Chapitre B.4

Applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$

B.4.a) Notion d'application linéaire.

Un premier exemple

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On lui associe :

$$\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

Proposition. L'application Φ_A satisfait :

- pour tout $(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2$

$$\Phi_A(X + X') = A(X + X')$$

- pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$

$$\Phi_A(\lambda X) = A(\lambda X).$$

Un premier exemple

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On lui associe :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_A : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

Proposition. L'application Φ_A satisfait :

- pour tout $(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2$

$$\Phi_A(X + X') = A(X + X')$$

- pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$

$$\Phi_A(\lambda X) = A(\lambda X).$$

Un premier exemple

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On lui associe :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_A : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

Proposition. L'application Φ_A satisfait :

- pour tout $(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2$
$$\Phi_A(X + X') = AX + AX'$$
- pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$
$$\Phi_A(\lambda X) = A(\lambda X).$$

Un premier exemple

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On lui associe :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_A : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

Proposition. L'application Φ_A satisfait :

- pour tout $(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2$
$$\Phi_A(X + X') = \Phi_A(X) + \Phi_A(X')$$
- pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$
$$\Phi_A(\lambda X) = A(\lambda X).$$

Un premier exemple

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On lui associe :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_A : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

Proposition. L'application Φ_A satisfait :

- pour tout $(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2$
$$\Phi_A(X + X') = \Phi_A(X) + \Phi_A(X')$$
- pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$
$$\Phi_A(\lambda X) = \lambda(AX).$$

Un premier exemple

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On lui associe :

$$\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

Proposition. L'application Φ_A satisfait :

- pour tout $(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2$

$$\Phi_A(X + X') = \Phi_A(X) + \Phi_A(X')$$

- pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$

$$\Phi_A(\lambda X) = \lambda \Phi_A(X).$$

Généralisation

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Définition. Soit une application $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$. Si Φ satisfait

- pour tout $(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2$

$$\Phi(X + X') = \Phi(X) + \Phi(X')$$

- pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$

$$\Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X).$$

on dit que Φ est une application linéaire.

Exemple. Toutes les applications Φ_A.

Notation. On note

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p) = \{\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p \text{ linéaire } \} .$$

Généralisation

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Définition. Soit une application $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$. Si Φ satisfait

- pour tout $(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2$
$$\Phi(X + X') = \Phi(X) + \Phi(X')$$
- pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$
$$\Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X).$$

on dit que Φ est une application linéaire.

Exemple. Toutes les applications Φ_A.

Notation. On note
$$\mathcal{L}(\mathbb{K}^n) = \{\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \text{ linéaire } \}.$$

Autres exemples/contre-exemples

Exemple.

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Contre-exemple.

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

n'est pas linéaire car :

$$\Psi(\mathbf{0}_3) \neq \mathbf{0}_2.$$

Autres exemples/contre-exemples

Exemple.

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Contre-exemple.

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

n'est pas linéaire car :

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq \Psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \Psi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Opérations sur les applications linéaires

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et

$$(\Phi_1, \Phi_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p), \Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q; \mathbb{K}^n)$$

alors

- $\Phi_1 + \Phi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$ avec

$$\begin{array}{rccc} \Phi_1 + \Phi_2 : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & X & \longmapsto & \Phi_1(X) + \Phi_2(X) \end{array}$$

- $\lambda\Phi_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$ avec

$$\begin{array}{rccc} \lambda\Phi_1 : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & X & \longmapsto & \lambda\Phi_1(X) \end{array}$$

- $\Phi_1 \circ \Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q; \mathbb{K}^p)$

Preuve

- $\Phi_1 \circ \Psi$ est linéaire

Pour tout $(X, X') \in \mathbb{K}^q$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_1 \circ \Psi(X + X') &= \Phi_1(\Psi(X) + \Psi(X')) \\
&= \Phi_1(\Psi(X)) + \Phi_1(\Psi(X')) \\
&= \Phi_1 \circ \Psi(X) + \Phi_1 \circ \Psi(X').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 \circ \Psi(\lambda X) &= \Phi_1(\lambda \Psi(X)) \\
&= \lambda \Phi_1(\Psi(X))) \\
&= \lambda \Phi_1 \circ \Psi(X).
\end{aligned}$$

B.4.b) Applications linéaires et calcul matriciel.

Application linéaire et combinaison linéaire

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$.

Pour tout $(X, X') \in \mathbb{K}^n$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ on a :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda X + \lambda' X') &= \Phi(\lambda X) + \Phi(\lambda' X') \\ &= \lambda \Phi(X) + \lambda' \Phi(X'). \end{aligned}$$

Application linéaire et combinaison linéaire

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$.

