HAI406 : Algèbre linéaire et calcul matriciel

PARTIE B

Algèbre linéaire et Géométrie

Chapitre B.2

Systèmes linéaires

B.2.a) Notion de système linéaire.

Recherche d'intersection d'espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$
$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 1. On cherche une écriture paramétrique de P.

- O est un point de P
- le plan directeur de P est dirigé par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Recherche d'intersection d'espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$
$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 1. On cherche une écriture paramétrique de P.

$$P = \left\{ T_{t\mathbf{u}+s\mathbf{v}}(O)\,, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Recherche d'intersection d'espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$
$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 1. On cherche une écriture paramétrique de P.

$$P = \left\{(-3t + s, 2t, 2s)\,, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Recherche d’intersection d’espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$
$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l’intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 2. On cherche un point de $P \cap P_a$

$$M(x, y, z) \in P \cap P_a \Leftrightarrow \text{"}(M \in P_a) \text{ et } (M \in P)\text{"}$$

Recherche d'intersection d'espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$

$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 2. On cherche un point de $P \cap P_a$

$$M(x, y, z) \in P \cap P_a \Leftrightarrow$$

$$\text{"}(\exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, x = -3t + s, y = 2t, z = 2s)$$

$$\text{et } (2x + (1 + a)y - z = 5)\text{"}$$

Recherche d'intersection d'espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$

$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 2. On cherche un point de $P \cap P_a$

$$M(x, y, z) \in P \cap P_a \Leftrightarrow$$

$$\text{"}(\exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, x = -3t + s, y = 2t, z = 2s)$$

$$\text{et } (2a - 4)t = 5\text{"}$$

Recherche d'intersection d'espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$
$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 3. On a donc 2 cas

$a = 2$ Alors $(2a - 4)t = 5$ n'est pas possible

$a \neq 2$ Alors $t = 5/(2a - 4)$

Recherche d’intersection d’espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$

$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l’intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 3. On a donc 2 cas

$a = 2$ $P \cap P_a = \emptyset$

$a \neq 2$ Alors $t = 5/(2a - 4)$ et

$$P \cap P_a = \left\{(-3t + s, 2t, 2s)\,, \quad s \in \mathbb{R}\,, t = \frac{5}{2a-4}\right\}$$

Recherche d'intersection d'espaces affines

Exercice. Soit

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$$

$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'intersection $P \cap P_a$.

Réponse. par un méthode élémentaire.

Etape 3. On a donc 2 cas

$a = 2$ $P \cap P_a = \emptyset$

$a \neq 2$ Alors $t = 5/(2a - 4)$ et

$$P \cap P_a = \left\{ \left(-\frac{15}{2a-4} + s, \frac{5}{a-2}, 2s \right) , \quad s \in \mathbb{R} \right\}$$

On reconnaît l'équation d'une droite.

Recherche d'intersection d'espaces affines

Remarque : On a deux écritures de $P \cap P_a$

- Ecriture en compréhension :

$$P \cap P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0 \\ \text{ et } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

- Ecriture paramétrique :

$a = 2$: $P \cap P_a = \emptyset$

$a \neq 2$: $P \cap P_a = \left\{ \left(-\dfrac{15}{2a-4} + s, \dfrac{5}{a-2}, 2s \right), \quad s \in \mathbb{R} \right\}$

Objectif. Décrire une méthode (robuste) pour passer de l'un à l'autre.

