HAI406X : Algèbre linéaire

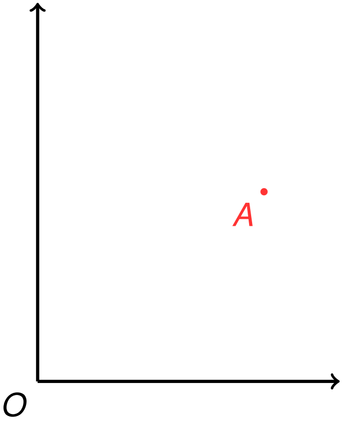
Chapitre B.1

Géométrie affine et vectorielle

B.I.a) Points et vecteurs.

Rappels

Repères, cordonnées dans le plan



Convention :

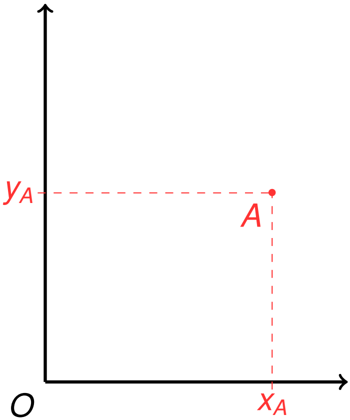
- x abscisse
- y ordonnée

Identification :

$$A(x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$$

Rappels

Repères, cordonnées dans le plan



Convention :

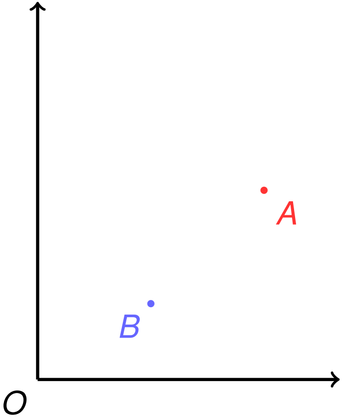
- x abscisse
- y ordonnée

Identification :

$$(x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$$

Rappels

Vecteurs



Deux points définissent un vecteur :

$$A(x_A, y_A) \quad B(x_B, y_B)$$

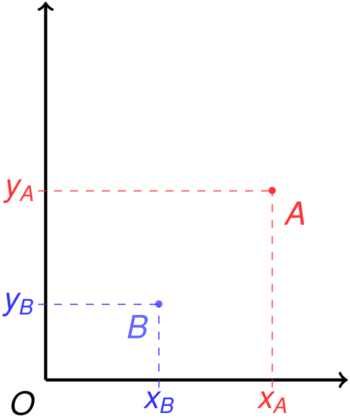
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Remarque : On notera

$$\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^2.$$

Rappels

Vecteurs



Deux points définissent un vecteur :

$$A(x_A, y_A) \quad B(x_B, y_B)$$

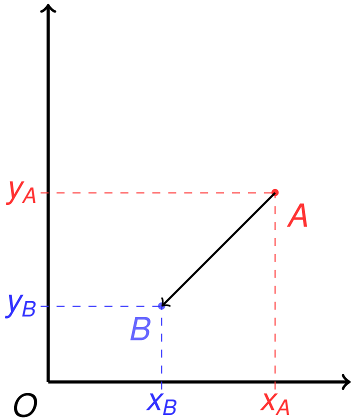
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Remarque : On notera

$$\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^2.$$

Rappels

Vecteurs



Deux points définissent un vecteur :

$$A(x_A, y_A) \quad B(x_B, y_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Remarque : On notera

$$\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^2.$$

Points et vecteurs

Rappel : A tout point du plan on peut associer un vecteur

$$A(x_A, y_A) \qquad \rightarrow \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

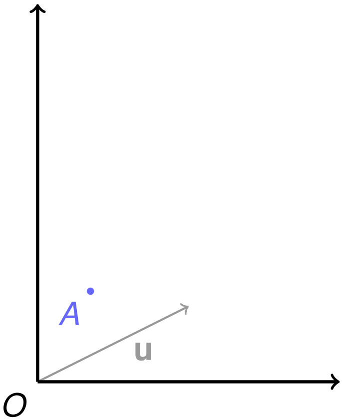
En particulier, l'ensemble des vecteurs est noté $\mathbb{R}^2$.

