

EXAMEN FINAL-Session 1

(11/01/2024)

Durée : 2 h 00

Calculatrices, documents et portables interdits

(Justifier toutes les réponses)

Problème 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

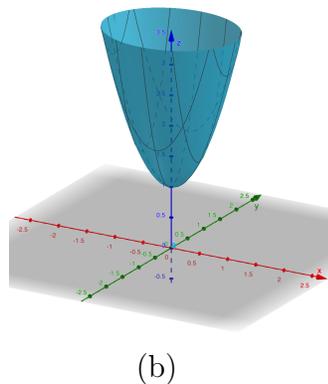
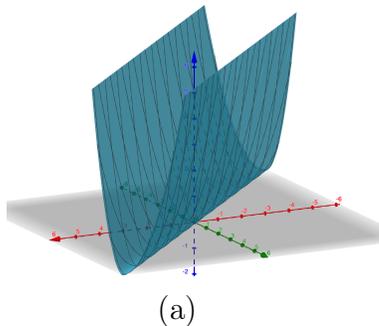
- (a) A est-elle inversible ? Si c'est le cas, calculer son inverse.
- (b) A est-elle orthogonale ?
- (c) Trouver les valeurs propres de A .
- (d) Déterminer les vecteurs propres correspondants, c'est-à-dire, les solutions de $Ax = \lambda x$ pour chaque valeur propre λ . Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes de A , sont-ils orthogonaux ?

Problème 2. Soit $z = 8i$.

- (a) Calculer $(z + 1 - 4i)^2$ et $\frac{z}{\bar{z}}$ où \bar{z} est le conjugué de z .
- (b) Exprimer z sous la forme exponentielle.
- (c) Trouver les racines carrées de z dans \mathbb{C} . Donnez les solutions en coordonnées polaires et en coordonnées rectangulaires.
- (d) Est-il vrai que $z - 4(\sqrt{z} - 2) = 0$? Qu'en est-il pour $z + 4(\sqrt{z} + 2) = 0$?

Problème 3. Soit $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 1$.

- (a) Déterminer les extrema locaux de $f(x, y)$ et leur nature.
- (b) La surface-graphe S_f contient-elle l'origine ? et le point $(0, 0, 2)$?
- (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et C_λ la courbe de niveau λ de $f(x, y)$. Donner l'équation de C_λ et tracer C_λ pour $\lambda = 1, 2, 3$ (*Rappel* : si $0 < b < a$ la courbe d'équation $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$ est l'ellipse de centre (x_0, y_0) de demi grand axe a et de demi petit axe b).
- (d) S_f correspond-t-elle à l'une des deux représentations ci-dessous ? Si ce n'est pas le cas, donner une représentation de S_f (justifiez votre réponse).



Problème 4. On considère la forme différentielle

$$w = 4x^3y^2dx + 2x^4ydy$$

- (a) Dans quel domaine w est-elle définie ? Ce domaine est-il étoilé ?
- (b) La forme w est-elle exacte ? Si c'est le cas chercher f tel que $df = w$.
- (c) Calculer $\int_C w$ où C est le cercle de centre 0 et rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct (justifiez votre réponse).

Problème 5. Soit C l'arc de la parabole d'équation $y = x^2 - 1$ joignant les points $(1, 0)$ et $(2, 3)$.

- (a) Tracer la courbe C .
- (b) Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C \left(2x - \frac{y^2}{4}\right)dx + 2xdy$$

le long du C parcouru une fois dans le sens des x croissants.

Problème 6. On souhaite résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) - 3y(t) = e^{2t} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

- (a) Trouver les solutions de l'équation homogène associée.
- (b) Trouver une solution de l'équation complète.
- (c) En déduire la solution de l'équation complète satisfaisant la condition initiale.