Recherche d'intersection d'espaces affines

Remarque : On a deux écritures de $P \cap P_a$

- Ecriture en compréhension :

$$P \cap P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0 \\ \text{et } 2x + (1 + a)y - z = 5\}$$

- Ecriture paramétrique :

$a = 2$: $P \cap P_a = \emptyset$

$a \neq 2$: $P \cap P_a = \left\{ \left(-\frac{15}{2a - 4} + s, \frac{5}{a - 2}, 2s \right), \quad s \in \mathbb{R} \right\}$

Exemple. Quelle méthode pour déterminer la nature de

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + 3y - z = 0 \text{ et } x + y - t = 4\}?$$

Systèmes linéaires

Définition. On dit d'une équation d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ qu'elle est linéaire, s'il existe $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que cette équation s'écrit

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

Exemple. Parmi les équations suivantes, d'inconnues (x, y, z, t), lesquelles sont linéaires :

i) $x + y + z + t = 4$, ii) $xy = -1$, iii) $\exp(2x) + y = 0$.

Définition. On appelle système linéaire un ensemble (fini) d'équations linéaires.

Exemple. On écrit les équations dans une accolade :

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 4 \\ x - y + z - t &= 0 \end{cases}$$

Systèmes linéaires

Définition. On dit d'une équation d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n)$ qu'elle est linéaire, s'il existe $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que cette équation s'écrit

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b.$$

Exemple. Parmi les équations suivantes, d'inconnues (x, y, z, t), lesquelles sont linéaires :

i) $x + y + z + t = 4$, ii) $xy = -1$, iii) $\exp(2x) + y = 0$.

Définition. On appelle système linéaire un ensemble (fini) d'équations linéaires.

Exemple. On écrit les équations dans une accolade :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Résolution d'un système

Définition.

- On appelle solution tout n-uplet tel qu'en attribuant aux inconnues du système les valeurs de ce n-uplet, les différentes équations du système sont satisfaites.
- Résoudre un système c'est donner une représentation paramétrique de son ensemble de solution.

Exemple. (0,0,2,2) est une solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 4 \\ x-y+z-t & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de ce système est

$$\{(2-\alpha, 2-\beta, \alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Résolution d'un système

Définition.

- On appelle solution tout n-uplet tel qu'en attribuant aux inconnues du système les valeurs de ce n-uplet, les différentes équations du système sont satisfaites.
- Résoudre un système c'est donner une représentation paramétrique de son ensemble de solution.

Exemple. $x = 0, y = 0, z = 2, t = 2$ est une solution de

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 4 \\ x - y + z - t &= 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est

$$\{x = 2 - \alpha,\ y = 2 - \beta,\ z = \alpha,\ t = \beta\,, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Résolution d'un système

Définition.

- On appelle solution tout n-uplet tel qu'en attribuant aux inconnues du système les valeurs de ce n-uplet, les différentes équations du système sont satisfaites.
- Résoudre un système c'est donner une représentation paramétrique de son ensemble de solution.

Définition. Si un système linéaire n'admet pas de solution, on dit qu'il est incompatible.

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice des coefficients

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 4z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 7z & = & 12 \end{array}\right.$$

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice des coefficients

$$\begin{cases} 1 * x & + & 2 * y & + & 4 * z & = & 5 \\ 2 * x & + & (-5) * y & + & 7 * z & = & 12 \end{cases}$$

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice des coefficients

$$\begin{cases} 1 * x & + & 2 * y & + & 4 * z & = & 5 \\ 2 * x & + & (-5) * y & + & 7 * z & = & 12 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 1*x & + & 2*y & + & \boxed{4*z} & = & 5 \\ 2*x & + & (-5)*y & + & 7*z & = & 12 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} * & * & \boxed{4} \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice des coefficients

$$\begin{cases} 1 * x + 2 * y + \boxed{4 * z} = 5 \\ 2 * x + \boxed{(-5) * y} + 7 * z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & \boxed{4} \\ * & \boxed{-5} & * \end{pmatrix}$$

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice des coefficients

$$\begin{cases} 1 * x & + & 2 * y & + & 4 * z & = & 5 \\ 2 * x & + & (-5) * y & + & 7 * z & = & 12 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice des coefficients

Définition. Soit un système linéaire d'inconnues $(x_1, \dots, x_n)$ formé des d équations :

