

CORRIGÉ
EXAMEN FINAL
(10/01/2022)

Problème 1 [5 points].

(a) [2 points] $\det(A) = 4 - 1 = 3 \neq 0$ donc A inversible. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(b) [1 point] $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $AA^t = A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq I_2$. A n'est donc pas orthogonale.

(c) [1 point] $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$. Valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

(d) [1 point] Pour $\lambda_1 = 1$,

$$Ax = \lambda_1 x \iff (A - \lambda_1 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff x_1 = -x_2$$

Solution générale $X = (-x_2, x_2)$.

Le système fondamentale de solutions $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Soit $x_2 = 1, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 3$,

$$Ax = \lambda_2 x \iff (A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff x_1 = x_2$$

Solution générale $X = (x_2, x_2)$.

Le système fondamentale de solutions $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Soit $x_2 = 1, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problème 2 [4 points].

(a) [2 points] $z^2 = 28 + 96i$ et $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i$.

(b) [2 points] Les racines sont : z_0 et $-z_0$ avec $z_0 = 1 + 3i$.

Problème 3 [5 points].

(a) [2 points] On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

A partir de $\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$ et $\frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$ nous avons que le seul point critique est quand $x = y = 0$.
Maintenant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2(1+x^2+y^2)^4 - (-2x)(1+x^2+y^2)^2(2x)}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2(1+x^2+y^2)^4 - (-2y)(1+x^2+y^2)^2(2y)}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-(-2x)(1+x^2+y^2)^2(2y)}{(1+x^2+y^2)^4}$$

Nous avons

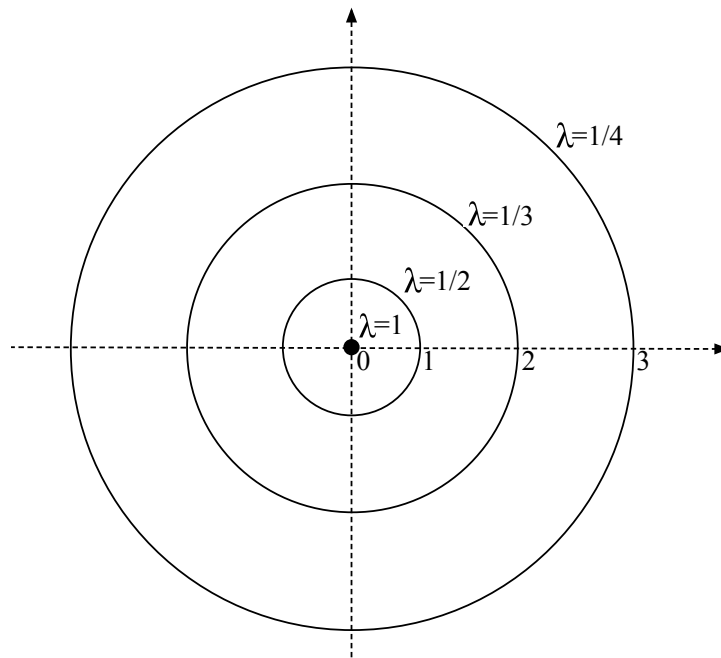
$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \right)^2 = (-2)(-2) - 0^2 = 4 > 0$$

Alors, $(0,0)$ est soit a minimum ou un maximum. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$ alors $(0,0)$ est un maximum.

(b) [1 point] Nous avons $f(0,0) = 1$ donc l'origine n'appartient pas à S_f .

(c) [1 point] $S_f \cap \{f(x,y) = \lambda\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{1+x^2+y^2} = \lambda \right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{\lambda} - 1\}$.

Comme $\lambda \leq 1$ alors $1 \leq \frac{1}{\lambda}$ et donc $0 \leq \frac{1}{\lambda} - 1$.



(d) [1 point] Oui, la représentation correspond bien à S_f , En effet, le seul maximum (local) est au point $(0,0, f(0,0)) = (0,0,1)$ et les courbes de niveau induisent la représentation.

Problème 4 [2 points].

[1 point] Nous avons $w = F(x,y)dx + G(x,y)dy = 3x^2ydx + x^3dy$. Alors, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial G}{\partial x}$ et w est donc bien exacte.

[1 point] On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3$. En intégrant la dernière égalité par rapport à y on obtient que $f = \int x^3 dy = x^3y + c(y)$. En dérivant cette égalité par rapport à x on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + c'(y)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y$ on en déduit que $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = K$ où K est une constante. D'où $f = x^3y + K$.

Problème 5 [2 points].

[1 point] C est l'arc paramétré $t \mapsto \left(\frac{t^2-4}{3}, t\right)$ t variant en croissant de -2 à 2 . Nous avons $y = t$ et donc $dy = dt$ et $x = \frac{t^2-4}{3}$ et donc $dx = \frac{2}{3}t dt$.

[1 point] On a

$$\begin{aligned} \int_C \left(x - \frac{y^2}{3}\right) dx + x dy &= \int_{-2}^2 \left(\frac{t^2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{t^2}{3}\right) \frac{2}{3} t dt + \left(\frac{t^2}{3} - \frac{4}{3}\right) dt \\ &= \int_{-2}^2 \left(-\frac{8}{9}t + \frac{t^2}{3} - \frac{4}{3}\right) dt \\ &= \left[-\frac{8}{18}t^2 + \frac{1}{9}t^3 - \frac{4}{3}t\right]_{-2}^2 \\ &= -\frac{32}{18} + \frac{8}{9} - \frac{8}{3} - \left(-\frac{32}{18} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{16}{9} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} - \frac{48}{3} = -\frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Problème 6 [3 points].

[1 point] L'équation homogène est $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = 0$ dont les solutions sont :

$$y(t) = C \exp^{\int -\frac{2}{t} dt} = C \exp^{-2 \ln t} = C \exp^{\ln t^{-2}} = Ct^{-2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

[1 point] On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = C(t)t^{-2}$$

On a $y'_0(t) + \frac{2}{t}y_0(t) = 3t^2$ alors $C(t)(-2)t^{-3} + t^{-2}C'(t) + \frac{2}{t}C(t)t^{-2} = 3t^2$ d'où $C'(t) = 3t^4$. En intégrant par rapport à t nous obtenons

$$C(t) = \int 3t^4 dt = \frac{3}{5}t^5 + K, K \in \mathbb{R}$$

En posant $K = 0$, nous avons $y_0(t) = \frac{3}{5}t^5t^{-2} = \frac{3}{5}t^3$.

[1 point] On a qu'une solution générale est

$$y(t) = \frac{3}{5}t^3 + Ct^{-2}$$

En utilisant que pour $t = 1$ on a $y = 3$ alors $3 = \frac{3}{5} + C$ obtenant $C = \frac{12}{5}$. Donc, la solution générale est

$$y(t) = \frac{3}{5}t^3 + \frac{12}{5}t^{-2}.$$