Remarque : A tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ on peut associer un point du plan

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad A(u_1, u_2)$$

Distinguer point (en ligne) et vecteur (en colonne)

Opération point-vecteur



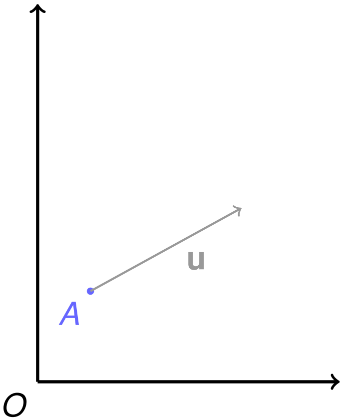
Définition [Translation] Soit un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

On définit l'application "translation de vecteur **u**" comme ci-dessous :

$$\begin{array}{rccc} T_{\mathbf{u}} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_A, y_A) & \longmapsto & (x_A + u_1, y_A + u_2) \end{array}$$

Opération point-vecteur



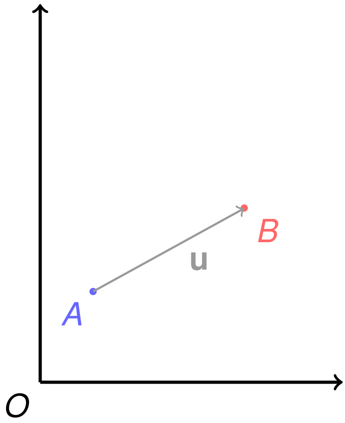
Définition [Translation] Soit un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

On définit l'application "translation de vecteur $\mathbf{u}$" comme ci-dessous :

$$T_{\mathbf{u}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_A, y_A) & \longmapsto & (x_A + u_1, y_A + u_2) \end{array}$$

Opération point-vecteur



Définition [Translation] Soit un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

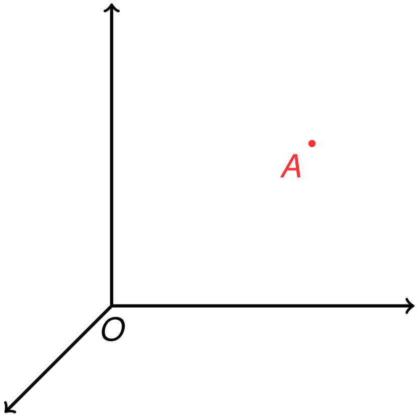
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

On définit l'application "translation de vecteur **u**" comme ci-dessous :

$$\begin{array}{rccc} T_{\mathbf{u}} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_A, y_A) & \longmapsto & (x_A + u_1, y_A + u_2) \end{array}$$

Rappels

Repères, cordonnées dans l'espace



Convention :

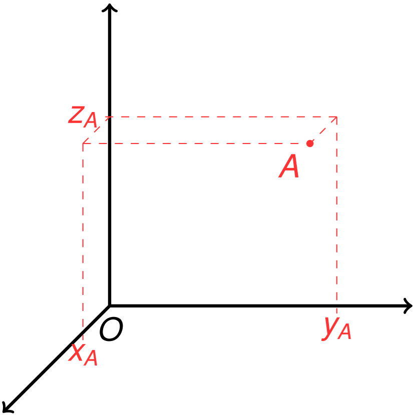
- x abscisse
- y ordonnée
- z cote

Identification :

$$A(x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{R}^3$$

Rappels

Repères, cordonnées dans l'espace



Convention :