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, d$$

On appelle matrice des coefficients, le tableau à d lignes et n colonnes et dont le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne et $a_{i,j}$.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y - 4z + 5t = -10 \\ x + 7z + 10t = -2 \end{array} \right.$$

Notation. $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n}$

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice des coefficients

Définition. Soit un système linéaire d'inconnues $(x_1, \ldots, x_n)$ formé des d équations :

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i \quad \text{pour } i = 1, \ldots, d$$

On appelle matrice des coefficients, le tableau à d lignes et n colonnes et dont le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne et $a_{i,j}$.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Notation. $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n}$

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice augmentée

Définition. On contruit la matrice augmentée d'un système en adjoignant à la matrice des coefficients les données des équations en dernière colonne.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y - 4z + 5t = -10 \\ x + 7z + 10t = -2 \end{array} \right.$$

Exercice.

Soit la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Combien le système a-t-il d'inconnues ?
- Combien a-t-il d'équations ?
- Construire un système dont c'est la matrice augmentée.

Différentes écritures d'un système linéaire

Matrice augmentée

Définition. On contruit la matrice augmentée d'un système en adjoignant à la matrice des coefficients les données des équations en dernière colonne.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 7 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice.

Soit la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Combien le système a-t-il d'inconnues ?
- Combien a-t-il d'équations ?
- Construire un système dont c'est la matrice augmentée.

B.2.b) Exemples de résolutions de système.

Un premier exemple simple

On veut résoudre le système $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{aligned} 2x + 4y - z &= 0 \\ y + z &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \right.$$

On procède par substitution

Un premier exemple simple

On veut résoudre le système $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x + 4y - 0 = 0 \\ y + 0 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

On procède par substitution

Un premier exemple simple

On veut résoudre le système $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x + 4y &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \right.$$

On procède par substitution

Un premier exemple simple

On veut résoudre le système $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4 * 1 & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

On procède par substitution

Un premier exemple simple

On veut résoudre le système $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

On procède par substitution

Un premier exemple simple

On veut résoudre le système $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

On procède par substitution et on obtient l'ensemble solution :

$$\{(-2, 1, 0)\}$$

Systèmes triangulaires supérieures

Définition. On dit qu'un système linéaire est carré s'il a autant d'équations que d'inconnues.

Définition. On dit qu'un système linéaire carré à n équations est triangulaire supérieur si sa matrice de coefficients $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, satisfait :

$$a_{i,j} = 0\,, \quad \forall\, 1 \leq j < i \leq n\,.$$

Exercice. Quelles matrices correspondent à des systèmes triangulaires supérieurs :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Systèmes triangulaires supérieures

Résolution

Théorème. Soit $(\mathcal{S})$ un système triangulaire supérieur à n équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & \dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & a_{2,2}x_2+ & \dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & \dots & & \\ & & & a_{n,n}x_n & = & b_n. \end{array}\right.$$

Si on a : $\qquad a_{i,i} \neq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\},$

ce système admet une unique solution donnée par la formule de récurrence descendante :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k}x_j\right) \quad \forall\, i \in \{n, \dots, 1\}.$$

qui n'est pas nécessaire de connaitre par coeur.

Exemple

On considère le système de paramètres $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & ay & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & az & - & t & = & -1 \\ & & & & & & at & = & b \end{array}\right.$$

Exemple

$a = 1$, b quelconque

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & -b \\ & & y & + & z & = & 1-2b \\ & & & & z & = & -1+b \\ & & & & t & = & b \end{array}\right.$$

Exemple

$a = 1$, b quelconque

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & -b-(-1+b) \\ & & y & = & 1-2b-(-1+b) \\ & & z & = & -1+b \\ & & t & = & b \end{array}\right.$$

Exemple

$a = 1$, b quelconque

$$\left\{\begin{array}{ccccl} x & + & y & = & 1-2b \\ & & y & = & 2-3b \\ & & z & = & -1+b \\ & & t & = & b \end{array}\right.$$

