1.2 Familles, bases et dimension

1.2.1 Familles génératrices, libres et liées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $x_1, \dots x_n \in E$, n vecteurs de E, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 7. *(Famille finie) On appelle la donnée $(x_1, \dots x_n)$ une famille finie de vecteurs de E, on écrit (pour alléger les notations)*

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Définition 8. *(Combinaison linéaire) On dit que $y \in E$ est une combinaison linéaire de la famille $\underline{x} = (x_1, \dots x_n)$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tels que*

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Définition 9. *(Sous-espace vectoriel engendré) On appelle sous-espace vectoriel (sev) engendré par la famille $\underline{x}$, l'ensemble de ses combinaisons linéaires et on note $\langle \underline{x} \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.*

Proposition 4. *$\langle \underline{x} \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E et tout sous-espace vectoriel de E qui contient $x_1, \dots x_n$ contient $\langle \underline{x} \rangle$.*

Démonstration. On vérifie les trois points
- $0x_1 + \dots + 0x_n = 0 \in \langle \underline{x} \rangle$;
- $(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + (\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n) = (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) x_n \in \langle \underline{x} \rangle$;
- $\lambda(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = (\lambda \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda \lambda_n x_n) \in \langle \underline{x} \rangle$.

Donc $\langle \underline{x} \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E.
Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in F$, alors $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in F$. Donc $\langle \underline{x} \rangle \subset F$. $\square$

On écrit aussi
$$\langle \underline{x} \rangle = \langle x_1, \dots x_n \rangle = \mathrm{span}(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Définition 10. *(Famille génératrice) On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ engendre E, ou qu'elle est une famille génératrice de E, si*

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = E.$$

Cela revient à dire
$$\forall y \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n |\ y = \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n.$$

Définition 11. *(Famille libre et liée) On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre (de E) si l'implication suivante est vraie*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée si elle n'est pas libre.

Cela veut dire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ des scalaires non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n = 0_E.$$

Ceci s'appelle une relation de liaison.

1.2.2 Bases et théorème de la base incomplète

Définition et proposition 1. *(Base) On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E. Cela revient à dire que tout $y \in E$ s'écrit de manière unique*

$$y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Démonstration. L'existence d'une telle écriture prouve en fait que $\underline{x}$ est génératrice.
Démontrons l'unicité. Supposons que

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \\ &= \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_n x_n, \end{aligned}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots \mu_n \in \mathbb{K}$.
Alors

$$\begin{gathered} \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n - \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_u x_n = 0 \\ (\lambda_1 - \mu_1) x_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) x_n = 0. \end{gathered}$$

Comme $\underline{x}$ est libre, cela implique que $\forall i$, $\lambda_i - \mu_i = 0$ i.e. $\lambda_i = \mu_i$. □

Les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ s'appellent les coordonnées du vecteur y dans la base $(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 4. *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de vecteurs de E, elle engendre $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, donc c'est une base de $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.*

Définition 12. *(Dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie $(x_1, \dots, x_n)$ de E.*

Théorème 1. *(de la base incomplète)*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient
— *$(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E, $p \in \mathbb{N}$,*
— *$(y_1, \dots, y_m)$ une famille génératrice de E, $m \in \mathbb{N}$.*
Alors on peut construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, $n \in \mathbb{N}$ vérifiant :

1. *$p \leq n$,*
2. *$e_i = x_i$ pour $i = 1, 2, \dots, p$,*
3. *pour $i > p$, $e_i \in \{y_1, \dots, y_m\}$.*

Autrement dit on peut compléter une famille libre de E en une base en ajoutant des éléments d'une famille génératrice.