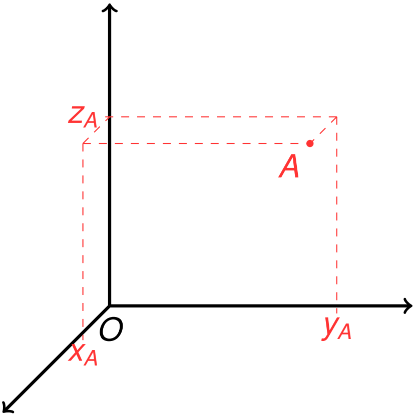
- x abscisse
- y ordonnée
- z cote

Identification :

$$A(x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{R}^3$$

Rappels

Repères, cordonnées dans l’espace



Convention :

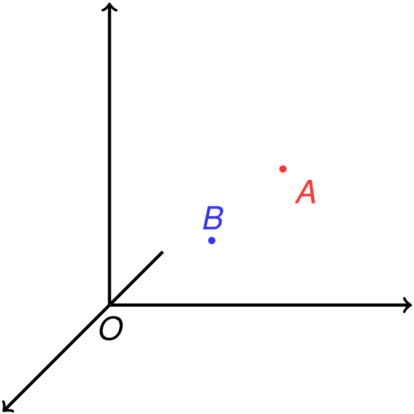
- x abscisse
- y ordonnée
- z cote

Identification :

$$(x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{R}^3$$

Rappels

Vecteurs



Deux points définissent un vecteur :

$$A(x_A, y_A, z_A) \quad B(x_B, y_B, z_B)$$

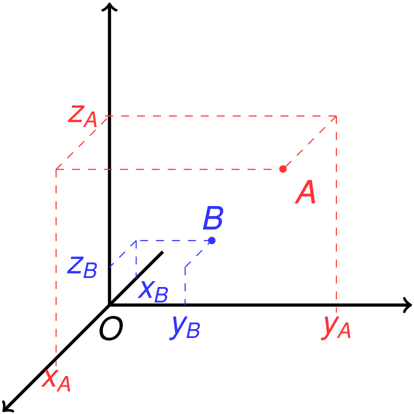
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Remarque : On notera

$$\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^3.$$

Rappels

Vecteurs



Deux points définissent un vecteur :

$$A(x_A, y_A, z_A) \quad B(x_B, y_B, z_B)$$

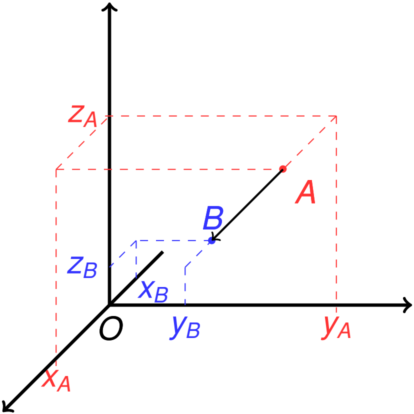
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Remarque : On notera

$$\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^3.$$

Rappels

Vecteurs



Deux points définissent un vecteur :

$$A(x_A, y_A, z_A) \quad B(x_B, y_B, z_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Remarque : On notera

$$\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^3.$$

Points et vecteurs

Rappel : A tout point de l'espace on peut associer un vecteur

$$A(x_A, y_A, z_A) \qquad \rightarrow \qquad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$$

En particulier, l'ensemble des vecteurs est noté $\mathbb{R}^3$.

Remarque : A tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ on peut associer un point de l'espace

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad A(u_1, u_2, u_3)$$

Opération point-vecteur

Définition [Translation]

Soit un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

On définit l'application "translation de vecteur **u**" comme ci-dessous :

$$T_{\mathbf{u}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_A, y_A, z_A) & \longmapsto & (x_A + u_1, y_A + u_2, z_A + u_3) \end{array}$$

Généralisations

Géométrie en "dimension n"

Soit n un entier non-nul.

- Un n-uplet est associé à un point de l'"espace à n dimensions"
  Exemple : $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- Deux points de l'"espace à n dimensions" définissent un vecteur :
  Exemple : $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad B(y_1, \ldots, y_n)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Généralisations

Géométrie en "dimension n"

Soit n un entier non-nul.