Exemple

$a = 1$, b quelconque

$$\begin{cases} x &= -1+b \\ y &= 2-3b \\ z &= -1+b \\ t &= b \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est :

$$\{(-1+b\,,2-3b\,,\;-1+b\,,b)\}\,.$$

Exemple

On considère le système de paramètres $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & ay & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & az & - & t & = & -1 \\ & & & & & & at & = & b \end{array}\right.$$

Exemple

$a = 0$, $b = 1$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & 0 & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & 0 & - & t & = & -1 \\ & & & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Exemple

$a = 0$, $b = 1$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & 0 & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & 0 & - & t & = & -1 \\ & & & & & & 0 & = & b \end{array}\right.$$

La troisième équation est impossible !
Le système est incompatible.
L'ensemble solution est vide.

Exemple

On considère le système de paramètres $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & ay & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & az & - & t & = & -1 \\ & & & & & & at & = & b \end{array}\right.$$

Exemple

$a = 0$, $b = 0$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & & - & t & = & -1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

La troisième équation est automatique !
On l'enlève du système.

Exemple

$a = 0$, $b = 0$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & & & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exemple

$a = 0$, $b = 0$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & z & + & t & = & -y \\ & & z & + & 2t & = & 1 \\ & & & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

On peut voir le nouveau système comme un système triangulaire supérieur en l'inconnue (x, z, t) avec un paramètre : y.

Exemple

$a = 0$, $b = 0$

$$\begin{cases} x + z = -y - 1 \\ \quad\;\; z = -1 \\ \quad\;\; t = 1 \end{cases}$$

On peut voir le nouveau système comme un système triangulaire supérieur en l'inconnue (x, z, t) avec un paramètre : y.

Exemple

$a = 0$, $b = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -y \\ z & = & -1 \\ t & = & 1 \end{array}\right.$$

On peut voir le nouveau système comme un système triangulaire supérieur en l'inconnue (x, z, t) avec un paramètre : y.

L'ensemble des solutions est :

$$\{(-y, y, -1, 1)\,, \quad y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Application des variables principales

Définition. Etant donné un système à p équations et n inconnues et de matrice de coefficients A. On appelle *application des variables principales* l'application $\varphi : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, p+n\}$ telle que,
pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$:

$$\varphi(i) = \begin{cases} \text{le plus petit indice } j \text{ tel que } a_{i,j} \neq 0 \text{ s'il en existe} \\ i + n \text{ s'il n'y a pas de coefficient } a_{i,j} \text{ non nul} \end{cases}$$

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 2 \\ & 2 & \longmapsto & 1 \\ & 3 & \longmapsto & 7 \end{array}$$

Systèmes échelonnés

Définition. Etant donné un système à p équations et n inconnues. Si l'application des variables principales associée est strictement croissante :

- On dit que le système est échelonné,
- On appelle variables principales ou variables liées les variables associées aux colonnes dans l'image de φ,
- On appelle variables secondaires ou variables libres les autres variables.

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 0 \\ x+z+t &=& -1 \\ t &=& 2 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x+z+t & = & -1 \\ t & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Application des variables principales.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & 2 & \longmapsto & 1 \\ & 3 & \longmapsto & 4 \end{array}$$

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x+z+t & = & -1 \\ t & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Application des variables principales.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & 2 & \longmapsto & 1 \\ & 3 & \longmapsto & 4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ce système n'est pas échelonné.

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t &=& 1 \\ 2z+t &=& -1 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 1 \\ 2z+t & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application des variables principales.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & 2 & \longmapsto & 3 \\ & 3 & \longmapsto & 7 \end{array}$$

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 1 \\ 2z+t & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application des variables principales.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & 2 & \longmapsto & 3 \\ & 3 & \longmapsto & 7 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ce système est échelonné.

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z + t & = & 1 \\ 2z + t & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application des variables principales.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & 2 & \longmapsto & 3 \\ & 3 & \longmapsto & 7 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ce système est échelonné.

