TD 3 : Applications linéaires, rang et Théorème du rang

Applications linéaires

Exercice 1 :
Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, en déterminer le noyau et l'image.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, xy), \qquad g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C} \quad (x,y,z) \mapsto 2x - y + z, \qquad h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (\sin(x) + \sin(y), \cos(x) - \cos(y)).$$

Exercice 2 :
Les applications suivantes sont-elles linéaires (on considère les ensembles écrits munis de leurs additions et dilatations usuelles) ?

$$\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto f(0)f(1), \qquad \psi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2 \quad p(x) \mapsto p(x-2), \qquad \eta : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

La notation $\mathcal{P}_2$ désigne ici les fonctions polynomiales de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + 2y - z = 0\}$. Déterminer une base de l'image de E par A puis une équation qui la caractérise.
2. On note $\mathbf{e} = (1,1,3) \in \mathbb{R}^3$ et on pose $F = \mathrm{vect}(\mathbf{e})$. Donner une base de l'image réciproque de F par A.

Rang et théorème du rang

Exercice 4 :
Calculer la dimension de l'image de chacune des matrices suivantes en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ -a & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :
Dans les cas suivants, déterminer, sans calcul de base, la dimension de F.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 2y + 3z = 2x - y = 0\}$,
2. $F = \{(x, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} |\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{2i+1} = 0\}$,
3. $F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 |\ x - y + z - t + u = x + 2y + z - 2t = x - 4y + z - 2t + 3u = 0\}$.

Exercice 6 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{t.q. } A = A^\top\}$$
$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{t.q. } A = -A^\top\}.$$

1. Calculer la dimension de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et la dimension de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$
3. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 :
Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice 8 :
Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E, E)$. Démontrer que

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g).$$

Exercice 9 :
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Démontrer que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$.
   (a) Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est liée.
   (b) Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.
3. En déduire que f est une homothétie.