1.2 Familles, bases et dimension

1.2.1 Familles génératrices, libres et liées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $x_1, \dots x_n \in E$, n vecteurs de E, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 7. *(Famille finie) On appelle la donnée $(x_1, \dots x_n)$ une famille finie de vecteurs de E, on écrit (pour alléger les notations)*

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Définition 8. *(Combinaison linéaire) On dit que $y \in E$ est une combinaison linéaire de la famille $\underline{x} = (x_1, \dots x_n)$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tels que*

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Définition 9. *(Sous-espace vectoriel engendré) On appelle sous-espace vectoriel (sev) engendré par la famille $\underline{x}$, l'ensemble de ses combinaisons linéaires et on note $\langle \underline{x} \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.*

Proposition 4. *$\langle \underline{x} \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E et tout sous-espace vectoriel de E qui contient $x_1, \dots x_n$ contient $\langle \underline{x} \rangle$.*

On écrit aussi

$$\langle \underline{x} \rangle = \langle x_1, \dots x_n \rangle = \mathrm{span}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Définition 10. *(Famille génératrice) On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ engendre E, ou qu'elle est une famille génératrice de E, si*

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = E.$$

Cela revient à dire

$$\forall y \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n |\ y = \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n.$$

Définition 11. *(Famille libre et liée) On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre (de E) si l'implication suivante est vraie*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée si elle n'est pas libre.

Cela veut dire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ des scalaires non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n = 0_E.$$

Ceci s'appelle une relation de liaison.

1.2.2 Bases et théorème de la base incomplète

Définition et proposition 1. *(Base) On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E. Cela revient à dire que tout $y \in E$ s'écrit de manière unique*

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ s'appellent les coordonnées du vecteur y dans la base $(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 4. *Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre de vecteurs de E, elle engendre $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, donc c'est une base de $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.*

Définition 12. *(Dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie $(x_1, \ldots, x_n)$ de E.*

Théorème 1. *(de la base incomplète)*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient
- *$(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de E, $p \in \mathbb{N}$,*
- *$(y_1, \ldots, y_m)$ une famille génératrice de E, $m \in \mathbb{N}$.*

Alors on peut construire une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $n \in \mathbb{N}$ vérifiant :

1. *$p \leq n$,*
2. *$e_i = x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$,*
3. *pour $i > p$, $e_i \in \{y_1, \ldots, y_m\}$.*

Autrement dit on peut compléter une famille libre de E en une base en ajoutant des éléments d'une famille génératrice.

Remarque 5. *Point important : $(x_1, \ldots, x_m, y_i)$ est libre si*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m + \mu y_i = 0.$$

Si $\mu = 0$, alors on a $\lambda_k = 0$ et la famille $(x_1, \ldots, x_m)$ est libre.
Si $\mu \neq 0$, alors $y_i = -\dfrac{1}{\mu}(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m)$ et $y_i \in \langle x_1, \ldots, x_m \rangle = \langle \underline{\xi} \rangle$, le choix de y_i est contraint.

On admet le résultat suivant, très important.

Lemme 1. *Soit E un espace vectoriel. Soient L une famille libre et G une famille génératrice de E. Alors $card(L) \leq card(G)$.*

Corollaire 1. *(Dimension et famille) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors*

1. *E admet une base.*
2. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre d'appelle la dimension de E et on le note $dim(E)$.*
3. *Soit $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.*
   (a) *Si $\underline{x}$ est libre alors $p \leq dim(E)$ et $\underline{x}$ est une base si et seulement si $p = dim(E)$.*
   (b) *Si $\underline{x}$ est génératrice $p \geq dim(E)$ et $\underline{x}$ est une base si et seulement si $p = dim(E)$.*

En particulier, si E est de dimension n, pour montrer qu'une famille est une base, il suffit de vérifier qu'elle a le bon nombre de vecteurs n et qu'elle est libre OU génératrice.

1.2.3 Propriétés liées à la dimension

Proposition 5. *(Sous-espace vectoriel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E alors*

1. *F est de dimension finie (cela signifie qu'il existe une famille génératrice qui engendre F),*
2. *$dim(F) \leq dim(E)$,*
3. *$dim(F) = dim(E)$ si et seulement si $F = E$.*

Proposition 6. *(Existence d'un supplémentaire) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors F admet un supplémentaire dans E.*

Le résultat suivant est peut-être le théorème le plus important de la section...

Théorème 2. *(Théorème des quatre dimensions) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$dim(F) + dim(G) = dim(F + G) + dim(F \cap G).$$

Corollaire 2. *Si F et G sont en somme directe (c'est-à-dire $E = F \oplus G = \{0\}$) alors $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.*

Proposition 7. *(Produit cartésien et dimension) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$.*

Remarque 6. *Soit E tel que $dim(E) = n$. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. F est de dimension p si et seulement si F a une base constituée de p vecteurs $u_1, \ldots, u_p$:*

$$F = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p,\ \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

On vient de faire une description paramétrique de F, une définition en extension. Il est vrai aussi que F est de dimension p si et seulement s'il est donné par $n - p$ équations linéaires indépendantes. On parle d'une description en intension.