Supposons que
"Pour tout $(X_1, \dots, X_k)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ on a :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Phi(X_i)\text{''}$$

Alors, pour tout $(X_1, \dots, X_{k+1})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1})$ on a

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i X_i\right) &= \Phi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i + \lambda_{k+1} X_{k+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \Phi(X_i). \end{aligned}$$

Application linéaire et combinaison linéaire

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$.

Supposons que
"Pour tout $(X_1, \dots, X_k)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ on a :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Phi(X_i)\text{"}$$

Alors, pour tout $(X_1, \dots, X_{k+1})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1})$ on a

$$\begin{aligned}\Phi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i X_i\right) &= \Phi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i\right) + \lambda_{k+1}\Phi(X_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \Phi(X_i).\end{aligned}$$

Application linéaire et combinaison linéaire

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(X_1, \ldots, X_k) \in [\mathbb{K}^n]^k$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ on a :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Phi(X_i)"$$

Conséquence

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Soit $(\Phi_1, \Phi_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$ deux applications linéaires et $(X_1, \dots, X_k) \in [\mathbb{K}^n]^k$. On a l'implication suivante :

$$"\Phi_1(X_i) = \Phi_2(X_i) \quad \forall\, i \in \{1, \dots, k\}" \\ \Longrightarrow "\Phi_1(X) = \Phi_2(X) \quad \forall\, X \in \langle X_1, \dots, X_k \rangle"$$

Rappel.

$$\langle X_1, \dots, X_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i \,, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k \right\}.$$

Exemple

Soit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On rappelle

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors

$$\Phi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Phi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Phi(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\Phi(\mathbf{e}_1) = A\mathbf{e}_1 \quad \Phi(\mathbf{e}_2) = A\mathbf{e}_2 \quad \Phi(\mathbf{e}_3) = A\mathbf{e}_3.$$

Exemple

Soit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\Phi = \Phi_A$.

Résultat principal

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(p, n) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$. Notons

$$C_i = \Phi(\mathbf{e}_i) \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice de colonnes $C_1, \ldots, C_n$.
Alors $\Phi = \Phi_A$.

Rappel. $\mathbf{e}_i$ est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ième qui vaut 1.

En pratique

Soit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors :

$$\Phi = \Phi_A \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En pratique

Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors :

$$\Phi = \Phi_A \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque :

$$\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_3 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * x_1 & + & (-2) * x_2 & + & 4 * x_3 \\ (-1) * x_1 & + & 0 * x_2 & + & 2 * x_3 \end{pmatrix}$$

Correspondance et opérations

Proposition. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\Phi_1, \Phi_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^p)$, $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q; \mathbb{K}^n)$ associées resp. à $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire :

$$\Phi_1 = \Phi_{A_1} \quad \Phi_2 = \Phi_{A_2} \quad \Psi = \Phi_B.$$

Alors :

- $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_{A_1 + A_2}$
- $\lambda \Phi_1 = \Phi_{\lambda A_1}$
- $\Phi_1 \circ \Psi = \Phi_{A_1 B}.$

B.4.c) Sur l'injectivité des applications linéaires.

Applications linéaires injectives

$\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ application linéaire

Rappel. Φ injective $\iff$

$$\forall\,(X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2 \quad "(\Phi(X) = \Phi(X')) \Longrightarrow (X = X')"$$

Exemple. Φ injective $\Longrightarrow$

$$\forall\, X \in \mathbb{K}^n \quad "(\Phi(X) = \mathbf{0}_p) \Longrightarrow (X = \mathbf{0}_n)"$$

Définition. On appelle noyau de Φ

$$\operatorname{Ker}\Phi = \{X \in \mathbb{K}^n \quad \text{t.q.} \quad \Phi(X) = \mathbf{0}_p\}$$

Applications linéaires injectives

$\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ application linéaire

Rappel. Φ injective $\iff$

$$\forall (X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2 \quad ''(\Phi(X) = \Phi(X')) \Longrightarrow (X = X')''$$

Exemple. Φ injective $\Longrightarrow$

$$\forall X \in \mathbb{K}^n \quad ''(\Phi(X) = \mathbf{0}_p) \Longrightarrow (X = \mathbf{0}_n)''$$