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 1 \\ 2z+t & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application des variables principales.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & 2 & \longmapsto & 3 \\ & 3 & \longmapsto & 7 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ce système est échelonné.

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z+t & = & 1 \\ 2z+t & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application des variables principales.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & 2 & \longmapsto & 3 \\ & 3 & \longmapsto & 7 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ce système est échelonné.

Systèmes échelonnés

Exemples

Système // Matrices des coefficients

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + z & = & 1 - y - t \\ 2z & = & -1 - t \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application des variables principales.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,...,6,7\} \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & 2 & \longmapsto & 3 \\ & 3 & \longmapsto & 7 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Ce système est échelonné.

Systèmes échelonnés

Résolution

Méthode. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions à calculer.

Etape 1. On calcule la matrice des coefficients et l'application des variables principales

Etape 2. On vérifie que le système est échelonné et qu'il est compatible.

- si le système n'est pas échelonné, on doit l'échelonner (voir plus loin)
- si le système est échelonné on vérifie dans la matrice augmentée que les données correspondant à des lignes de coefficients nuls sont nulles. Si ce n'est pas le cas $\mathcal{S} = \emptyset$.

$\Rightarrow$ Si le système est échelonné et compatible, on continue.

Systèmes échelonnés
Résolution

Méthode.

Etape 3. On résoud le système triangulaire en les variables principales avec les variables libres comme paramètres.

Etape 4. L'ensemble $\mathcal{S}$ est l'ensemble des n-uplets où les variables principales sont données en fonction des variables libres par les formules trouvées à l'étape 4. Les variables libres sont des paramètres chacun décrivant $\mathbb{R}$.

Exemple

On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z + t & = & 1 \\ 2z + t & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exemple

On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + z & = & 1 - y - t \\ 2z & = & -1 - t \end{array}\right.$$

Exemple

On considère le système :

$$\begin{cases} x & = & -\dfrac{y}{2} + \dfrac{3-t}{4} \\ z & = & -\dfrac{1+t}{2} \end{cases}$$

On a donc l'ensemble solution

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{y}{2} + \frac{3-t}{4}, y, -\frac{1+t}{2}, t \right), \quad (y,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

B.2.c) Résolution des systèmes linéaires :

Cas général

Opération sur les systèmes linéaires

Définition. Deux systèmes déquations (Es) et $(\tilde{E}s)$ sont dit équivalents si les ensembles de solutions associés sont égaux.

Exemple. Soient les deux équations d'inconnues $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcll} x & = & 1 & (E) \\ x^3 - x^2 + x - 1 & = & 0 & (\tilde{E}) \end{array}$$

En effet leurs ensembles solutions $\mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ satisfont

$$\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}} = \{1\}.$$

Opérations sur les systèmes linéaires

Renumérotation

Proposition. Soient E_1 et E_2 deux équations à n inconnues. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ réalise E_1 et E_2 alors $(x_1, \dots, x_n)$ réalise E_2 et E_1.

Application. En changeant l'ordre des équations d'un système, on obtient un système équivalent.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-z & = & 10 \\ 3x-2y+10z & = & -5 \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-z & = & 10 \\ x+y+z & = & 0 \\ 3x-2y+10z & = & -5 \end{array}\right.$$

Opérations sur les systèmes linéaires

Renumérotation

Proposition. Soient E_1 et E_2 deux équations à n inconnues. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ réalise E_1 et E_2 alors $(x_1, \ldots, x_n)$ réalise E_2 et E_1.

Application. En changeant l'ordre des équations d'un système, on obtient un système équivalent.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-z & = & 10 \\ 3x-2y+10z & = & -5 \\ x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 3x-2y+10z & = & -5 \\ 2x+3y-z & = & 10 \end{array}\right.$$

Opérations sur les systèmes linéaires

Renumérotation

Proposition. Soient E_1 et E_2 deux équations à n inconnues. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ réalise E_1 et E_2 alors $(x_1, \dots, x_n)$ réalise E_2 et E_1.

