1) \Rightarrow x = t$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}((1,1,1,1))$ 8

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1 \; ; \; rg(A) = 3.$

Exercice 5

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Ker}(A)$

OR $(1,-2,3)$ et $(2,-1,0)$ sont linéairement indépendants

donc $rg(A) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \boxed{\dim(F) = 1.}$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1\,0\,1 & \cdots & 1\,0 \\ 0\,1\,0 & \cdots & 0\,1 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Ker}(A)$

De la même manière. $(1,0,1,\dots,1,0)$ et $(0,1,0,\dots,0,1)$.

sont linéairement indépendants donc $rg(A) = 2$.

$\boxed{\dim(F) = 2n - 2}$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Ker}(A)$

Vérifions que ces vecteurs sont linéairement indépendants

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta - 4\gamma = 0 \\ \cancel{\alpha + \beta + \gamma = 0} \\ -\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\beta - \gamma = 0 \\ \cancel{-2\beta + \gamma = 0} \end{cases} \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow rg(A) = 3$

$\Rightarrow \boxed{\dim(F) = 2}$

Exercice 6

$$S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$$

$$A_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$$

1) • $A \in S_2(\mathbb{R}) \iff A_{12} = A_{21}$

$\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $S_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

Comme ces trois matrices forment une famille libre, on a $\boxed{\dim(S_2(\mathbb{R})) = 3}$

• $A \in A_2(\mathbb{R}) \iff A_{12} = -A_{21}$, $A_{11} = -A_{11}$, $A_{22} = -A_{22}$.

$\iff A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $A_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right) \implies \dim(A_2(\mathbb{R})) = 1$.

2) Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$$A \longmapsto \frac{A + A^T}{2}$$

- On a $f(A) = 0 \iff A = -A^T$ donc $\mathrm{Ker}(f) = A_n(\mathbb{R})$
- $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), f(A)^T = \left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T+A}{2} = f(A)$

donc $\mathrm{Im}(f) \subset S_n(\mathbb{R})$.

$\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $f(A) = \frac{A+A^T}{2} = \frac{A+A}{2} = A \in S_n(\mathbb{R})$

donc $S_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}(f)$

donc $\mathrm{Im}(f) = S_n(\mathbb{R})$

- Par le théorème du rang, on a

$\dim(S_n(\mathbb{R})) + \dim(A_n(\mathbb{R}))$

$= \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$

$= \dim(M_n(\mathbb{R}))$

3) Comme $\dim(S_n(\mathbb{R})) + \dim(A_n(\mathbb{R})) = \dim(M_n(\mathbb{R}))$ il suffit de montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe pour prouver que $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ (et donc que toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$).

OR $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) \implies A^T = A$ et $A^T = -A$

$\implies A = -A \implies A = 0$ ce qui termine la preuve.

Exercice 7 :

- Notons dans un premier temps que

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in H \iff u = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $H = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \dim(H) = 1$

- Supposons que $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Ker}(f) = H$.

alors comme f est à valeur dans $\mathbb{R}^2$,

on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 2$.

ce qui est impossible car $\dim(H) = 1$.

<u>ccl :</u> $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) \neq H$.

Exercice 8 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$ et $g \in \mathcal{L}(E,E)$

Supposons que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$

alors $\forall u \in E, \exists (v,w) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(g)$, $u = v + w$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(g) \Rightarrow \exists u \in E$, $x = g(u)$

Soit $(v,w) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(g)$, $u = v + w$

$\Rightarrow x = g(v+w) = g(v) + g(w) = g(v)$

OR $v \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\exists y \in E$ tq $v = f(y)$

$\Rightarrow x = g(f(y)) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}(g \circ f)$

réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(g \circ f)$

alors $\exists y \in E$ tq $x = g(f(y)) \Rightarrow x = g(v)$ où $v = f(y)$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Im}(g)$

On conclu que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) \Rightarrow \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$

- Pour l'implication retour, il suffit de remarquer que $\forall x \in E, \exists y \in E$ tq

$$g(x) = g(f(y)) \Rightarrow g(x - f(y)) = 0.$$

et donc par définition $x - f(y) \in \mathrm{Ker}(g)$

Ainsi, comme $x = \underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{x - f(y)}_{\in \mathrm{Ker}(g)}$, on a bien

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 9 :

- $f \in \mathcal{L}(E, E)$ tq $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est lié.

1) Soit $x \in E \setminus \{0\}$ (i.e $x \in E$ et $x \neq 0$), comme $(x, f(x))$ est lié, $\exists \alpha_x, \beta_x \in \mathbb{K}$ tq $\alpha_x x + \beta_x f(x) = 0$

$\Rightarrow \beta_x f(x) = -\alpha_x x$

si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors c'est vrai pour $\beta_x = 1$ et $\alpha_x = 0$.

sinon, on a $f(x) \neq 0$ et $x \neq 0$ (par hypothèse), donc $\alpha_x \neq 0$ et $\beta_x \neq 0$ et donc $f(x) = -\frac{\alpha_x}{\beta_x} x$

ce qui permet de dire que $f(x) = \lambda_x x$ où $\lambda_x = -\frac{\alpha_x}{\beta_x}$.

2) Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.

a) Si (x, y) est lié alors $\exists (\alpha, \beta) \neq (0,0)$

$$\alpha x + \beta y = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \lambda_x x + \beta \lambda_y y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_y(\alpha x + \beta y) - \alpha \lambda_x x - \beta \lambda_y y = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\lambda_y - \lambda_x) x = 0$$

De même, $\beta(\lambda_x - \lambda_y) y = 0$.

OR comme $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a.

$$\begin{cases} \alpha(\lambda_y - \lambda_x) = 0 \\ \beta(\lambda_y - \lambda_x) = 0 \end{cases}$$

ET $(\alpha, \beta) \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_x = \lambda_y}$$

b) Si x et y sont libres alors

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$$

et $f(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.

$$\Rightarrow (\lambda_x - \lambda_{x+y}) x + (\lambda_y - \lambda_{x+y}) y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_x - \lambda_{x+y} = 0 \\ \lambda_y - \lambda_{x+y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y.$$

3). <u>Rappel</u>: f est une homothétie $\Leftrightarrow$ $f(x)=\lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

14

$\Leftarrow$ • Soit $e \in E\setminus\{0\}$ et soit $\lambda = \lambda_e$.

• Soit $x \in E\setminus\{0\}$ alors par définition de la liberté (x,e) est libre ou (x,e) est liée, dans les deux cas on a $\lambda_x = \lambda_e = \lambda$

et donc $\forall x \in E\setminus\{0\}$, $f(x) = \lambda x$.

si $x = 0$ alors $f(x) = f(0) = 0 = \lambda 0$

ce qui prouve que

$\forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$.