Définition. On appelle noyau de Φ

$$\operatorname{Ker} \Phi = \Phi^{-1}(\{\mathbf{0}_p\}).$$

Applications linéaires injectives

$\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ application linéaire

Rappel. Φ injective $\iff$

$$\forall (X, X') \in [\mathbb{K}^n]^2 \quad \text{"}(\Phi(X) = \Phi(X')) \Longrightarrow (X = X')\text{"}$$

Exemple. Φ injective $\Longrightarrow$

$$\forall X \in \mathbb{K}^n \quad \text{"}(\Phi(X) = \mathbf{0}_p) \Longrightarrow (X = \mathbf{0}_n)\text{"}$$

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on appelle noyau de A

$$\mathrm{Ker}\, A = \{X \in \mathbb{K}^n \quad \text{t.q.} \quad AX = \mathbf{0}_p\}.$$

Etude du noyau

Remarque. Calculer Ker A c'est résoudre le système correspondant à l'équation $AX = \mathbf{0}_p$.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ alors

$$X \in \text{Ker } A \iff AX = \mathbf{0}_2$$

Etude du noyau

Remarque. Calculer Ker A c'est résoudre le système correspondant à l'équation $AX = \mathbf{0}_p$.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ alors

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etude du noyau

Remarque. Calculer Ker A c'est résoudre le système correspondant à l'équation $AX = \mathbf{0}_p$.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ alors

$$X \in \text{Ker } A$$

$$\iff (x_1, x_2, x_3) \text{ solution de } \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Etude du noyau

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire

Proposition. Ker Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- $\mathbf{0}_p \in$ Ker Φ
- pour tout $(X, X') \in$ Ker Φ,
$$\Phi(X) = \Phi(X') = \mathbf{0}_p$$
- pour tout $X \in$ Ker Φ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\Phi(X) = \mathbf{0}_p$$

Etude du noyau

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire

Proposition. Ker Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- $\mathbf{0}_p \in$ Ker Φ
- pour tout $(X, X') \in$ Ker Φ,
$$\Phi(X + X') = \Phi(X) + \Phi(X') = \mathbf{0}_p$$
- pour tout $X \in$ Ker Φ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\Phi(X) = \mathbf{0}_p$$

Etude du noyau

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire

Proposition. Ker Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- $\mathbf{0}_p \in \text{Ker } \Phi$
- pour tout $(X, X') \in \text{Ker } \Phi$,
$$X + X' \in \text{Ker } \Phi$$
- pour tout $X \in \text{Ker } \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\Phi(X) = \mathbf{0}_p$$

Etude du noyau

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire

Proposition. Ker Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- $\mathbf{0}_p \in \text{Ker } \Phi$
- pour tout $(X, X') \in \text{Ker } \Phi$,
$$X + X' \in \text{Ker } \Phi$$
- pour tout $X \in \text{Ker } \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X) = \mathbf{0}_p$$

Etude du noyau

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire

Proposition. Ker Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- $\mathbf{0}_p \in \text{Ker } \Phi$
- pour tout $(X, X') \in \text{Ker } \Phi$,
$$X + X' \in \text{Ker } \Phi$$
- pour tout $X \in \text{Ker } \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda X \in \text{Ker } \Phi$$

Etude du noyau

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire

Proposition. Ker Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- $\mathbf{0}_p \in \text{Ker } \Phi$
- pour tout $(X, X') \in \text{Ker } \Phi$,
$$X + X' \in \text{Ker } \Phi$$
- pour tout $X \in \text{Ker } \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda X \in \text{Ker } \Phi$$

Corollaire. Si $\text{Ker } \Phi \neq \{\mathbf{0}_n\}$ alors
$$\mathbf{0}_n \neq X_0 \in \text{Ker } \Phi$$

Etude du noyau

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire

Proposition. Ker Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- $\mathbf{0}_p \in \text{Ker } \Phi$
- pour tout $(X, X') \in \text{Ker } \Phi$,
$$X + X' \in \text{Ker } \Phi$$
- pour tout $X \in \text{Ker } \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda X \in \text{Ker } \Phi$$

Corollaire. Si Ker $\Phi \neq \{\mathbf{0}_n\}$ alors
$$\langle X_0 \rangle \subset \text{Ker } \Phi$$

Etude du noyau

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire

Proposition. Ker Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- $\mathbf{0}_p \in \text{Ker } \Phi$
- pour tout $(X, X') \in \text{Ker } \Phi$,
$$X + X' \in \text{Ker } \Phi$$
- pour tout $X \in \text{Ker } \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda X \in \text{Ker } \Phi$$

Corollaire. Si Ker $\Phi \neq \{\mathbf{0}_n\}$ alors
$$\text{Ker } \Phi \text{ est infini}$$

Résultats principaux

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire,

Proposition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Φ est injective
ii) Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$ on a "$\Phi(X) = \mathbf{0}_p \implies X = \mathbf{0}_n$"
iii) Ker $\Phi = \{\mathbf{0}_n\}$.