Démonstration. On se donne $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre et $(y_1, \dots, y_m)$ une famille génératrice comme dans l'énoncé. On pose $\underline{\xi} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille libre.
(1) Si $\langle \underline{\xi} \rangle = E$, c'est une base et c'est gagné.
Sinon $\langle \underline{\xi} \rangle \neq E = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$. Donc il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $y_i \notin \langle \underline{\xi} \rangle$.
On remplace $\underline{\xi}$ par $\underline{\xi} \cup \{y_i\}$ (on ajoute le vecteur y_i à la fin de ξ).
On reprend à (1).
Le programme s'arrête pour $\langle \underline{\xi} \rangle = E$. Alors $\underline{\xi}$ est une base de E. Le processus s'arrête après au plus m étapes parce que $(y_1, \dots, y_m)$ a m éléments. □

Remarque 5. *Point important : $(x_1, \dots, x_m, y_i)$ est libre si*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m + \mu y_i = 0.$$

Si $\mu = 0$, alors on a $\lambda_k = 0$ et la famille $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.
Si $\mu \neq 0$, alors $y_i = -\dfrac{1}{\mu}(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m)$ et $y_i \in \langle x_1, \dots, x_m \rangle = \langle \underline{\xi} \rangle$, le choix de y_i est contraint.

On admet le résultat suivant, très important.

Lemme 1. *Soit E un espace vectoriel. Soient L une famille libre et G une famille génératrice de E. Alors $card(L) \leq card(G)$.*

Corollaire 1. *(Dimension et famille) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors*

1. *E admet une base.*
2. *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre d'appelle la dimension de E et on le note $dim(E)$.*
3. *Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.*
   (a) *Si $\underline{x}$ est libre alors $p \leq dim(E)$ et $\underline{x}$ est une base si et seulement si $p = dim(E)$.*
   (b) *Si $\underline{x}$ est génératrice $p \geq dim(E)$ et $\underline{x}$ est une base si et seulement si $p = dim(E)$.*

Démonstration. 1. E admet une famille génératrice $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$. Soit $\underline{x}$ la famille vide (ne contenant aucun vecteur). $\underline{x}$ est libre. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base formée des vecteurs de $\underline{y}$.

2. Soient $(x_1, \dots, x_p)$, famille libre, et $(y_1, \dots, y_m)$, famille génératrice, deux bases de E. Par le théorème de la base incomplète, on a $p \leq m$ et $m \leq p$. Donc $m = p$.
3. Soient $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre et $(y_1, \dots, y_m)$ une base (c'est en particulier une famille génératrice). Par le théorème de la base incomplète, $p \leq m = \dim(E)$.
   Si $p = m$, par le théorème de la base incomplète, on complète $(x_1, \dots, x_m)$ en une base $(e_1, \dots, e_n) = (x_1, \dots, x_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$. Donc $n = m$. Ainsi $(x_1, \dots, x_m)$ est une base.
   On fait de même pour une famille génératrice.

□

En particulier, si E est de dimension n, pour montrer qu'une famille est une base, il suffit de vérifier qu'elle a le bon nombre de vecteurs n et qu'elle est libre OU génératrice.

1.2.3 Propriétés liées à la dimension

Proposition 5. *(Sous-espace vectoriel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E alors*

1. *F est de dimension finie (cela signifie qu'il existe une famille génératrice qui engendre F),*
2. *$dim(F) \leq dim(E)$,*
3. *$dim(F) = dim(E)$ si et seulement si $F = E$.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de F. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E.
On sait qu'on peut prolonger $(e_1 \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_m)$ de E en complétant $(e_1, \dots, e_p)$ par des vecteurs pris dans $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (c'est le théorème de la base incomplète : une famille libre de F est une famille libre de E).
On a $m = n$ donc $p \leq n = \dim(E)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de F de cardinal maximal. Alors $F = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ sinon on pourrait trouver $e_{p+1} \in F \setminus \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ de sorte que $(e_1, \dots, e_{p+1})$ soit une famille libre dans F et de cardinal $p+1$. Ce qui contredit que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une famille de cardinal maximal.
Donc $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F et $\dim(F) = p \leq n$. On vient de démontrer les deux premiers points.
Pour le dernier point, on remarque que si $F = E$, on a bien $\dim(F) = \dim(E)$. Supposons maintenant que $\dim(F) = n$. Puisque $F = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$, on a $p = n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ se complète

en une base de E qui a forcément n vecteurs. Donc $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ est déjà une base de E. Ceci implique que $F = E$. $\square$