Application. En changeant l'ordre des équations d'un système, on obtient un système équivalent.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-z &=& 10 \\ 3x-2y+10z &=& -5 \\ x+y+z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ 2x+3y-z &=& 10 \\ 3x-2y+10z &=& -5 \end{array}\right.$$

Opérations sur un système linéaire

Combinaison

Définition. Etant données deux équations E_1 et E_2, on note $E_1 + E_2$ l'équation obtenue en ajoutant les membres de gauche et les membres de droite de E_1 et E_2

Exemple.

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & x + x^2 + 2y & = & -10 \\ (E_2) & 10x + 3y - z & = & 36 \end{array}$$

$$\Longrightarrow x^2 + 11x + 5y - z = 26 \qquad (E)(= (E_1 + E_2)).$$

Opérations sur un système linéaire

Combinaison

Définition. Etant données deux équations E_1 et E_2, et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ on note $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$ l'équation obtenue en effectuant les combinaisons respectivement des membres de gauche et des membres de droite de E_1 et E_2

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & x + x^2 + 2y & = & -10 \\ (E_2) & 10x + 3y - z & = & 36 \end{array}$$

$$\Longrightarrow 3x^2 - 17x + 2z = -102 \qquad (E)(= (3E_1 + (-2)E_2)).$$

Opérations sur un système linéaire

Combinaison

Définition. Etant données p équations $E_1, \dots, E_p$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ on note $\lambda_1 E_1 + ... + \lambda_p E_p$ l'équation obtenue en effectuant les combinaisons respectivement des membres de gauche et des membres de droite des équations $E_1, \dots, E_p$.

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & x - y + 2z & = & -10 \\ (E_2) & x + y & = & 36 \\ (E_3) & 2x + z & = & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcll} 2y - 2z & = & 46 & (E_2 - E_1) \\ 2y - 3z & = & 20 & (E_3 - 2E_1) \end{array}$$

Opérations sur un système linéaire

Combinaison

Proposition. Si un n-uplet réalise simultanément les équations $E_1, \ldots, E_p$ alors, pour tous coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ il réalise également $\lambda_1 E_1 + \ldots + \lambda_p E_p$.

Application. Si un système linéaire est formé des équations $E_1, \ldots, E_p$ alors,

- pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,
- pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $\lambda_i \neq 0$,

on obtient un système équivalent en remplaçant l'équation E_i (et uniquement cette équation) par

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_p E_p.$$

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rcll} x - y + 2z & = & -10 & (E_1) \\ x + y & = & 36 & (E_2) \\ x + 2z & = & 0 & (E_3) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rclr} x - y + 2z & = & -10 & (E_1) \\ -2z & = & 26 & (E_2 + E_1 - 2E_3) \\ x + 2z & = & 0 & (E_3) \end{array}\right.$$

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rcll} x - y + 2z & = & -10 & (E_1) \\ x + y & = & 36 & (E_2) \\ x + 2z & = & 0 & (E_3) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x - y + 2z & = & -10 & (E_1') \\ -2z & = & 26 & (E_2') \\ x + 2z & = & 0 & (E_3') \end{array}\right.$$

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rcll} x-y+2z & = & -10 & (E_1') \\ x+y & = & 36 & (E_2'-E_1'+2E_3') \\ x+2z & = & 0 & (E_3') \end{array}\right.$$

$$\Leftarrow \left\{\begin{array}{rcll} x-y+2z & = & -10 & (E_1') \\ -2z & = & 26 & (E_2') \\ x+2z & = & 0 & (E_3') \end{array}\right.$$

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rcll} x-y+2z & = & -10 & (E_1) \\ x+y & = & 36 & (E_2) \\ x+2z & = & 0 & (E_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x-y+2z & = & -10 & (E'_1) \\ -2z & = & 26 & (E'_2) \\ x+2z & = & 0 & (E'_3) \end{array}\right.$$