- Un n-uplet est associé à un point de l'"espace complexe à n dimensions"
  Exemple : $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$
- Deux points de l'"espace complexe à n dimensions" définissent un vecteur :
  Exemple : $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad B(y_1, \dots, y_n)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Opération point-vecteur

dans l'espace "à n dimensions" $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition [Translation]

Soit un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

On définit l'application "translation de vecteur $\mathbf{u}$" comme ci-dessous :

$$T_{\mathbf{u}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n) \end{array}$$

Définition de matrice

Définition. Etant donnés $(n, p) \in [\mathbb{N}^*]^2$, on appelle matrice à p lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ contenant p lignes et n colonnes.

Définition. Une matrice carrée est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes.

Notation.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \{ \text{ matrices carrées } M \text{ à } n \text{ lignes } \}$$

Vocabulaire.

Soit A une matrice a p lignes et n colonnes

- si $p = 1$ la matrice A est dite (vecteur) ligne
- si $n = 1$ la matrice A est dite (vecteur) colonne

Conventions

Notations. Soit A une matrice à p lignes et n colonnes.

- On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

  ou

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

- On note $a_{i,j}$ le coefficient à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Lignes et colonnes

Soit A une matrice à p lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

A est constituée de n matrices colonnes $C_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad C_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix}$$

appelées colonnes de A

Applications

Notations. Soit A une matrice à p lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

A est constituée de p matrices lignes $L_i \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$

$$L_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$L_p = \begin{pmatrix} a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

appelées lignes de A.

B.I.b) Notions d'espace vectoriel

Opérations sur les vecteurs

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \geq 2$

Définition [somme, multiplication par un scalaire]

Etant donnés

- $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$
- $\lambda \in \mathbb{K}$

on définit $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ et $\mathbf{x} = \lambda * \mathbf{u}$ par

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}.$$

Exemple :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 2\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les vecteurs

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \geq 2$

Définition [somme, multiplication par un scalaire]

Etant donnés

- $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$
- $\lambda \in \mathbb{K}$

on définit $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ et $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{u}$ par

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}.$$

Exemple :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 2\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les vecteurs

Proposition

Etant donnés $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{K}^n$, λ et μ dans $\mathbb{K}$

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- $\mathbf{u} + \mathbf{0}_n = \mathbf{u}$
- on peut construire un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ tq
$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{0}_n.$$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$
- $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$
- $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$
- $1 * \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Remarque : On dit que $(\mathbb{K}^n, +, *)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Opérations sur les vecteurs

Proposition

Etant donnés $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{K}^n$, λ et μ dans $\mathbb{K}$

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- $\mathbf{u} + \mathbf{0}_n = \mathbf{u}$
- on peut construire un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ tq
$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{0}_n.$$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$
- $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$
- $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$
- $1 * \mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$\mathbf{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : On dit que $(\mathbb{K}^n, +, *)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Combinaison linéaire de vecteurs

Définition. Etant donné un entier $k \geq 2$ et

- $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$
- $\lambda^{(1)} \ldots, \lambda^{(k)}$ des éléments de $\mathbb{K}$

on appelle combinaison linéaire des $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ de coefficients $\lambda^{(1)} \ldots, \lambda^{(k)}$ le vecteur

$$\lambda^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \ldots + \lambda^{(k)}\mathbf{u}^{(k)}$$

Exemple : $\lambda^{(1)} = 2$ et $\lambda^{(2)} = -1$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \lambda^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Combinaison linéaire de vecteurs

Définition. Etant donné un entier $k \geq 2$ et

- $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$
- $\lambda^{(1)} \ldots, \lambda^{(k)}$ des éléments de $\mathbb{K}$

on appelle combinaison linéaire des $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ de coefficients $\lambda^{(1)} \ldots, \lambda^{(k)}$ le vecteur

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda^{(j)} \mathbf{u}^{(j)}$$

Exemple : $\lambda^{(1)} = 2$ et $\lambda^{(2)} = -1$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \lambda^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sous-espace (vectoriel) engendré

