Feuille d'exercices 1 : Suites de fonctions

Exercice 1 Pour $n \geq 1$, on pose $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = x - \frac{e^x}{n}$. Montrer que la suite (g_n) converge simplement, mais pas uniformément. Est-ce que (g_n) converge uniformément sur les compacts ?

Exercice 2 Étudier la convergence simple/uniforme des suites de fonctions f_n suivantes sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) $a_n(x) = \sin^n(x)$.

(b) $c_n(x) = (\sin(x) + \cos(x))^n$

(c) $d_n(x) = (\sin(x)\cos(x))^n$

(d) $e_n(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n$ si $x \neq 0$ et $e_n(0) = 0$.

Exercice 3 Étudier la convergence simple/uniforme des suites de fonctions suivantes sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

(a) $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$.

(b) $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ pour $n \geq 1$.

(c) $h_n(x) = e^{-n^2x^2} \sin(nx)$.

(d) $i_n(x) = \frac{\sin(nx^2)}{nx}$ si $x \neq 0$, et $i_n(0) = 0$.

Exercice 4 Pour tout $\alpha \geq 0$, on considère la suite de fonctions $F_n^\alpha(x) = n^\alpha x e^{-nx}, x \in [0, +\infty[$.

(a) Calculer la limite simple de la suite (F_n^α).

(b) Déterminer $\|F_n^\alpha\|_\infty$ au moyen d'une étude de fonction.

(c) Pour quels α, la suite (F_n^α) converge-t-elle uniformément ?

Exercice 5 Pour les suites de fonctions suivantes on montrera tout d'abord la convergence simple. Ensuite, on vérifiera que la convergence n'est pas uniforme en cherchant une suite (a_n) pour laquelle la suite $(f_n(a_n))$ n'est pas convergente.

(a) $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n\cos^n(x)\sin(x)$.

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n\sin(x)}$ si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $g_n(k\pi) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $f_n(x) = n^2 \sin(x)(1 - nx)$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$, et $h_n(x) = 0$ si $x \geq \frac{1}{n}$.

(d) $f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'au (a) la convergence n'est pas uniforme en calculant la limite de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$ quand n tend vers $+\infty$. Montrer qu'au (d) la convergence est uniforme sur les compacts.

Exercice 6 Étudier les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes – convergence simple, uniforme, uniforme sur les compacts – sur les intervalles de définition :

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
— $f_n(x) = 0$ si $x < 0$,
— $f_n(x) = 1$ si $x > \frac{1}{n}$,
— $f_n(x) = nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$.

(b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(0) = 0$, $f_n(x) = x^n \ln(x)$ si $x \in]0,1]$.

(b) $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{(1+x)^n}$.

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n = \underbrace{\sin \circ \sin \circ \sin \circ \ldots \circ \sin}_{n \text{ fois}}$.

(b) $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(0) = 1$, $f_n(x) = \frac{1}{1+\frac{p}{n}}$ si $x \in]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}]$, $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 7 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(1) = 0$. Soit $g_n(x) := x^n f$. Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 8 On considère une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f.

(a) Montrer que $(\sin(f_n))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\sin(f)$.

(b) Est-ce que $(\exp(f_n))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\exp(f)$? Montrer que c'est le cas si la fonction f est bornée.

Exercice 9 On considère la suite de polynômes P_n définie par la récurrence suivante : $P_0(t) = 0$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que la suite de polynômes P_n converge uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[0,1]$. *On utilisera l'un des théorèmes de Dini.*

(c) Expliciter une suite de polynômes qui converge uniformément vers $t \mapsto |t|$ sur l'intervalle $[-2,2]$.

Exercice 10 Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ converge simplement vers la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. On souhaite maintenant montrer la convergence uniforme de (f_n) sur les compacts.

(a) Méthode 1 : montrer et utiliser les inégalités $1+x \leq e^x \leq 1+x+2x^2$, $\forall x \in [-1,1]$.

(b) Méthode 2 : utiliser l'un des théorèmes de Dini.

Exercice 11 Montrer par un contre exemple que le premier théorème de Dini est faux si l'on ne suppose pas que la fonction limite est continue. Montrer la même chose pour le deuxième théorème de Dini.

Exercice 12 Considérons une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f. Si les fonctions f_n sont uniformément continues, montrer que f est aussi uniformément continue.

Exercice 13 Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite affine s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax+b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite simple d'une suite de fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors f est affine.

Exercice 14 Soient I un intervalle ouvert et $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions de classe C^1. On suppose que la suite des dérivées (f_n') convergent uniformément sur I.

(a) Montrer sur un exemple que la suite (f_n) n'est pas forcément convergente.

(b) Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente sur les compacts s'il existe $a \in I$ tel que la suite $(f_n(a))$ converge.

