Chapitre B.3

Calcul matriciel

B.3.A) LES MATRICES.

Définitions

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition. Etant donnés $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$, on appelle matrice à p lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ contenant p lignes et n colonnes.

Exemples.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.
- Les matrices de coefficients, les matrices augmentées de systèmes sont des matrices.

Notation.

$$\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) = \{ \text{ matrices } M \text{ à } p \text{ lignes et } n \text{ colonnes } \}$$

Définitions

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition. Etant donnés $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$, on appelle matrice à p lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ contenant p lignes et n colonnes.

Exemples.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes.
- Les matrices de coefficients, les matrices augmentées de systèmes sont des matrices.

Notation.

$$\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) = \{ \text{ matrices } M \text{ à } p \text{ lignes et } n \text{ colonnes } \}$$

Définitions

Définition. Une matrice *carrée* est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes.

Notation.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \{ \text{ matrices carrées } M \text{ à } n \text{ lignes } \}$$

Vocabulaire.

Soit A une matrice a p lignes et n colonnes

- si $p = 1$ la matrice A est dite (vecteur) *ligne*
- si $n = 1$ la matrice A est dite (vecteur) *colonne*

Conventions

Notations. Soit A une matrice à p lignes et n colonnes.

- On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

ou

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

- On note $a_{i,j}$ le coefficient à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Lignes et colonnes

Soit A une matrice à p lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

A est constituée de n matrices colonnes $C_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad C_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix}$$

appelées colonnes de A

Applications

Notations. Soit A une matrice à p lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

A est constituée de p matrices lignes $L_i \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} \\ \dots \\ L_p &= \begin{pmatrix} a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

appelées lignes de A.

Opérations sur les matrices

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Définition. Etant donnés $(A, B) \in [\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note

- $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$
- $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$

On ne peut additionner que des matrices de même taille

Exemple

Exercice. Parmi les opérations suivantes, dire lesquelles sont bien définies et donner leur valeur le cas échéant

$$A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercice. Parmi les opérations suivantes, dire lesquelles sont bien définies et donner leur valeur le cas échéant

$$A = 2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), +, *)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Etant donnés $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et λ, μ dans $\mathbb{K}$

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + (0)_{\substack{1, \leqslant i \leqslant p, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = A$
- on peut construire une matrice $D \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ tq
$$A + D = 0_{p,n}.$$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \qquad 1 * A = A$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), +, *)$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Etant donnés $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et λ, μ dans $\mathbb{K}$

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + 0_{p,n} = A$
- on peut construire une matrice $D \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ tq
$$A + D = 0_{p,n}.$$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \qquad 1 * A = A$

Décomposition d'une matrice

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Définition. Pour tout $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ et $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ on note $E_{i_0,j_0} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de coefficients donnés par :

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j = j_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple. Pour $n = p = 2$

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Décomposition d'une matrice

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Définition. Pour tout $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ et $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ on note $E_{i_0, j_0} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de coefficients donnés par :

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j = j_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple. Pour $n = p = 2$

Avec ces notations :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + 3E_{1,2} - 2E_{2,1} + E_{2,2}.$$

Décomposition d'une matrice

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Définition. Pour tout $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ et $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ on note $E_{i_0,j_0} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de coefficients donnés par :

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j = j_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple. Pour $n = p = 2$

Avec ces notations :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{2,1}E_{2,1} + a_{2,2}E_{2,2}.$$

B.3.b) Produit de matrices.

Définition du produit matriciel

Définition. Soit $(p, n, q) \in [\mathbb{N}^*]^3$ et deux matrices

$$A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \quad B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

On note $C = AB \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont donnés pas :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \quad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, p\} \times \{1, \ldots, q\}.$$

Avant de multiplier des matrices, il faut vérifier que le produit est compatible :

$$\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

En pratique

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \Longrightarrow AB \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$$

En pratique

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

En pratique

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ \boxed{-2} & -1 & 0 & 4 \\ \boxed{0} & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{4} \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\boxed{-1} * \boxed{1} \quad + \quad \boxed{2} * \boxed{-2} \quad + \quad \boxed{4} * \boxed{0} \quad = \quad \boxed{-5}$$