Définition. Etant donné un entier $k \geq 1$ et une famille $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ de k vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on appelle espace engendré par les $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$\langle \mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)} \rangle = \left\{ \text{combinaisons linéaires des } \mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)} \right\} .$$

Exemples :

- Pour tout vecteur $\mathbf{u}$ de $\mathbb{K}^n$, on a :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \{ t\mathbf{u}, t \in \mathbb{K} \}.$$

- Pour $\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)} \rangle = \mathbb{K}^2.$$

Sous-espace (vectoriel) engendré

Définition. Etant donné un entier $k \geq 1$ et une famille $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}$ de k vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on appelle espace engendré par les $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$\langle \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(k)} \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda^{(j)} \mathbf{u}^{(j)}, \quad (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}) \in \mathbb{K}^k \right\}.$$

Exemples :

- Pour tout vecteur $\mathbf{u}$ de $\mathbb{K}^n$, on a :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \{ t\mathbf{u}, t \in \mathbb{K} \}.$$

- Pour $\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)} \rangle = \mathbb{K}^2.$$

Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Proposition. Soit E un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par des vecteurs $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}$ de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a :

- le vecteur nul est un élément de E
- pour tout $\mathbf{u} \in E$ et $\mathbf{v} \in E$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in E$
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathbf{u} \in E$, $\lambda\mathbf{u} \in E$.

Définition. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$. Si on a :

- le vecteur nul est un élément de E
- pour tout $\mathbf{u} \in E$ et $\mathbf{v} \in E$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in E$
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mathbf{u} \in E$, $\lambda\mathbf{u} \in E$.

on dit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Exercice : Parmi les ensembles E suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

- $E = \mathbb{R}^n$
- pour $n = 2$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1 \right\}$,
- pour $n = 3$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ -t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$
- pour $n = 3$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} t+s \\ t-s \\ 2t \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Si ce sont des sous-espaces vectoriels, dire s'ils sont engendré par une famille finie de vecteurs.

B.I.c) Retour à la géométrie

Notion de droite affine

Définition. Etant donnés $A(x_A, y_A)$ un point du plan et $\mathbf{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ non nul on appelle droite affine passant par A et de vecteur directeur $\mathbf{u}$ le sous-ensemble $D_A[\mathbf{u}]$ du plan défini par :

$$D_A[\mathbf{u}] = \{\, T_{t\mathbf{u}}(A), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Remarque. Par les coordonnées, on a la définition équivalente :

$$D_A[\mathbf{u}] = \{(x_A + tu_1, y_A + tu_2), \quad t \in \mathbb{R}\} .$$

Proposition. Etant donnés deux points distincts A et B, il existe une unique droite (affine) passant par A et B.

Notion de droite affine

Définition. Etant donnés $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\mathbf{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ non nul on appelle droite affine passant par A et de vecteur directeur $\mathbf{u}$ le sous-ensemble $D_A[\mathbf{u}]$ du plan défini par :

$$D_A[\mathbf{u}] = \{T_{t\mathbf{u}}(A), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Remarque. Par les coordonnées, on a la définition équivalente :

$$D_A[\mathbf{u}] = \{(x_A + tu_1, y_A + tu_2, z_A + tu_3), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition. Etant donnés deux points distincts A et B, il existe une unique droite (affine) passant par A et B.

Notion de droite affine

Définition. Etant donnés $A(x_1, \ldots, x_n)$ un point de l'espace à n dimensions et $\mathbf{u}$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$ non nul on appelle droite affine passant par A et de vecteur directeur $\mathbf{u}$ le sous-ensemble $D_A[\mathbf{u}]$ du plan défini par :

$$D_A[\mathbf{u}] = \{ T_{t\mathbf{u}}(A), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Remarque. Par les coordonnées, on a la définition équivalente :

$$D_A[\mathbf{u}] = \{(x_1 + tu_1, \ldots, x_n + tu_n), \quad t \in \mathbb{R}\} .$$

Proposition. Etant donnés deux points distincts A et B, il existe une unique droite (affine) passant par A et B.