Corollaire. On a l'implication

$$\Phi \text{ injective } \implies p \geqslant n.$$

Illustration

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$ (on a $3 < 4$)

$$AX = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow (\mathcal{E}_0) \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Gauss :

- Etape 0+1

$$(\mathcal{E}_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

- Etape 2

$$(\mathcal{E}_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

Illustration

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$ (on a $3 < 4$)

$$AX = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow (\mathcal{E}_0) \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

Le système échelonné est compatible et contient au moins une variable libre :

$$(\mathcal{E}_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\operatorname{Ker} A \text{ est infini}$$

B.4.c) Sur la surjectivité des applications linéaires.

Applications linéaires surjectives

$\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ application linéaire

Rappel. Φ surjective $\iff$

$$\forall\, Y \in \mathbb{K}^p \quad \exists\, X \in \mathbb{K}^n, \Phi(X) = Y$$

Définition. On appelle image de Φ

$$\operatorname{Im}\Phi = \{Y \in \mathbb{K}^p \quad \text{t.q.} \quad \exists\, X \in \mathbb{K}^n, \quad \Phi(X) = Y\}$$

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on appelle image de A

$$\operatorname{Im} A = \{Y \in \mathbb{K}^p \quad \text{t.q.} \quad \exists\, X \in \mathbb{K}^n, \quad AX = Y\}.$$

Applications linéaires surjectives

$\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ application linéaire

Rappel. Φ surjective $\iff$

$$\forall\, Y \in \mathbb{K}^p \quad \exists\, X \in \mathbb{K}^n, \Phi(X) = Y$$

Définition. On appelle image de Φ

$$\operatorname{Im}\Phi = \Phi(\mathbb{K}^n)$$

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on appelle image de A

$$\operatorname{Im} A = \{Y \in \mathbb{K}^p \quad \text{t.q.} \quad \exists\, X \in \mathbb{K}^n, \quad AX = Y\}.$$

Calcul de l'image

Remarque. Montrer que $B \in \operatorname{Im} A$ revient à montrer que le système associé à l'équation $AX = B$ est compatible.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alors

$$B \in \operatorname{Im} A \Longleftrightarrow \exists\, X \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } AX = B$$

Calcul de l'image

Remarque. Montrer que $B \in \operatorname{Im} A$ revient à montrer que le système associé à l'équation $AX = B$ est compatible.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alors

$$B \in \operatorname{Im} A$$

$$\iff \exists\,(x_1, x_2, x_3) \text{ solution de } \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & b_1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & b_2 \end{array} \right.$$

Calcul de l'image

Remarque. Montrer que $B \in \operatorname{Im} A$ revient à montrer que le système associé à l'équation $AX = B$ est compatible.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alors

$$B \in \operatorname{Im} A \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & b_1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & b_2 \end{array} \right. \text{ est compatible.}$$

Poursuite de l'exemple

Soit $B \in \mathbb{R}^2$

$$(\mathcal{E}_B) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & b_1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & b_2 \end{array} \right.$$

Alors

$$(\mathcal{E}_B) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & b_1 \\ -10x_2 + 5x_3 & = & b_2 - 4b_1 \end{array} \right.$$

Conclusions. A est surjective et

$$\text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Phi_A^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Résolution de l'équation $AX = B$

$A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

Proposition. Pour tout $B \in \mathrm{Im} A$ et $X_B \in \Phi_A^{-1}(\{B\})$ on a

$$\Phi_A^{-1}(\{B\}) = \{X_B + X, X \in \mathrm{Ker}\ \Phi_A\}.$$

Corollaire. Pour tout $B \in \mathbb{K}^p$ on a l'une des trois situations : suivantes

- l'équation $AX = B$ n'a pas de solution ($B \notin\ \mathrm{Im}\ A$)
- l'équation $AX = B$ a exactement une solution ($B \in\ \mathrm{Im}\ A$ et A injective)
- l'équation $AX = B$ a une infinité de solutions ($B \in\ \mathrm{Im}\ A$ et A non-injective)

Etude de l'image

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$

Proposition. Im Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

- $\mathbf{0}_p \in \mathrm{Im}\ \Phi$
- pour tout $(Y, Y') \in \mathrm{Im}\ \Phi$,
$$Y = \Phi(X) \quad Y' = \Phi(X')$$
- pour tout $Y \in \mathrm{Im}\ \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$Y = \Phi(X)$$

