Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Licence 2 - HAC310X Mathématiques pour la Chimie

CORRIGÉ
EXAMEN FINAL-Session 1
(11/01/2024)

Problème 1 [4 points].

(a) [0,5 point] $det(A) = 0$ et donc A n'est pas inversible.

(b) [0,5 point] $AA^t = A^2 \neq Id$ donc A n'est pas orthogonale

(c) [1 point] $det(A - \lambda I) = 0 \iff (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)-1]-(1)[1-\lambda-1]+1]1-(3-\lambda)] = (1-\lambda)(3-3\lambda-\lambda+\lambda^2-1)+\lambda-1+1+1-3+\lambda = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2)+2\lambda-2 = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2)+2(\lambda-1) = (\lambda-1)(-\lambda^2+4\lambda-2+2) = (\lambda-1)(-\lambda^2+4\lambda) = (\lambda-1)\lambda(-\lambda+4)$. D'où, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 4$.

(d) [2 points] Pour $\lambda_1 = 0$,

$$Ax = \lambda_1 x \iff (A - \lambda_1 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{array}$$

On trouve la solution la solution générale $(-x_3, 0, x_3)$.

Le système fondamentale de solutions $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Soit $x_3 = 1, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 1$,

$$Ax = \lambda_2 x \iff (A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{llll} & x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array}$$

On trouve la solution la solution générale $(x_3, -x_3, x_3)$.

Le système fondamentale de solutions $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Soit $x_3 = 1, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_3 = 4$,

$$Ax = \lambda_3 x \iff (A - \lambda_3 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{llll} -3x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -3x_3 & = 0 \end{array}$$

On trouve la solution la solution générale $(x_3, 2, x_3)$.

Le système fondamentale de solutions $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Soit $x_3 = 1, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problème 2 [3 points].

(a) [0,5+0,5 points] $(z+1-4i)^2 = (1+i4)^2 = (1+i4)(1+i4) = 1+4i+4i-16 = -15+8i$. $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z}{\bar{z}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{8i}{-8i} \cdot \frac{8i}{8i} = \frac{-64}{64} = -1$.

(b) [0,5 point] Nous avons que $r = 8$ et $\theta = \pi/2$ car la partie reélle de z est nulle. Donc, $z = 8e^{i\pi/2}$.

(c) [1 point] Soit $w = x+iy$. Nous cherchons les solutions à $w^2 = (x+iy)^2 = i8$. Ce qui implique que $x^2 + i2xy - y^2 = i8$. Ceci nous ramène à $x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = 8$. En plus, on sait que $|w^2| = |i8|$ obtenant $x^2 + y^2 = \sqrt{8^2} = 8$. En combinant cette dernière égalité avec $x^2 - y^2 = 0$ on obtient $2x^2 = 8$ ou encore $x^2 = 4$ impliquant $x = \pm 2$ et on en déduit $y = \pm 2$. Comme $2xy = 8 > 0$ alors x et y ont le même signe.

Ainsi, les racines carrées sont $z_1 = 2 + i2$ et $z_2 = -2 - i2$.

On peut également trouver les racines en utilisant que

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

où r est le module de w, $k = 0, \ldots, n-1$ et

$$\theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{if } x > 0, \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{if } x < 0, \\ \pi/2 & \text{if } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ -\pi/2 & \text{if } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

Dans notre cas, on obtient $\theta = \pi/2$ et $r = 8$ et donc

$$z_1 = \sqrt{8}\,(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + i2$$

et

$$z_2 = \sqrt{8}\,(\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 - i2$$

(d) [0,5 points] En utilisant les racines carrées de z, on obtient : $z - 4(\sqrt{z} - 2) = i8 - 4(2+i2-2) = i8 - 4(i2) = 0$ et $z + 4(\sqrt{z} + 2) = i8 + 4(-2 - i2 + 2) = i8 - 4(i2) = 0$.

Problème 3 [4 points].

(a) [1 point] $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 1$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y.$$

A partir de $4x = 0$ et $6y = 0$ nous obtenons la solution $(0,0)$.

Maintenant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

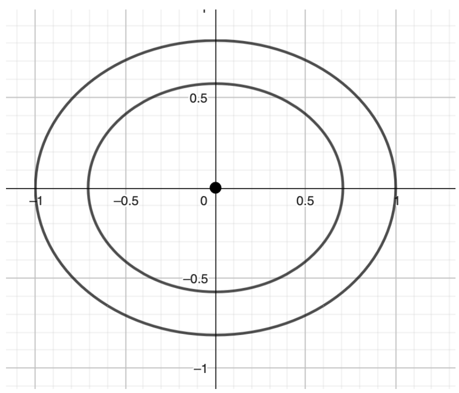
Nous avons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2 = (4)(6) - (0)^2 = 24 > 0$$

Alors, le point critique $(0,0)$ et soit un minimum ou bien un maximum. Or $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 > 0$, donc $(0,0)$ est un minimum.

