$\boxed{\text{Exercice 34}}$

(1) $\mathbb{K}[X]$ admet pour base les monômes $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$

$\mathbb{K}[Y]$ ———————— $(Y^j)_{j\in\mathbb{N}}$

donc $\mathbb{K}[X]\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathbb{K}[Y]$ admet pour base $(X^i\otimes Y^j)_{i,j\in\mathbb{N}}$

On définit une application linéaire $\varphi_1 : \mathbb{K}[X]\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X,Y]$

en posant $\varphi_1(X^i\otimes Y^j) = X^iY^j$

Comme $(X^iY^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une base de $\mathbb{K}[X,Y]$, on voit que

φ_1 est un isomorphisme.

On sait que le produit tensoriel $\mathbb{K}[X]\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathbb{K}[Y]$ possède une structure de $\mathbb{K}$-algèbre canonique (voir Ex. 35)

On remarque que $\varphi_1 = \mathbb{K}[X]\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X,Y]$

est un isomorphisme d'algèbres.

(2) $\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q},\ P\in\mathbb{K}[X],\ Q\in\mathbb{K}[X]-\{0\} \right\}$ est le corps de fraction de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

Ici on voit que $\mathbb{K}(X)$ et $\mathbb{K}(Y)$ sont des sous-algèbres de $\mathbb{K}(X,Y)$

On a donc une application linéaire $\Psi : \mathbb{K}(X)\underset{\mathbb{K}}{\otimes}\mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X,Y)$

défini par $\Psi(P(X)\otimes Q(Y)) = P(X)Q(Y)$.

On peut facilement montrer que $T(X,Y)\in \mathrm{Image}(\Psi)$ si

et seulement si $\exists\, A(X)\in\mathbb{K}[X]$ et $B(Y)\in\mathbb{K}[Y]$ tels que

$$A(X)B(Y)T(X,Y)\in\mathbb{K}[X,Y].$$

On voit ainsi que $\frac{1}{X+Y}\notin \mathrm{Image}(\Psi)$. Donc $\mathrm{Image}(\Psi)\neq\mathbb{K}(X,Y)$

Exercice 35

(1) On considère l'application $\varphi : (A\times B)\times(A\times B) \longrightarrow A\otimes B$
$$((a,b)\,;(a',b')) \longrightarrow aa'\otimes bb'$$

L'application $(a,b) \longmapsto \varphi((a,b);(a',b'))$ est bilinéaire donc

il existe $\varphi_1 : A\underset{\mathbb{K}}{\otimes} B \times A\times B \longrightarrow A\underset{\mathbb{K}}{\otimes} B$ tel que
$$\varphi_1(a\otimes b, a',b') = (aa'\otimes bb')$$

L'application $(a',b') = \varphi_1(a\otimes b, a',b')$ est bilinéaire donc

il existe $\varphi_2 : A\underset{\mathbb{K}}{\otimes} B \times A'\underset{K}{\otimes} B' \longrightarrow A\underset{\mathbb{K}}{\otimes} B$ tel que
$$\varphi_2(a\otimes b, a'\otimes b') = aa'\otimes bb'$$

Par construction, φ_2 est bilinéaire donc cela définit une structure de K-algèbre sur $A\underset{\mathbb{K}}{\otimes} B$

(2) On voit $M_n(\mathbb{K})$ et B comme des sous algèbres de $M_n(B)$ à travers les morphismes
$$\left|\begin{array}{l} i_1 : M_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow M_n(B) \\ i_2 : B \longrightarrow M_n(B) \\ \quad b \longmapsto b\cdot I_n \end{array}\right.$$

On considère l'application bilinéaire
$$\psi : M_n(\mathbb{K})\times B \longrightarrow M_n(B)$$
$$(M,b) \longrightarrow i_1(M)\, i_2(b)$$

Cela se factorise en une application $\mathbb{K}$-linéaire
$$\left|\begin{array}{l} \psi_1 : M_n(\mathbb{K})\underset{\mathbb{K}}{\otimes} B \longrightarrow M_n(B) \\ \\ \psi_1(M\otimes b) = i_1(M)\, i_2(b) \end{array}\right.$$

ψ_1 est un morphisme d'algèbre car tous les éléments $i_1(M)$, $M\in M_n(\mathbb{K})$ commutent avec les $i_2(b)$, $b\in B$.

Exercice 35, suite

Vérifions que Ψ_1 est un isomorphisme. Pour cela on définit l'application réciproque de la manière suivante

. si $M \in \mathcal{M}_n(B)$, $M = (m_{ij})$ avec $m_{ij} \in B$ $\forall i,j$, on pose

$$\Psi_1^{-1}(M) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes m_{ij} \quad \text{où} \quad (E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ est la}$$

base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

. On voit immédiatement que $\left| \begin{array}{l} \Psi_1 \circ \Psi_1^{-1} = Id_{\mathcal{M}_n(B)} \\ \Psi_1^{-1} \circ \Psi_1 = Id_{M_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} B} \end{array} \right.$

(3) on sait déjà que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathcal{M}_m(\mathbb{K}))$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_m(\mathbb{K}))$ s'exprime sous la forme $M = (M_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $M_{ij} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_m(\mathbb{K})) \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K})$

définie par les conditions suivantes : $\forall p,q \in \{1, \dots, nm\}$

on pose $\left[\varphi(M)\right]_{p,q} = \left[M_{ij}\right]_{s+1, r+1}$

où les entiers $i,j \in \{1, \dots, n\}$ et $r,s \in \{0, \dots, m-1\}$

sont définis par des divisions euclidiennes $\left\{ \begin{array}{l} p = im + s \\ q = jm + r \end{array} \right.$

C'est immédiat de vérifier que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Le fait que φ est un isomorphisme d'algèbre est équivalent au calcul matriciel par blocs.

$\boxed{\text{Exercice 37}}$

Soient $\phi \in End(E)$ et $\Psi \in End(F)$

(1) L'application $\theta_1 : E \times F \longrightarrow E \otimes_{\mathbb{C}} F$ est

$(e, f) \longmapsto \phi(e) \otimes \Psi(f)$

bilinéaire. Il existe donc $\theta \in End(E \otimes_{\mathbb{C}} F)$ tel que

$$\theta(e \otimes f) = \phi(e) \otimes \Psi(f).$$

(2) • si ϕ et Ψ sont des isomorphismes (de E et F respectivement) alors θ admet pour application réciproque

$$e \otimes f \longrightarrow \phi^{-1}(e) \otimes \Psi^{-1}(f).$$

• si ϕ ou Ψ ne sont pas des isomorphismes, alors $Ker(\theta) \neq 0$

par exemple, si $\left| \begin{array}{l} \phi(e) = 0 \\ e \neq 0 \end{array} \right.$, alors $e \otimes f \in Ker(\theta)$ $\forall f \in F$.

(3) Posons $E = Ker(\phi) \oplus E_1$

$F = Ker(\Psi) \oplus F_1$

Alors $E \otimes_{\mathbb{C}} F = Ker(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} F \oplus E_1 \otimes_{\mathbb{C}} Ker(\Psi) \oplus E_1 \otimes_{\mathbb{C}} F_1$

On remarque que ① θ est nul sur $Ker(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} F$ et $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} Ker \Psi$.

② θ réalise un isomorphisme entre

$E_1 \otimes_{\mathbb{C}} F_1$ et $Image(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} Image(\Psi) \subset E \otimes_{\mathbb{C}} F$

Cela montre que $Image(\theta) = Image(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} Image(\Psi)$

et donc que $rang(\theta) = rang(\phi) \, rang(\Psi)$.