Etude de l'image

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$

Proposition. Im Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

- $\mathbf{0}_p \in \text{Im } \Phi$
- pour tout $(Y, Y') \in \text{Im } \Phi$,
$$Y + Y' = \Phi(X) + \Phi(X') = \Phi(X + X')$$
- pour tout $Y \in \text{Im } \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$Y = \Phi(X)$$

Etude de l'image

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$

Proposition. Im Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

- $\mathbf{0}_p \in \text{Im } \Phi$
- pour tout $(Y, Y') \in \text{Im } \Phi$,
$$Y + Y' \in \text{Im } \Phi$$
- pour tout $Y \in \text{Im } \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$Y = \Phi(X)$$

Etude de l'image

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$

Proposition. $\mathrm{Im}\ \Phi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

- $\mathbf{0}_p \in \mathrm{Im}\ \Phi$
- pour tout $(Y, Y') \in \mathrm{Im}\ \Phi$,
$$Y + Y' \in \mathrm{Im}\ \Phi$$
- pour tout $Y \in \mathrm{Im}\ \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda Y = \lambda \Phi(X) = \Phi(\lambda X)$$

Etude de l'image

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$

Proposition. Im Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

- $\mathbf{0}_p \in \mathrm{Im}\ \Phi$
- pour tout $(Y, Y') \in \mathrm{Im}\ \Phi$,
$$Y + Y' \in \mathrm{Im}\ \Phi$$
- pour tout $Y \in \mathrm{Im}\ \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda Y \in \mathrm{Im}\ \Phi$$

Etude de l'image

Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$

Proposition. Im Φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

- $\mathbf{0}_p \in \mathrm{Im}\ \Phi$
- pour tout $(Y, Y') \in \mathrm{Im}\ \Phi$,
$$Y + Y' \in \mathrm{Im}\ \Phi$$
- pour tout $Y \in \mathrm{Im}\ \Phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda Y \in \mathrm{Im}\ \Phi$$

Corollaire. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$ on a :
$$\mathrm{Im}\ A = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle.$$

Résultats principaux

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$,

Proposition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est surjective
ii) Pour tout $B \in \mathbb{K}^p$ l'équation $AX = B$ admet au moins une solution.
iii) $\langle C_1, \ldots, C_n \rangle = \mathbb{K}^p$

Corollaire. On a l'implication

$$\Phi_A \text{ surjective } \implies p \leqslant n.$$

Illustration

Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$ (on a $3 < 4$) et $B \in \mathbb{K}^4$

$$AX = B \Leftrightarrow (\mathcal{E}_B) \quad \begin{pmatrix} * & * & * & b_1 \\ * & * & * & b_2 \\ * & * & * & b_3 \\ * & * & * & b_4 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Gauss :

- Etape 0+1

$$(\mathcal{E}_B) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Illustration

Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$ (on a $3 < 4$) et $B \in \mathbb{K}^4$

$$AX = B \Leftrightarrow (\mathcal{E}_B) \quad \begin{pmatrix} * & * & * & b_1 \\ * & * & * & b_2 \\ * & * & * & b_3 \\ * & * & * & b_4 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Gauss :

- Etape 2

$$(\mathcal{E}_B) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Illustration

Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$ (on a $3 < 4$) et $B \in \mathbb{K}^4$

$$AX = B \Leftrightarrow (\mathcal{E}_B) \quad \begin{pmatrix} * & * & * & b_1 \\ * & * & * & b_2 \\ * & * & * & b_3 \\ * & * & * & b_4 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Gauss :

- Etape 3

$$(\mathcal{E}_B) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Illustration

Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$ (on a $3 < 4$) et $B \in \mathbb{K}^4$

$$AX = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{E}_B) \quad \begin{pmatrix} * & * & * & b_1 \\ * & * & * & b_2 \\ * & * & * & b_3 \\ * & * & * & b_4 \end{pmatrix}$$

Le système échelonné équivalent peut être incompatible :

$$(\mathcal{E}_0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & *(= 1) \end{pmatrix}$$

B.4.d) Bijectivité des applications linéaires.

Rappels

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Définition. Une application linéaire $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Contraintes. Soit $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ linéaire bijective :

$$\left.\begin{array}{rcl} \Phi \text{ injective} & \Longrightarrow & n \leqslant p \\ \Phi \text{ surjective} & \Longrightarrow & n \geqslant p \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad n = p.$$

Proposition.