En pratique

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ \boxed{-2} & -1 & 0 & 4 \\ \boxed{0} & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{2} & \boxed{4} \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{-5} & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\boxed{-1} * \boxed{1} \quad + \quad \boxed{2} * \boxed{-2} \quad + \quad \boxed{4} * \boxed{0} \quad = \quad \boxed{-5}$$

En pratique

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$2 * -2 \quad + \quad -5 * 0 \quad + \quad 7 * -2 \quad = \quad -18$$

En pratique

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{-2} & 1 \\ -2 & -1 & \boxed{0} & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{-2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{-5} & \boxed{7} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & * & * & * \\ * & * & \boxed{-18} & * \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2} * \boxed{-2} \quad + \quad \boxed{-5} * \boxed{0} \quad + \quad \boxed{7} * \boxed{-2} \quad = \quad \boxed{-18}$$

En pratique

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & 19 \\ 12 & 16 & -18 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

En pratique

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & 19 \\ 12 & 16 & -18 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & 19 \\ 12 & 16 & -18 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriétés du produit matriciel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p, q, r) \in [\mathbb{N}^*]^4$

Proposition. Soit A, B, C des matrices et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in [\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})]^2$
$$A(B + C) = AB + AC$$
- si $(A, B) \in [\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})]^2$ et $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$
$$(A + B)C = AC + BC$$
- si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$
$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$
- si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$
$$A(BC) = (AB)C$$

Mises en garde

Le produit matriciel n'est pas commutatif !

Contre-exemples.

- $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$ alors

  AB existe $\quad ((A, B) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K}))$

  BA n'existe pas $\quad ((B, A) \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}))$

- $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ alors

  $AB \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K}) \quad ((A, B) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K}))$

  $BA \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K}) \quad ((B, A) \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}))$

Mises en garde

Le produit matriciel n'est pas commutatif !

Contre-exemples.

- on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  alors

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice particulière

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Etant donnée $n \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Cette matrice s'appelle la matrice identité.

Proposition. Etant donnée $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ on a :

$$AI_n = A \qquad\qquad I_pA = A.$$

B.3.c) Matrices et systèmes linéaires.

Produit matrice ligne/matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & 19 \end{pmatrix}$$

Produit matrice ligne/matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & 19 \end{pmatrix} \quad = \quad & (-1) * \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ & + 2 * \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ & + 4 * \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Interprétation du produit matrice ligne/matrice

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $(L_1, \ldots, L_p)$ ses lignes.

$$\text{Pour tout } Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}$$

on a

$$YA = y_1 L_1 + \ldots + y_p L_p.$$

Interprétation du produit matrice ligne/matrice

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $(L_1, \ldots, L_p)$ ses lignes.

$$\text{Pour tout } Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}$$

on a

$$YA = \sum_{i=1}^{p} y_i L_i.$$

Produit matrice/matrice colonne

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Produit matrice/matrice colonne

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) * \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Interprétation du produit matrice/matrice colonne

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $(C_1, \dots, C_n)$ ses colonnes.

$$\text{Pour tout } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$$

on a

$$AX = x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n.$$

Interprétation du produit matrice/matrice colonne

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $(C_1, \ldots, C_n)$ ses colonnes.

$$\text{Pour tout } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$$

on a

$$AX = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j.$$

Réecritures du produit matrice/matrice colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ (B, X) \in [\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})]^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

alors

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{lrcl} & "x_1 + x_2 + 2x_3 & = & b_1" \\ \text{et} & "2x_1 - 2x_2 + 5x_3 & = & b_2" \\ \text{et} & "x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & b_3" \end{array}$$

Réecritures du produit matrice/matrice colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ (B, X) \in [\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})]^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

alors

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 & = & b_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & b_3 \end{array} \right.$$

Equivalence

Proposition. Etant donné un système $\mathcal{S}$ à n inconnues

- de matrice augmentée $\tilde{A}$ dont on note B la dernière colonne
- de matrice de coefficients A.

$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est solution du système $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

satisfait

$$AX = B.$$