1 Algèbre linéaire

1.1 Espace vectoriel

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un espace vectoriel est un ensemble muni de lois ayant certaines propriétés qui permettent de donner un sens à

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

où les λ_i sont des scalaires ($\in \mathbb{K}$) et x_i sont des vecteurs.

1.1.1 Définitions

Définition 1. *(Loi de composition interne) Soit E un ensemble. Une loi de composition interne sur E est une application*

$$\begin{aligned} \top : E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto x \top y. \end{aligned}$$

Exemple 1. *Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ sont des lois internes.*

Une loi peut avoir certaines propriétés :
- Associativité : $\forall x, y, z \in E, \quad (x \top y) \top z = x \top (y \top z)$,
- Commutativité : $\forall x, y \in E, \quad x \top y = y \top x$,
- Avoir un élément neutre : il existe $e \in E$ tel que $\forall x \in E$, $x \top e = x = e \top x$.

Définition 2. *(Inverse) Si $\top$ a un élément neutre e et si $x \in E$, on dit que x est inversible pour $\top$ s'il existe $y \in E$ tel que $x \top y = e = y \top x$.*

Définition 3. *($\mathbb{K}$-espace vectoriel) Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble non vide (de vecteurs) E muni :*
- *d'une loi de composition interne*

$$\begin{aligned} +_E : E \times E &\to E \\ (u, v) &\mapsto u +_E v, \end{aligned}$$

  qui est associative, commutative et a un élément neutre $0_E \in E$, telle que tout $x \in E$ admet un opposé x' tel que

$$x +_E x' = 0_E,$$

  noté $-x$. On appelle cette loi addition de E.
- *d'une loi de composition externe*

$$\begin{aligned} \times_E : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \times_E u, \end{aligned}$$

qui vérifient les propriétés suivantes
1. *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$, $\lambda \times_E (\mu \times_E u) = (\lambda \times \mu) \times_E u$;*
2. *$\forall u \in E$, $1 \times_E u = u$, 1 est l'élément neutre pour la multiplication ;*
3. *Compatibilité avec $+_E$:*
   - *$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$, on a $\lambda \times_E (u +_E v) = \lambda \times_E u +_E \lambda \times_E v$,*
   - *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, on a $(\lambda + \mu) \times_E u = \lambda \times_E u +_E \mu \times_E u$.*

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

— *les éléments de E s'appellent des vecteurs de E,*
— *les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires,*
— *$+_E$ se note en général $+$,*
— *0_E se note en général 0,*
— *$\times_E$ n'est en général pas notée du tout : $\lambda \times_E u = \lambda u$.*

Remarque 1. *On ne peut pas additionner un scalaire et un vecteur. On ne peut pas multiplier deux vecteurs. On a :*

$$\begin{cases} \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u, & \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ u \in E, \\ 1u = u, & u \in E, \\ \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v, & \lambda \in \mathbb{K},\ u, v \in E, \\ (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, & \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ u \in E. \end{cases}$$

Exemple 2. *Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$ (on dit que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) où $x, y \in \mathbb{R}$. On peut écrire*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors la loi interne permet de définir un troisième vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

La loi externe permet de définir un quatrième vecteur qui correspond à une dilatation du facteur $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \times (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre est le vecteur nul $(0, 0)$, le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$. Un petit dessin s'impose.

Exemple 3. *L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est muni d'une structure vectorielle.*

— *Loi interne : pour deux fonctions f et g, leur somme est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(à gauche loi interne, à droite l'addition dans $\mathbb{R}$).

— *Loi externe : si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un réel et f une fonction, on définit la fonction $\lambda \times f$ comme*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda \times f)(x) = \lambda \times f(x).$$

(à gauche loi interne, à droite la multiplication dans $\mathbb{R}$).

— *L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$$

— *L'opposé de f est la fonction g définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -f(x).$$

On note $-f$ l'opposé de f.

Proposition 1. *(Unicité et règles de calcul)*

1. *S'il existe un élément neutre 0_E, alors il est unique.*
2. *Soit u un élément de E. Si u admet un opposé u' alors il est unique.*

3. Règles de calcul : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :
   (a) $0 \times_E u = 0_E$.
   (b) $\lambda \times_E 0_E = 0_E$.
   (c) $(-1) \times_E u = -u$.
   (d) La plus importante : $\lambda \times_E u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $u = 0_E$.

Avec ces définitions on peut donner un sens à une combinaison linéaire de $n \geq 2$ vecteurs :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

1.1.2 Sous-espace vectoriel

Pour montrer qu'un espace E est un espace vectoriel, il faut vérifier tous les axiomes, ce qui peut être fastidieux. Un méthode plus rapide et efficace passe par la notion de sous-espace vectoriel.