Si $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ est linéaire bijective alors $n = p$.

Bijectif *vs* inversible

Rappel. $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est bijective si et seulement si il existe $\Psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ telle que

$$\Phi \circ \Psi = id_{\mathbb{K}^n} \qquad \Psi \circ \Phi = id_{\mathbb{K}^n} .$$

Remarque. Ψ est unique et on a $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

$$\text{"}\Phi(x) = y \ \text{ et } \ \Phi(x') = y'\text{"} \Longrightarrow \Phi(x + x') = y + y'$$

Convention.

- Si $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est bijective on dit qu'elle est inversible. On note Φ^{-1} l'application Ψ associée.
- $\mathcal{G}\ell(\mathbb{K}^n) = \{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)\, , \text{inversible}\}$

Bijectif *vs* inversible

Rappel. $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est bijective si et seulement si il existe $\Psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ telle que

$$\Phi \circ \Psi = id_{\mathbb{K}^n} \qquad \Psi \circ \Phi = id_{\mathbb{K}^n}\,.$$

Remarque. Ψ est unique et on a $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

$$"x = \Psi(y) \text{ et } x' = \Psi(y')" \implies x + x' = \Psi(y + y').$$

Convention.

- Si $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est bijective on dit qu'elle est inversible. On note Φ^{-1} l'application Ψ associée.
- $\mathcal{G}\ell(\mathbb{K}^n) = \{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)\,,\text{inversible}\}$

Bijectif *vs* inversible

Rappel. $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est bijective si et seulement si il existe $\Psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ telle que

$$\Phi \circ \Psi = id_{\mathbb{K}^n} \qquad \Psi \circ \Phi = id_{\mathbb{K}^n} .$$

Remarque. Ψ est unique et on a $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

$$\Psi(y) + \Psi(y') = \Psi(y + y') \quad \text{de même} \quad \Psi(\lambda y) = \lambda \Psi(y).$$

Convention.

- Si $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est bijective on dit qu'elle est inversible. On note Φ^{-1} l'application Ψ associée.
- $\mathcal{G}\ell(\mathbb{K}^n) = \{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)\, , \text{inversible}\}$

Vision matricielle

Définition. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$(*) \qquad AB = BA = I_n.$$

Remarque. Si A est inversible :

- $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_n\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n.$
- si B et B' satisfont $(*)$ alors

$$BAB' = B'$$

Vision matricielle

Définition. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$(*) \qquad AB = BA = I_n.$$

Remarque. Si A est inversible :

- $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_n\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$.
- si B et B' satisfont $(*)$ alors
$$B = BAB' \ (= B')$$

Vision matricielle

Définition. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$(*) \qquad AB = BA = I_n.$$

Remarque. Si A est inversible :

- $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_n\}$ et $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$.
- $\exists!\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $(*)$

Convention.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible. On note A^{-1} l'unique B satisfaisant $(*)$.
- $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,, \text{inversible}\}$

Deux résultats

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$

Proposition Soit $A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $y \in \mathbb{K}^n$ il existe un unique $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Ax = y$.

Proposition Soit $(A, B) \in [\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})]^2$ alors

- $A^{-1} \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ et $[\,A^{-1}\,]^{-1} = A$
- $AB \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ et $[\,AB\,]^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Cette proposition n'est vraie que pour le produit et en particulier pas pour la somme de deux matrices inversibles.

Exemples

Matrices de permutation

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$AB = BA = I_3 \Longrightarrow A \in \mathcal{G}\ell_3(\mathbb{R})$$

Ici, le fait que $A^{-1} = A$ est très particulier.
Ce n'est pas le cas en général.

Généralisation

Matrices de permutation

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$ distincts.

Soit $P[k_1, k_2] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \notin \{k_1, k_2\} \\ 1 & \text{si "} i = k_1 \text{ et } j = k_2 \text{" ou "} i = k_2 \text{ et } j = k_1 \text{"} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $P[k_1, k_2]$ est inversible.

Remarque. $\Phi_{P[k_1,k_2]} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ satisfait

- $\Phi_{P[k_1,k_2]}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$ si $i \notin \{k_1, k_2\}$
- $\Phi_{P[k_1,k_2]}(\mathbf{e}_{k_1}) = \mathbf{e}_{k_2}$
- $\Phi_{P[k_1,k_2]}(\mathbf{e}_{k_2}) = \mathbf{e}_{k_1}$

$$\Longrightarrow \Phi_{P[k_1,k_2]} \circ \Phi_{P[k_1,k_2]} = id_{\mathbb{K}^n}.$$

Exemples

Matrices de combinaison

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$AB = BA = I_3 \Longrightarrow A \in \mathcal{G}\ell_3(\mathbb{R})$$

Généralisation

Matrices de combinaison

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $a_k \neq 0$.