Exercice 15 On considère une suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f. Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que toutes les fonctions f_n sont K-Lipschitziennes.

(a) Montrer que f est K-Lipschitzienne.

(b) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 16 Soient $a < b$.

(a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \cos(nt)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sin(nt)dt = 0$.

(b) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt)dt = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt)dt = 0$.

(c) Montrer la même chose quand f est seulement continue. (Indication : utiliser Stone-Weierstrass).

(d) Montrer la même chose quand f est réglée (Indication : utiliser des fonctions en escalier).

(e) Si f continue, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t) \sin^2(nt)dt$ en fonction de l'intégrale de f.

(f) Montrer que, si $(\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite uniformément convergente sur un intervalle $[a, b]$, alors la limite est nulle (indication : si f est une telle limite, si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe un intervalle d'intérieur non vide sur lequel l'intégrale de f est non nulle). En déduire que $(\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite uniformément convergente sur tout intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

Exercice 17 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $f(x) = 2x(1 - x)$. On pose

$$f_n := \underbrace{f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

(a) Montrer que, pour tout n, on a $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{2}$.

(b) Étudier la suite $\frac{1}{2} - f_n$ et montrer que $(f_n)_n$ tend simplement vers la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = f(1) = 0$, $f(t) = \frac{1}{2}$ si $t \in]0, 1[$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle du type $[a, b]$, $0 < a < b < 1$.

(c) Supposons $0 < a < b < 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à λ. Montrer que f est limite uniforme sur $[a, b]$ de fonctions polynômiales *à coefficients entiers*. (Indication : approximer λ par des nombres rationnels du type $\frac{p}{2^m}$ et utiliser (b).) Montrer que tout polynôme à coefficients réels est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers sur $[a, b]$.

Compléments 1. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Voici plusieurs sous-espaces vectoriels remarquables de E :

— l'espace $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues,
— l'espace $\mathcal{C}^1([a, b])$ (resp. $\mathcal{C}^\infty([a, b])$) des fonctions de classe C^1 (resp. C^∞),
— l'espace $\mathcal{C}M([a, b])$ des fonctions continues par morceaux,
— l'espace $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escalier,
— l'espace $\mathcal{I}([a, b])$ des fonctions intégrables,
— l'espace $\mathcal{R}([a, b])$ des fonctions réglées,
— l'espace $\mathcal{A}([a, b])$ des fonctions affines,
— l'espace $\mathcal{A}M([a, b])$ des fonctions affines par morceaux,
— l'espace $\mathcal{P}([a, b])$ des fonctions polynomiales.

Si $A \subset B \subset E$, on dit que A est **dense dans** B si toute fonction de B est limite uniforme de fonctions de A. Par exemple, le théorème de Stone-Weierstrass peut s'énoncer en disant que $\mathcal{P}([a, b])$ *est dense dans* $\mathcal{C}([a, b])$. Nous avons vu en cours que $\mathcal{E}([a, b])$ est dense dans $\mathcal{R}([a, b])$.

(a) Pour chaque paire d'espaces, dire si l'un est inclus dans l'autre.

(b) Si $A \subset B \subset C$ montrer : A dense dans B et B dense dans $C \Longrightarrow A$ dense dans C.

(c) Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées est une fonction réglée.

(d) Montrer que $\mathcal{E}([a, b])$ n'est pas dense dans $\mathcal{I}([a, b])$ (Indication : montrer que la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$ est intégrable sur $[0, 1]$, mais n'est pas limite uniforme de fonctions en escalier).

(e) Soit $\mathcal{A}MC([a, b])$ l'espace de fonctions continues affines par morceaux. Montrer que $\mathcal{A}MC([a, b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b])$.

(f) Supposons $0 < a < b < 1$. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dense dans $\mathcal{C}([a, b])$ (utiliser l'exercice 17).

Compléments 2. Soit V l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$. Pour tout $f \in V$, on pose

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt, \quad \|f\|_2 := \left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(t)|.$$

(a) Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_1$ est une norme sur V.

(b) Soient $f, g \in V$. En utilisant le fait que la fonction polynomiale

$$X \mapsto \int_0^1 (f(t) + Xg(t))^2 dt$$

est toujours positive, montrer que $|\int_0^1 f(t)g(t)| \leq \|f\|_2\|g\|_2$. En déduire que l'application $f \mapsto \|f\|_2$ est une norme sur V.

(c) Montrer que $\forall f \in V$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

(d) Trouver une suite $f_n \in V$ vérifiant $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_2 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty = 1$.

(e) Trouver une suite $g_n \in V$ vérifiant $\lim_{n\to\infty}\|g_n\|_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \|g_n\|_2 = 1$.

(f) Existe-t'il une constante $c > 0$ telle que $\forall f \in V$, $\|f\|_\infty \leq c\,\|f\|_1$?