TD 2 : familles et bases

Familles génératrices

Exercice 1 :
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\mathbf{u} = (1, 2, 1, 2)$ et $\mathbf{v} = (1, -1, 2, 0)$. Dans chacun des cas suivants, déterminer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour que le vecteur $\mathbf{w}$ donné satisfasse $\mathbf{w} \in \mathrm{vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

1. $\mathbf{w} = (x, 1, 1, y)$;
2. $\mathbf{w} = (x, 1, y, 1)$.

Exercice 2 :
Dans l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus 2, on pose $p_0(x) = x - 1$ et $p_1(x) = (x-1)^2$. Montrer que $p \in \mathrm{vect}(p_0, p_1)$ si et seulement si $p(1) = 0$.

Exercice 3 :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une représentation paramétrique de $\mathrm{Ker}(A)$.
2. En déduire une famille de vecteurs qui engendre $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 4 :
Soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{x} = (1, 2, 1, 2), \quad \mathbf{y} = (2, 0, 1, 2), \quad \mathbf{z} = (0, 0, 1, 1).$$

Trouver une équation linéaire qui caractérise les éléments de $\mathrm{vect}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Exercice 5 :
Dans $\mathbb{R}^3$ on pose

$$E = \langle (2, 3, -1), (1, -1, -2) \rangle \quad \text{et} \quad F = \langle (3, 7, 0), (5, 0, -7) \rangle.$$

Montrer que $E = F$.

Familles libres

Exercice 6 :
Soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} = (2, 1, 4), \quad \mathbf{v} = (1, -1, 2), \quad \mathbf{w} = (3, 3, 6).$$

1. Trouver trois réels (α, β, γ) non tous nuls tels que $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$ s'annule.
2. On construit la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$
Montrer que le noyau de cette matrice n'est pas réduit au vecteur nul.

Exercice 7 :
Dans $C(\mathbb{R})$, on considère les fonctions

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \cos(2x), \quad f_3(x) = (\cos(x))^2.$$

1. Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre.
2. Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) n'est pas libre.

Exercice 8 :
Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on considère les polynômes

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - 1, \quad p_2(x) = (x-1)(x-2), \quad p_3(x) = (x-1)^2(x-2).$$

1. Montrer que la famille (p_0, p_1, p_2) est libre.
2. Qu'en est-il de la famille (p_0, p_1, p_2, p_3) ?

Exercice 9 :
Dans $C(\mathbb{R})$, on considère les fonctions

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_k(x) = \exp(kx).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(f_k)_{k \le n}$ est libre.

Bases et dimension

Exercice 10 :
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs

$$(1, 1, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (0, 1, 1).$$

1. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Exprimer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 11 :
Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$(1,0,t), \quad (1,1,t), \quad (t,0,1),$$

est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 :
Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de

1. famille libre qui n'est pas génératrice ;
2. famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 13 :
On considère l'ensemble de fonctions

$$E = \{f \in C^1(\mathbb{R}) |\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)\}.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie dont on exprimera la dimension ainsi qu'une base.

Pour aller plus loin

Exercice 14 :
Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^{]-1,1[}$ engendré par $(f_i)_{1\leq i\leq 4}$, où pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 15 :
Soit $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On pose, pour $k = 1, \ldots, n$

$$L_k(X) = \frac{\prod_{i=1,\, i\neq k}^n (X - \alpha_i)}{\prod_{i=1,\, i\neq k}^n (\alpha_k - \alpha_i)}.$$

Démontrer que $(L_k)_{k=1,\ldots,n}$ est une base de E. Déterminer les coordonnées d'un élément $P \in E$ dans cette base.

Exercice 16 :
Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?