Soit $T_{\mathbf{a}}^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq k \\ 0 & \text{si } i \neq j \text{ et } i \neq k \\ a_j & \text{si } i = k \end{cases}$$

Alors $T_{\mathbf{a}}^k$ est inversible.

Remarque. $\Phi_{T_{\mathbf{a}}^k} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ satisfait

- $\Phi_{T_{\mathbf{a}}^k}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i + a_i \mathbf{e}_k$ si $i \neq k$
- $\Phi_{T_{\mathbf{a}}^k}(\mathbf{e}_k) = a_k\, \mathbf{e}_k$.

Recherche de l'inverse

Premier essai

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -12 & -2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

alors

" A inversible $\iff$

$\forall\, B \in \mathbb{R}^3,\ AX = B$ a une unique solution"

Remarque. De plus, si A est inversible A^{-1} est donné par la formule qui donne X en fonction de B.

Recherche de l'inverse

Premier essai

Matrice augmentée du système $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & b_1 \\ 3 & -12 & -2 & b_2 \\ -2 & 8 & 2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Etape 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & b_1 \\ 0 & -3 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 2 & 2 & b_3 + 2b_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

Recherche de l'inverse

Premier essai

Travail préparatoire pour l'étape 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & b_2 + b_3 - b_1 \\ 0 & 2 & 2 & b_3 + 2b_1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

Etape 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 - b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 + 3b_3/2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow (L_3 + 2L_2)/2 \end{matrix}$$

Recherche de l'inverse

Premier essai

Remontée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4b_1 - 3b_2 - 3b_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 - b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 + 3b_3/2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

Conclusion : L'unique solution de $AX = B$ est

$$X = \begin{pmatrix} 4b_1 - 3b_2 - 3b_3 \\ b_1 - b_2 - b_3 \\ b_2 + 3b_3/2 \end{pmatrix}$$

Recherche de l'inverse

Premier essai

Remontée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4b_1 - 3b_2 - 3b_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 - b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 + 3b_3/2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

Conclusion : $A \in \mathcal{G}\ell_3(\mathbb{R})$ et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Interprétations du calcul précédent

Remarque.

- Les différentes étapes du calcul ne dépendent pas de la donnée B

Conséquence 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si la résolution par Gauss du système $AX = B$ aboutit à un système sans variable libre (*i.e.* $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_n\}$) alors

- le système échelonné équivalent a n variables principales sur n équations différentes
- le système échelonné équivalent n'a jamais de ligne de coefficient globalement nulle indépendamment de B

$$\Longrightarrow AX = B \text{ est toujours compatible}$$

Interprétations du calcul précédent

Remarque.

- Les différentes étapes du calcul ne dépendent pas de la donnée B

Conséquence 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si la résolution par Gauss du système $AX = B$ aboutit à un système sans variable libre (*i.e.* $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_n\}$) alors

- le système échelonné équivalent a n variables principales sur n équations différentes
- le système échelonné équivalent n'a jamais de ligne de coefficient globalement nulle indépendamment de B

$$\Longrightarrow \operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n.$$

Interprétations du calcul précédent

Remarque.

- Les différentes étapes du calcul ne dépendent pas de la donnée B

Conséquence 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si la résolution par Gauss du système $AX = B$ aboutit à un système sans variable libre (*i.e.* Ker $A = \{\mathbf{0}_n\}$) alors

- le système échelonné équivalent a n variables principales sur n équations différentes
- le système échelonné équivalent n'a jamais de ligne de coefficient globalement nulle indépendamment de B

$$\Longrightarrow A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K}).$$

Interprétations du calcul précédent

Remarque.

- Les différentes étapes du calcul ne dépendent pas de la donnée B

Conséquence 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si la résolution par Gauss du système $AX = B$ aboutit à un système sans condition de compatibilité (*i.e.* $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$) alors

- le système échelonné équivalent n'a jamais de ligne de coefficient globalement nulle
- le système échelonné équivalent n'a jamais de variable libre

$$\Longrightarrow AX = \mathbf{0}_n \text{ a une unique solution}$$

Interprétations du calcul précédent

Remarque.

