TD 1 : espaces vectoriels, lois de composition et sous-espaces vectoriels

Espaces vectoriels, lois de compositions

Exercice 1 :
Considérons trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notées f, g et h, définies par :

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \cos(x), \quad h(x) = \cos(2x).$$

1. On pose $u(x) = \big(g(x)\big)^2$. Montrer que l'on peut écrire $u = (f + h)/2$.
2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on représente la fonction f par le point $(1, 0)$ et la fonction h par le point $(0, 1)$.
   (a) Dessiner le point du plan qui représente la fonction u.
   (b) Pouvez-vous trouver un point du plan qui représente la fonction g ?

Exercice 2 :
Dans l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels, on définit la somme de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
1. Montrer que l'addition ainsi définie est une opération commutative et associative.
2. Montrer qu'il existe une suite qui est un élément neutre pour cette addition.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un opposé pour cette addition, que l'on explicitera.

Exercice 3 :
Soit n un entier naturel. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré au plus n. Autrement dit

$$p \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow \exists (a_0, \ldots a_n) \text{ tel que } p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

1. Montrer que la somme de deux éléments de $\mathcal{P}_n$ appartient à $\mathcal{P}_n$. Montrer aussi que si $p \in \mathcal{P}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda p \in \mathcal{P}_n$. Que vient-on de démontrer ?
2. Si p et q sont des polynômes, peut-on déduire le degré de $p + q$ de celui de p et celui de q ? Et si $\lambda \in \mathbb{R}$, peut-on déduire le degré de λp de celui de p ?

Exercice 4 :
Parmi les exemples suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 - y^2 + z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y - z = 1\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 2x + y = 0\}$;
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

Exercice 5 :
Parmi les exemples suivants, déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

1. $F_1 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)),\ (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$;
2. $F_2 = \{(t, t + 1, -s, -u),\ (s, t, u) \in \mathbb{R}^3\}$;
3. $F_3 = \{(t, s, t, s),\ (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 6 :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition de l'addition de deux fonctions et du produit d'une fonction par un scalaire.
2. Montrer que $C(I)$ muni de ces opérations est un espace vectoriel.

Exercice 7 :
On note E_p l'ensemble des fonctions continues paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et E_i l'ensemble des fonctions continues impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E_p et E_i sont des sous-espaces vectoriels de $C(\mathbb{R})$.
2. Calculer $E_p \cap E_i$.
3. Montrer que tout $f \in C(\mathbb{R})$ s'écrit $f = g + h$ avec $g \in E_p$ et $h \in E_i$ et expliciter les fonctions g et h en fonction de f.
4. En déduire que $C(\mathbb{R}) = E_p \oplus E_i$.

Exercice 8 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E alors on a forcément $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 :
Soient E l'espace vectoriel des suites réelles et

$$F = \{u \in E, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\},$$
$$G = \{u \in E, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 10 :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que

$$F' \oplus G = E.$$

Exercice 11 :
Soit E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (|x| \geq A \Longrightarrow f(x) = g(x) - h(x)).$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.