Application

On veut résoudre le système $(\mathcal{E})$ suivant

$$(\mathcal{E})\left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+t & = & 0 & (E_1) \\ 2x+3y+2z-5t & = & 0 & (E_2) \\ x-y+z-t & = & 8 & (E_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclr} x+y+z+t & = & 0 & (E_1) \\ y-7t & = & 0 & (E_2-2E_1) \\ -2y-2t & = & 8 & (E_3-E_1) \end{array}\right.$$

Application

On veut résoudre le système $(\mathcal{E})$

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x+y+z+t & = & 0 & (E_1) \\ y-7t & = & 0 & (E_2) \\ -2y-2t & = & 8 & (E_3) \end{array} \right.$$

Application

On veut résoudre le système $(\mathcal{E})$

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x+y+z+t & = & 0 & (E_1) \\ y-7t & = & 0 & (E_2) \\ -2y-2t & = & 8 & (E_3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclr} x+y+z+t & = & 0 & (E_1) \\ y-7t & = & 0 & (E_2) \\ -16t & = & 8 & (E_3+2E_2) \end{array} \right.$$

Application

On veut résoudre le système $(\mathcal{E})$

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (\tilde{\mathcal{E}})$$

$$(\tilde{\mathcal{E}}) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ y - 7t & = & 0 \\ -16t & = & 8 \end{array} \right.$$

$(\tilde{\mathcal{E}})$ est échelonné donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(4 - z, -\frac{7}{2}, z, -\frac{1}{2} \right), \quad z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pivot de Gauss

Algorithme

Etape 0 : Effectuer les permutations nécessaires sur les équations pour que le coefficient $a_{1,1}$ soit non-nul.

Pour i_0 allant de 1 à $p-1$

Etape i_0 :

- Touver le premier coefficitent non-nul de E_{i_0} (noté a_{i_0,j_0})
- Pour i allant de i_0+1 à p remplacer l'équation E_i par l'équation
$$E_i - \frac{a_{i,j}}{a_{i_0,j_0}} E_{i_0}.$$
- Effectuer (si nécessaire) les permutations sur les nouvelles équations $E_{i_0+1}, \ldots, E_p$ pour que l'application des variables principales associée au nouveau système soit croissante.

Pivot de Gauss

Exemple d'application

On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 3y + 4z & = & 2 \\ x - 3y + z & = & -1 \\ 3x - y + 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Pivot de Gauss

Exemple d'application

On écrit la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss

Exemple d'application

Etape 0

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss

Exemple d'application

Etape 0

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} E_1 \leftarrow E_1 \\ E_2 \leftarrow E_2 - E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1 \end{array}$$

Pivot de Gauss

Exemple d'application

Etape 0

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss

Exemple d'application

Etape 0

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : inutile

Pivot de Gausse : remontée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} E_1 \leftarrow E_1 \\ E_2 \leftarrow E_2 \\ E_3 \leftarrow -E_3/3 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gausse : remontée

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gausse : remontée

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_1 \leftarrow (E_1 - 4E/3) \\ E_2 \leftarrow (E_2 + 10E_3)/8 \\ E_3 \leftarrow E_3 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gausse : remontée

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gausse : remontée

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_1 \leftarrow E_1 + 3E_2 \\ E_2 \leftarrow E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gausse : remontée

Etape 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Système échelonné réduit

Définition. Etant donné un système échelonné à p équations et n inconnues de matrice de coefficients A et d'application des variables principales φ. On dit que le système est échelonné réduit si, pour tout $i_0 \in \{2, .., p\}$ tel que $\varphi(i_0) \leq n$ on a

$$a_{i,\varphi(i_0)} = 0 \quad \forall\, i < i_0.$$

Exemples. Quelles matrices augmentées correspondent à des systèmes échelonnés réduits :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$