**HAC310X Mathématiques pour la Chimie**
**Contrôle continu n°2**

NOM :
Prénom :
Groupe :

**Durée : 1h** ; calculatrice non autorisée, aucun document autorisé.
**Merci de répondre sur le sujet, dans les cadres prévus à cet effet.**
**Justifier toutes les réponses** (un barème indicatif est donné pour chaque question).

**Exercice 1 [Dérivée (4 points)].** Soit $f(x,y) = (y+\cos x)(\pi - x + \sin y)$. (a) Donner le domaine de définition de $f(x,y)$. (b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. (c) Est-il vrai que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ?

• Domaine de définition $= \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+\cos x)(-1) + (\pi - x + \sin y)(-\sin x)$$
$$= -y - \cos x - \pi \sin x + x \sin x - \sin x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (y+\cos x)(\cos y) + (\pi - x + \sin y)(1)$$
$$= y\cos y + \cos x \cos y + \pi - x + \sin y$$

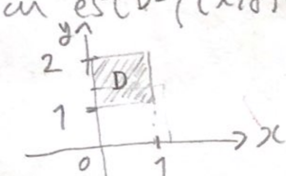
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1 - \sin x \cos y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

D'après le lemme de Schwartz nous avons $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

**Exercice 2 [Intégrale Double (4 points)].** Soit $f(x,y) = x^2y + \frac{y}{3}x$. Calculer $\int_0^1 \int_1^2 f(x,y)dydx$. Donner la représentation de la région d'intégration.

$$\int_0^1 \int_1^2 x^2y + \frac{y}{3}x \, dy dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{1}{3}\frac{y^2}{2}x\right]_1^2 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 \cdot 4}{2} + \frac{4}{6}x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right)\right)dx = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{6}x\right)dx = \left[\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{6}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Région d'intégration est $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\}$

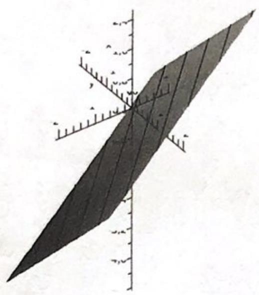


**Exercice 3 [Courbes de niveau (5 points)].** Soit $f(x,y) = x + y - 1$ et soit $S$ la surface (représentation graphique) de $f$ dans l'espace.

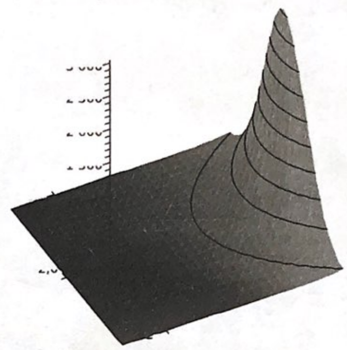
a) La surface $S$ contient-elle l'origine ? Qu'en est-il du point $(1,1,1)$ ?

b) Déterminer les courbes de niveau $f(x,y) = k$ pour $k = 0, 1, 2$ (on tracera ces courbes dans le plan).

c) $S$ correspond-t-elle à l'une des deux représentions ci-dessous ? Si ce n'est pas le cas, donner une représentation de $S$ ? (justifiez votre réponse).



(a)



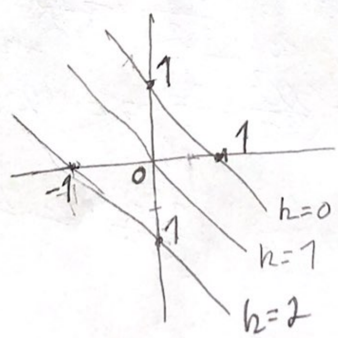
(b)

a) $z = f(x,y) = x+y-1$

a) $f(0,0) = 0+0-1 = -1$   S ne contient pas l'origine

$f(1,1) = 1+1-1 = 1$   S contient le point $(1,1,1)$

b) $z = f(x,y) = k \iff x+y-1 = k \iff y = 1-x-k$ , $k = 0,1,2$




Les courbes de niveau sont donc de droites.

c) La surface-graphe de f est donc un plan.

S correspond à la representation (a)

**Exercice 4 [Extrema (7 points)].** Déterminer les extrema locaux de la fonction $f(x,y) = 3 - x^2 - xy - y^2 + 2y$.

Cherchons les points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y + 2$$

On résoudre le système

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ -x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4/3 \\ x = -2/3 \end{cases}$$

Il y a donc un seul point critique $(-2/3, 4/3)$

Regardons si $(-2/3, 4/3)$ est un point extremum.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Nous avons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2/3, 4/3) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2/3, 4/3) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2/3, 4/3)\right)^2$$

$$= (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Donc, $(-2/3, 4/3)$ est soit un maximum ou un minimum.

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1 < 0$ alors $(-2/3, 4/3)$ est un maximum local