TD 1

- addition de vecteur, coordonnées, rapport entre les deux
- EV, SEV

Exercice 1

$f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos(x)$, $h(x) : x \mapsto \cos(2x)$

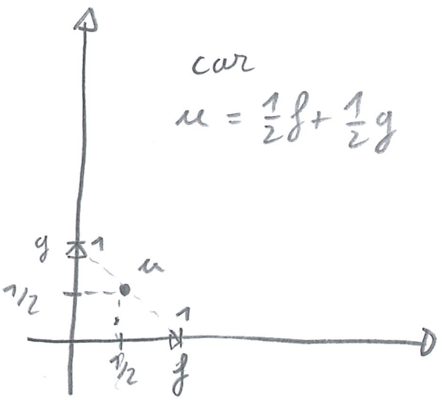
1) $u : x \mapsto g^2(x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \cos(x)^2 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{ix})^2 + 2e^{ix}e^{-ix} + (e^{-ix})^2}{4}$

$= \frac{2 + (e^{i2x} + e^{-i2x})}{4} = \frac{2 + 2\cos(2x)}{4} = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

DONC $u = \frac{f+g}{2}$

2)



car
$u = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g$

3) On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq

$g = \alpha f + \beta h$

Or g est périodique de période 2π et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta h$ est périodique de période π donc impossible.

Exercice 2 :

1) commutative : $(u+v)_n = u_n + v_n = v_n + u_n = (v+u)_n$.

associative : $(u+(v+w))_n = u_n + (v+w)_n = u_n + (v_n + w_n)$

$= (u_n + v_n) + w_n = (u+v)_n + w_n$

$= ((u+v)+w)_n$.

2) Soit $0_{\mathbb{N}} = (0, \dots, 0, \dots)$, $(u + 0_{\mathbb{N}})_n = u_n + 0 = u_n$

3) Soit $-u := (-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u + (-u))_n = u_n - u_n = 0$.

Exercice 3

$P \in \mathbb{R}_n[X] \iff \exists (a_0, \dots, a_{n-1})$ tq $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

1) • $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = (a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) + (b_0 + \dots + b_{n-1} x^{n-1})$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1}$$

$\Rightarrow P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$

• $(\lambda P)(x) = \lambda (a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}) = (\lambda a_0) + \dots + (\lambda a_{n-1}) x^{n-1}$

$\Rightarrow \lambda P \in \mathbb{R}_n[X]$

• On vient de prouver que $\mathbb{R}_n[X]$ est un SEV de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) • $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

• $\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$

Rappels : • def de SEV, représentation graphique.
• SEV = EV → Insister sur le fait que c'est la bonne manière de montrer que Espace en un EV.
• Somme de EV, somme directe, supplémentaire

Exercice 4

1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(f+g) : x \longmapsto f(x) + g(x)$

$(\lambda f) : x \longmapsto \lambda . f(x)$

2) $f \in C(I) \iff \forall x_0 \in I, \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x) = f(x_0)$

$\hookrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$

(idem λf).

Exercice 5 :

Methode rapide pour SEV ??

1) $E_1 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z = 0\}$.

$\hookrightarrow$ $(1,2,3) \in E_1$ car $1 - 4 + 3 = 0$.

$2(1,2,3) = (2,4,6) \notin E_1$, $4 - 16 + 6 = -6 \neq 0$

DONC, E_1 pas EV.

2) $E_2 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

$(x_1, y_1, z_1) \in E_2 \Rightarrow \lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda(x + y - z) = 0$.

$(x_2, y_2, z_2) \in E_2 \Rightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)$

$= (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0$.

3) $E_3 : \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right\}$

$\hookrightarrow$ OK (faire pareil que E_2.

4) $(x,y,z) \in E_4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$

OR $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$, $z^2 \geq 0$ donc $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0, y^2 = 0, z^2 = 0 \Rightarrow E_4 = \{0\}$

donc E_4 est un EV.

Exercice 6

- $F_1 = \{ (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) \mid (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \}$.

si $\theta, \varphi = 0$ alors $(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi))$

$= (1, 0, 1, 0)$

$\Rightarrow 3(\cos(\theta), \dots) = (3, 0, 3, 0) \notin F_1$ car $\cos(x) \in [-1, 1]$.
donc F_1 pas SEV

- $F_2 : \{ (r, r+1, -s, u) \mid (s, r, u) \in \mathbb{R}^3 \}$.

si $0 \in F_2$ alors $r = 0$, $r = -1$, IMPOSSIBLE

donc F_2 pas SEV

- $F_3 : \{ (r, s, r, s) \mid (s, r) \in \mathbb{R}^2 \}$

$\hookrightarrow (r_1, s_1, r_1, s_1) + (r_2, s_2, r_2, s_2)$
$= ((r_1 + r_2), (s_1 + s_2), (r_1 + r_2), (s_1 + s_2)) \in F_3$.

$\lambda (r_1, s_1, r_1, s_1) = (\lambda r_1, \lambda s_1, \lambda r_1, \lambda s_1)$

Exercice 7

1) $E_p = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ continue et $f(-x) = f(x)$

$E_i = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ continue et $f(-x) = -f(x) \}$.