Notion de droite vectorielle

Remarque. Toutes les droites de même vecteur directeur (=parallèles) partagent la même "direction".

Définition. Etant donné $\mathbf{u}$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$ non nul on appelle droite vectorielle dirigée par $\mathbf{u}$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$D[\mathbf{u}] = \{t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Proposition. Etant donné $\mathbf{u}$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$ non nul, on a $D[\mathbf{u}] = \langle \mathbf{u} \rangle$.

Remarque. Une droite vectorielle se "dessine" comme une droite affine passant par l'origine.

Droites vectorielles, droites sécantes

Proposition Etant donnés deux vecteurs **u** et **v** de $\mathbb{K}^n$, on a deux possibilites

i) il existe t et s dans $\mathbb{K}$ non tous deux nuls tels que

$$t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = 0$$

alors $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle$ ou $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle$.

ii) pour tout $(t, s) \in \mathbb{K}^2$ on a l'implication

$$(t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = 0) \Rightarrow (s = 0 \text{ et } t = 0)$$

alors $\langle \mathbf{u} \rangle \cup \langle \mathbf{v} \rangle \subset \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ avec $\langle \mathbf{u} \rangle \cup \langle \mathbf{v} \rangle \neq \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

Droites vectorielles, droites sécantes

- Si $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ sont nuls, on est dans le cas i).

- Si $\mathbf{u} \neq 0$

Cas i) si $t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = 0$ alors

$$s \neq 0 \text{ et } t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = 0$$

Cas ii) On appelle plan vectoriel l'ensemble $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Droites vectorielles, droites sécantes

- Si $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ sont nuls, on est dans le cas i).

- Si $\mathbf{u} \neq 0$

Cas i) si $t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = 0$ alors

$$s \neq 0 \text{ et } \mathbf{v} = -\frac{t}{s}\mathbf{u}$$

Cas ii) On appelle plan vectoriel l'ensemble $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Droites vectorielles, droites sécantes

- Si $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ sont nuls, on est dans le cas i).

- Si $\mathbf{u} \neq 0$

Cas i) si $t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = 0$ alors

$\mathbf{v}$ est colinéaire à $\mathbf{u}$

Cas ii) On appelle plan vectoriel
l'ensemble $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Notion de plan affine

dans l'espace (à n dimensions $n \geq 2$)

Définition. Etant donnés $A(x_1, \ldots, x_n)$ un point et $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ deux vecteurs non-colinéaires de $\mathbb{K}^n$, on appelle plan affine passant par A de plan directeur $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ le sous-ensemble $P_A[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ de $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$P_A[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{ T_{\mathbf{w}}(A), \quad \mathbf{w} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \}$$

Remarque. On a la définition équivalente :

$$P_A[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{ T_{t\mathbf{u}+s\mathbf{v}}(A), \quad (t, s) \in \mathbb{K}^2 \}.$$

Proposition. Etant donnés trois points du plan non-alignés A, B et C il existe exactement un plan passant par A, B et C.

Notion de plan affine

dans l'espace (à n dimensions $n \geq 2$)

Définition. Etant donnés $A(x_1, \ldots, x_n)$ un point et $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ deux vecteurs non-colinéaires de $\mathbb{K}^n$, on appelle plan affine passant par A de plan directeur $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ le sous-ensemble $P_A[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ de $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$P_A[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{ T_{\mathbf{w}}(A), \quad \mathbf{w} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \}$$

Remarque. On a la définition équivalente :

$$P_A[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \{(x_1 + tu_1 + su_1, \ldots, x_n + tu_n + sv_n), \quad (t, s) \in \mathbb{K}^2\}.$$

Proposition. Etant donnés trois points du plan non-alignés A, B et C il existe exactement un plan passant par A, B et C.

Propriétés des plans affines

- Le seul plan affine du plan est lui-même

- Si on oublie de vérifier que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne sont pas colinéaires, il peut arriver que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ soit une droite vectorielle et $P_A[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ une droite affine ... voire un point.