(b) [0,5+0,5 points] Nous avons $f(0,0) = 1$ donc ni $(0,0,0)$ ni $(0,0,2)$ n'appartient à S_f.

(c) [1 point] Ensemble des ellipses car $2x^2 + 3y^2 = k - 1$ soit $\frac{2}{k-1}x^2 + \frac{3}{k-1}y^2 = 1$ ou encore $\frac{x^2}{\frac{2}{k-1}} + \frac{y^2}{\frac{3}{k-1}} = 1$, k un entier.



(d) [1 point] S_f correspond à la représentation (b) car les courbes de niveau induisent cette représentation et elle admet un minimum.

Problème 4 [4 points].

(a) [1 point] Le domaine de définition de w est $\mathbb{R}^2$ qui est bien étoilée.

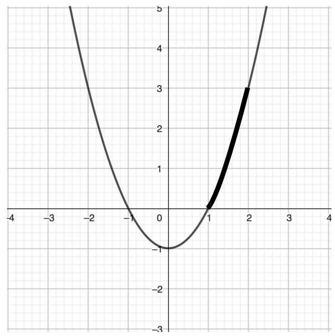
(b) [1+1 points] Nous avons $w = F(x,y)dx + G(x,y)dy = 4x^3y^2dx + 2x^4ydy$. Alors, $\frac{\partial F}{\partial y} = 8yx^3 = \frac{\partial G}{\partial x}$ et donc w est fermée. En plus, Donc, d'aprè le théorème de Poincaré, w est bien exacte.

Nous cherchons f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4y$. En intégrant la dernière égalité par rapport à y on obtient que $f = x^4y^2 + c(x)$. En dérivant cette égalité par rapport à x on obtient $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2 + c'(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2$ on en déduit que $c'(x) = 0$ et en intégrant par rapport à x les deux côtés de cette égalité nous obtenons $c(x) = K$ où K est une constante. D'où $f = x^4y^2 + K$.

(c) [1 point] Comme C est une courbe fermée et w est exacte alors, d'après un résultat du cours, $\int_C w = 0$ (on peut aussi calculer l'intégrale mais un peu plus long).

Problème 5 [2 points].

(a) [0,5 point]



(b) [1,5 points] Considérons la paramétrisation $x = t$ et $y = t^2 - 1$ avec $t \in [1;2]$. Alors $dx = dt$ et $dy = 2tdt$, ainsi

$$\begin{aligned}
\int_C (2x - \tfrac{y^2}{4})dx + 2xdy &= \int_1^2 2t - \tfrac{(t^2-1)^2}{4} dt + 2t2tdt \\
&= \int_1^2 \left(2t - \tfrac{t^4}{4} + \tfrac{2t^2}{4} - \tfrac{1}{4} + 4t^2\right) dt \\
&= \left[t^2 - \tfrac{t^5}{20} + \tfrac{t^3}{6} - \tfrac{t}{4} + \tfrac{4t^3}{3}\right]_1^2 \\
&= 4 + \tfrac{32}{20} + \tfrac{8}{6} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{32}{3} - (1 + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{3}) \\
&= 3 + \tfrac{31}{20} + \tfrac{7}{6} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{28}{3} \\
&= \tfrac{91}{20} - \tfrac{5}{20} + \tfrac{61}{6} \\
&= \tfrac{273 - 15 + 610}{60} \\
&= \tfrac{868}{60} = \tfrac{217}{15}.
\end{aligned}$$

Problème 6 [3 points].

[1 point] L'équation homogène est $y'(t) - 3y(t) = 0$ ou encore $y'(t) = 3y(t)$ dont les solutions sont :

$$y(t) = Ce^{\int 3dt} = Ce^{3t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

[1 point] On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = C(t)e^{3t}$$

On a $y_0'(t) - 3y_0(t) = e^{2t}$ alors $C(t)3e^{3t} + e^{3t}C'(t) - 3C(t)e^{3t} = e^{2t}$ d'où $C'(t) = e^{-t}$. En intégrant par rapport à t nous obtenons

$$C(t) = -e^{-t} + K, K \in \mathbb{R}$$

En posant $K = 0$, nous avons $y_0(t) = -e^{-t}e^{3t} = -e^{2t}$.

[1 point] On a qu'une solution générale est

$$y(t) = -e^{2t} + Ce^{3t}$$

En utilisant que pour $t = 1$ on a $y = 2$ alors $2 = -e^2 + Ce^3$ obtenant $C = \frac{2+e^2}{e^3}$. Donc, la solution générale est

$$y(t) = -e^{2t} + \frac{2 + e^2}{e^3} e^{3t}.$$