$\hookrightarrow$ • $(f + \lambda g)(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = f(x) + \lambda g(x) = (f + \lambda g)(x)$

• idem pour E_i

2) Si $f \in E_p \cap E_i$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f(x) = -f(x)$

$\Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

donc $E_p \cap E_i = \{0\}$

3) $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

4) $E_p + E_i \subset C(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R}) \subset E_p + E_i$

donc $C(\mathbb{R}) = E_p + E_i$, OR $E_p \cap E_i = \{0\}$

donc $\boxed{C(\mathbb{R}) = E_p \oplus E_i}$

Exercice 8 :

1) Si $x \in F \cap G$, $y \in F \cap G$, $\lambda \in \mathbb{K}$

alors $\left.\begin{array}{l} x \in F,\ y \in F \Rightarrow x + \lambda y \in F \\ x \in G,\ y \in G \Rightarrow x + \lambda y \in G \end{array}\right\} x + \lambda y \in F \cap G$

2) Si $x \in F+G$, $y \in F+G$, $\lambda \in \mathbb{K}$

alors $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$

$\Rightarrow x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2) \in F+G$.

3) Supposons que $F \cup G$ est un SEV de E

alors Forcément, $\forall x \in F \cup G, y \in F \cup G, \lambda \in \mathbb{K}$

$x + \lambda y \in F \cup G$.

- Supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ alors $\exists x_0 \in F$ tq $x_0 \notin G$
  $\exists y_0 \in F$ tq $y_0 \notin G$.

- Cependant $x_0 + y_0 \in F \cup G$ car $x_0 \in F \cup G$ et $y_0 \in F \cup G$.

donc $x_0 + y_0 \in F$ ou $x_0 + y_0 \in G$.

- si $x_0 + y_0 \in F$ alors $\exists z \in F$ tq $x_0 + y_0 = z$
  $\Rightarrow y_0 = z - x_0 \in F$ ce qui est impossible.

  si $x_0 + y_0 \in G$ alors $\exists z \in G$ tq $x_0 + y_0 = z$
  $\Rightarrow x_0 = z - y_0 \in F$ ce qui est impossible.

- Par l'absurde $\longrightarrow$ OK

<u>Exercice 9</u>

$F = \{ u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0 \}$

$G = \{ u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_n \}$.

Soit u une suite et

$v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n \text{ est paire} \\ u_{n-1} & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$

$w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est paire.} \\ u_n - u_{n-1} & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$

$w \in F$, $v \in G$ et $u = w + v$

Soit $u \in F \cap G$, Prouvons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

1°) Si n est paire alors comme $u \in F$ on a $u_n = 0$.

- Si n est impaire (i.e $n = 2k+1$) alors comme $u \in G$,
  $u_{2k+1} = u_{2k}$ OR $u \in F$ donc $u_{2k+1} = u_{2k} = 0$.

cl : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

Exercice 10

. Soit F' tq $\forall x \in E$, $\begin{cases} x \in F' \cap (F \cap G) \Rightarrow x = 0 \\ F' + (F \cap G) = F \end{cases}$

. Comme $F' + (F \cap G) = F \Rightarrow \forall (x, y) \in F' \times F \cap G$, $x + y \in F$
donc en particulier, comme $0 \in F \cap G$, $x \in F$
donc $F' \subset F \Rightarrow F \cap F' = F'$

. Ainsi, $F' \cap G = (F' \cap F) \cap G = F' \cap (F \cap G) = \{0\}$.

donc F' et G sont en somme directe.

. $\forall z \in E$, $\exists x \in F$ et $y \in G$ tq $x + y = z$

OR $x \in F$ donc $x \in F' + (F \cap G)$ donc

$\exists (x', x'') \in F' \times F \cap G$ tq $x = x' + x''$.

OR dans ce cas, $z = x' + x'' + y = x' + (x'' + y)$

OR $x'' + y \in G$ donc $E \subset F' + G$

ccl : $F' \oplus G = E$

Exercice 11

i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq A_1$
$\Rightarrow f_1(x) = g_1(x) - h_1(x)$
(idem pour 2)

- Soit f_1 et $f_2 \in E$

Soit • (A_1, g_1, h_1) le triplet associé à f_1

• (A_2, g_2, h_2) le triplet associé à f_2

il vient que $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|x| \geq \max(A_1, A_2)$

$(f_1 + f_2)(x) = (g_1(x) + g_2(x)) - (h_1(x) + h_2(x))$

OR si $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ alors $\max(A_1, A_2) > 0$

ET si g_1 et g_2 sont croissante alors $g_1 + g_2$ aussi

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$

• si $\lambda = 0$ alors $\lambda f = 0$ OR $0 \in E$ car $\forall A > 0$,

$\forall g$ croissante, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(|x| \geq A$, $0 = g(x) - g(x))$

• si $\lambda > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $(|x| \geq A \Rightarrow \lambda f(x) = \lambda g(x) - \lambda h(x))$

OR comme $\lambda > 0$, λg et λh sont croissante

• si $\lambda < 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $(|x| \geq A \Rightarrow \lambda f(x) = (-\lambda) h(x) - (-\lambda) g(x))$

OR comme $\lambda < 0$, $(-\lambda) > 0$ donc $(-\lambda) g$ et $(-\lambda) h$ sont croissantes