Définition 4. *(Sous-espace vectoriel) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si :*

1. $0_E \in F$.
   Le vecteur nul doit être dans F. En pratique il suffira de prouver que F n'est pas vide.
2. *Stabilité pour + : pour tout $u, v \in F$, $u + v \in F$.*
   On dit alors que F est stable pour l'addition.
3. *Stabilité pour la multiplication externe : $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F$.*
   F est dit stable pour la multiplication.

Propriété 1. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel car on peut le munir de l'addition*

$$\begin{aligned} F \times F &\to F \\ (x, y) &\mapsto x + y, \end{aligned}$$

et du produit externe

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times F &\to F \\ (\lambda, y) &\mapsto \lambda y. \end{aligned}$$

Remarque 2. *Méthodologie : pour répondre à la question « l'ensemble F est-il un espace vectoriel ? », une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel E connu qui contient F puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E en vérifiant les 3 propriétés.*

1.1.3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Proposition 2. *(Intersection et somme) Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*
- *$F \cap G = \{x \in E |\ x \in F$ et $x \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;*
- *$F + G = \{x + y |\ x \in F$ et $y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Soient $x, y \in F + G$. Alors

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \quad x_1 \in F,\ x_2 \in G, \\ y &= y_1 + y_2 \quad y_1 \in F,\ y_2 \in G. \end{aligned}$$

On en déduit que
$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2,$$
c'est-à-dire
$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in F + G.$$
Pour le produit, on a
$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in F + G,$$
car $\lambda x_1 \in F$ et $\lambda x_2 \in G$.
Enfin pour l'élément neutre
$$0 = 0 + 0 \in F + G,$$
où le premier 0 est dans F et le second dans G. □

Remarque 3. *La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est en général pas un sous-espace vectoriel. Par exemple $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) | \, x = 0\}$ et $G = \{(x, y) | \, y = 0\}$. La réunion $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par exemple $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G mais il n'est pas dans la réunion.*

Définition 5. *(Somme directe) Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en somme directe dans E si*
- *$F \cap G = \{0_E\}$,*
- *$F + G = E$.*

On peut écrire alors $E = F \oplus G$. Si F et G sont en somme directe, on dit que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Proposition 3. *F et G sont en somme directe dans E si et seulement si tout élément de E peut s'écrire de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Démonstration. Supposons que $E = F \oplus G$. Alors $x \in E$ s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ car $E = F + G$. On veut montrer l'unicité. Supposons
$$x = y + z, \quad y \in F, z \in G$$
$$x = y' + z', \quad y' \in F, z' \in G.$$
On a donc $y + z = y' + z'$. On équilibre l'équation en rassemblant les termes de G à gauche et ceux de F à droite pour obtenir
$$z - z' = y' - y.$$
Puisque le seul élément commun à F et G est 0_E (puisque $F \cap G = \{0_E\}$), on a que $z - z' = y - y' = 0$, c'est-à-dire que $z = z'$ et $y = y'$. On a prouvé l'unicité.
Supposons maintenant que tout $u \in E$ se décompose de manière unique et montrons que $E = F \oplus G$.
- Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Si $u \in F \cap G$, il peut s'écrire des deux manières suivantes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :
$$u = 0_E + u, \qquad u = u + 0_E.$$
Par unicité de la décomposition, on a $u = 0_E$.
- Montrons que $F + G = E$. Il n'y a rien à prouver car par hypothèse tout élément de E se décompose de manière unique en $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

□

Définition 6. *(Produit cartésien) On appelle produit cartésien de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble*

$$E \times F = \{(x, y);\ x \in E,\ y \in F\}$$

muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de la manière suivante

— *Somme : soient (x, y) et $(x', y') \in E \times F$. Alors*

$$(x, y) +_{E\times F} (x', y') = (x +_E x', y +_F y').$$

— *Produit externe : $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x, y) \in E \times F$. Alors*

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Cela fait bien de $E \times F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus

$$\begin{aligned} E \times \{0_F\} &= \{(x, 0_F) | x \in E\} \subset E \times F, \\ \{0_E\} \times F &= \{(0_E, y) | y \in F\} \subset E \times F, \end{aligned}$$

sont deux sous-espaces vectoriels de $E \times F$ qui sont supplémentaires. En effet :

$$\begin{aligned} \big(E \times \{0_F\}\big) \cap \big(\{0_E\} \times F\big) &= \{(0_E, 0_F)\} = 0_{E\times F}, \\ \text{Si } (x, y) \in E \times F, \quad (x, y) &= (x, 0_F) + (0_E, y). \end{aligned}$$

Donc $\big(E \times \{0_F\}\big) \oplus \big(\{0_E\} \times F\big) = E \times F = E \oplus F$.

Exemple 4.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

et $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$ n fois !