- Les différentes étapes du calcul ne dépendent pas de la donnée B

Conséquence 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si la résolution par Gauss du système $AX = B$ aboutit à un système sans condition de compatibilité (*i.e.* $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$) alors

- le système échelonné équivalent n'a jamais de ligne de coefficient globalement nulle
- le système échelonné équivalent n'a jamais de variable libre

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_n\}.$$

Interprétations du calcul précédent

Remarque.

- Les différentes étapes du calcul ne dépendent pas de la donnée B

Conséquence 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si la résolution par Gauss du système $AX = B$ aboutit à un système sans condition de compatibilité (*i.e.* $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$) alors

- le système échelonné équivalent n'a jamais de ligne de coefficient globalement nulle
- le système échelonné équivalent n'a jamais de variable libre

$$\Longrightarrow A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K}).$$

Interprétations du calcul précédent

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Proposition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$

ii) Ker $A = \{\mathbf{0}_n\}$

iii) Im $A = \mathbb{K}^n$

Cette proposition n'est vraie que pour des matrices carrées

Interprétations du calcul précédent

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$,

Proposition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\Phi \in \mathcal{G}\ell(\mathbb{K}^n)$

ii) Φ est injective

iii) Φ est surjective

Cette proposition n'est vraie que pour des applications linéaires entre espaces de même dimension

Interprétations du calcul précédent

Remarques.

- Les différentes étapes du calcul ne dépendent pas de la donnée B
- Pour calculer A^{-1} il suffit de calculer l'unique solution de

$$AX = \mathbf{e}$$

  pour tout élément $\mathbf{e}$ de la base canonique. On construit alors A^{-1} en rangeant dans l'ordre les solutions.

Algorithme de Gauss Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Préparation. On écrit la matrice et à son côté la matrice identité de même taille.

A. Inversibilité ?

- On applique l'agorithme de Gauss en opérant simultanément les combinaisons sur la matrice qui contenait l'identité.
- A la fin de Gauss la matrice qui contenait A est triangulaire supérieure
  - si tous les coeff. diag. sont non nuls A est inversible
  - sinon A n'est pas inversible

Algorithme de Gauss Jordan

B. Calcul de l'inverse.

- On réduit la matrice triangulaire supérieure en opérant simultanément les combinaisons sur la matrice qui contenait l'identité.
- Une fois la réduction finie, la matrice qui contenait A est maintenant la matrice identité et la matrice qui contenait la matrice identité contient A^{-1}.

Algorithme de Gauss

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -12 & -2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Préparation

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -12 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Algorithme de Gauss

Exemple

A. Inversibilité ?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -12 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Algorithme de Gauss

Exemple

A. Inversibilité ?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

Algorithme de Gauss

Exemple

A. Inversibilité ?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2$$

$$\Longrightarrow A \text{ est inversible}$$

Algorithme de Gauss

Exemple

A. Inversibilité ?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \ A \text{ est inversible}$$

B. Calcul de A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3/2$$

Algorithme de Gauss

Exemple

A. Inversibilité ?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\implies A \text{ est inversible}$$

B. Calcul de A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow (L_2 + 2L_1)/(-3)$$

Algorithme de Gauss

Exemple

A. Inversibilité ?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad A \text{ est inversible}$$

B. Calcul de A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

Algorithme de Gauss

Exemple

A. Inversibilité ?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \ A \text{ est inversible}$$

B. Calcul de A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Justification de l'algorithme de Gauss-Jordan

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Remarque.

Par construction, Si A est inversible, la matrice P construite lors de l'algorithme de Gauss Jordan satisfait :

$$AP = I_n$$

Question. A-t-on $PA = I_n$?

Justification de l'algorithme de Gauss-Jordan

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de lignes $(L_1, \ldots, L_n)$.

Proposition. Etant donnés $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, n\}$. La matrice $P[k_1, k_2]A$ est la matrice obtenue en permutant les lignes L_{k_1} et L_{k_2} de A.

Proposition. Etant donnés $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ la matrice $T^k_{\mathbf{a}}A$ est la matrice obtenue en remplaçant la ligne k de A par

$$\sum_{i=1}^{n} a_i L_i.$$

Justification de l'algorithme de Gauss Jordan

Corollaire. Notons $A^{(k)}$ et $P^{(k)}$ les matrices de gauche et de droite obtenues après k étapes de l'application de l'algorithme de Gauss-Jordan. On a :

$$P^{(k)}A = A^{(k)} \text{ quelque soit } k$$

Remarque. En particulier, si A est inversible, à la fin de l'algorithme de Gauss-Jordan, la matrice P construite satisfait

$$PA = I_n.$$