Proposition 6. *(Existence d'un supplémentaire) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors F admet un supplémentaire dans E.*

Démonstration. On cherche $G \subset E$ sous-espace vectoriel de E tel que $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. Par le théorème de la base incomplète, soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On la complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.
Soit $G = \langle e_{p+1}, \dots, e_n \rangle$. On a $x \in F \cap G$ si et seulement si $x \in F$ et $x \in G$. Puisque $F = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$, on a à la fois

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$$
$$x = \mu_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \mu_n e_n.$$

Donc

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p - \mu_{p+1} e_{p+1} - \ldots - \mu_n e_n = 0.$$

Or $(e_1, \dots, e_n)$ est libre car c'est une base de E. Donc

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 (= \mu_{p+1} = \ldots = \mu_n).$$

On a donc $x = 0$, ce qui implique que $F \cap G = \{0\}$.
Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \\ &= \underbrace{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p}_{\in F} + \underbrace{\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n}_{\in G}. \end{aligned}$$

Donc $E = F + G$. $\square$

Le résultat suivant est peut-être le théorème le plus important de la section...

Théorème 2. *(Théorème des quatre dimensions) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$dim(F) + dim(G) = dim(F + G) + dim(F \cap G).$$

Corollaire 2. *Si F et G sont en somme directe (c'est-à-dire $E = F \oplus G = \{0\}$) alors $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.*

Démonstration. La démonstration repose sur l'analogie avec la formule de la théorie des ensembles

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B).$$

Soit $B_{F \cap G} = (x_1, \dots, x_p)$ une base de $F \cap G$. On complète $B_{F \cap G}$ en une base de F : $B_F = (x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_q)$.
On complète $B_{F \cap G}$ en une base de G : $B_F = (x_1, \dots, x_p, w_{p+1}, \dots, w_r)$.
On va montrer que la famille $B = (x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_q, w_{p+1}, \dots, w_r)$ est une base de $F + G$.
B est une famille génératrice de $F + G$ car B_F génère F et B_G génère G.
Il reste à montrer que c'est une famille libre. On considère la combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i + \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j y_j + \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k = 0.$$

Posons $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$, $y = \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j y_j$ et $w = \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k$.

On a $x+y \in F$ et aussi $x+y = -w \in G$. Donc $x+y \in F \cap G$. De plus $x \in F \cap G$, ce qui implique que $y \in F \cap G$. Cela signifie que les $\beta_j = 0$ pour tous les j. On a maintenant

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i + \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k = 0.$$

Or B_G est une base donc ${}_i = 0$ et $\gamma_k = 0$ pour tous les indices i et k. Donc B est une base de $F + G$.
Il ne reste plus qu'à compter les éléments de chaque base :

— $\dim(F \cap G) = p$,
— $\dim(F) = q$,
— $\dim(G) = r$,
— $\dim(F + G) = -p + q + r$.

On a donc $\dim(F) + \dim(G) = q + r = q + r - p + p = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$. □

Proposition 7. *(Produit cartésien et dimension) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$.*

Démonstration. Soient $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.
Alors $((e_1, 0), \ldots, (e_r, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_p))$ est une base de $E \times F$.
Reste à démontrer que c'est effectivement une base, ce qui est laissé en exercice. □

Remarque 6. *Soit E tel que $dim(E) = n$. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. F est de dimension p si et seulement si F a une base constituée de p vecteurs $u_1, \ldots, u_p$:*

$$F = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p,\ \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

On vient de faire une description paramétrique de F, une définition en extension. Il est vrai aussi que F est de dimension p si et seulement s'il est donné par $n - p$ équations linéaires indépendantes. On parle d'une description en intension.