Mathématiques pour économistes

L1 économie

Mickael Beaud

Maître de conférences des universités (MCU)
Faculté d'économie de l'université de Montpellier (UM)
Centre d'Economie de l'Environnement de Montpellier (CEE-M)
(Courriel: mickael.beaud@umontpellier.fr)

December 7, 2023

1. **Dérivées partielles d'ordre 1**
2. Dérivées partielles d'ordre 2
3. Différentielle totale
4. Propriétés de courbure (concavité et convexité)
5. D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

- La notion de dérivée pour les fonctions à une variable s'étend assez facilement aux fonctions à plusieurs variables.
- La dérivée d'une fonction à une variable, $y = f(x)$ définie pour $x \in \mathbb{R}$, est le taux avec lequel y change quand x change (i.e. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$), en supposant que la variation de x est petite (i.e. $\Delta x \to 0$). Elle s'écrit

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{ou} \quad f'(x), \quad \text{ou simplement} \quad f'$$

avec

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Si y dépend de deux variables, avec $y = f(x_1, x_2)$ définie pour $x \in \mathbb{R}^2$, on peut calculer le taux avec lequel y change quand une seule des deux variables change, en considérant l'autre variable comme une constante.
  - Par exemple, on peut calculer le ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x_1}$ lorsque $\Delta x_1 \to 0$ et $\Delta x_2 = 0$.
  - Le résultat de ce calcul est la **dérivée partielle** de la fonction $f(x_1, x_2)$ par rapport à x_1.

- Formellement, la **dérivée partielle** de la fonction $y = f(x_1, x_2)$ par rapport à la variable x_1 s'écrit

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad \text{ou} \quad f_1(x_1, x_2), \quad \text{ou simplement} \quad f_1$$

avec

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

- Formellement, la **dérivée partielle** de la fonction $y = f(x_1, x_2)$ par rapport à la variable x_2 s'écrit

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad \text{ou} \quad f_2(x_1, x_2) \quad \text{ou simplement} \quad f_2$$

avec

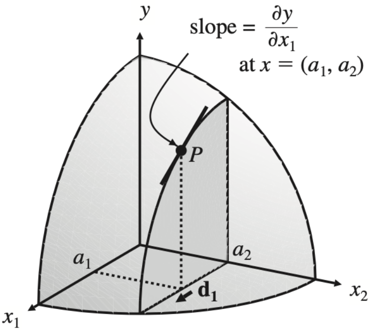
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2}$$

- On parle de **dérivée partielle** avec la notation "∂" dans la mesure où l'on ne fait varier qu'une seule des deux variables x_1 ou x_2 à la fois.
- Il est important de souligner que le ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x_1}$ dépend généralement du niveau de x_2.
- De même, le ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x_2}$ dépend généralement du niveau de x_1.
  - Les notations $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ nous rappellent que le taux de variation de y par rapport à x_1 ou x_2 dépend à la fois de x_1 et de x_2.

- L'idée que la **dérivée** représente la **pente de la tangente** d'une fonction à une variable en un point est conservée pour les fonctions à deux variables.
    - Il faut toutefois pendre des précautions concernant la représentation graphique et son interprétation. Voir les **Figures 1a** et **1b**.

Dérivées partielles d'ordre 1

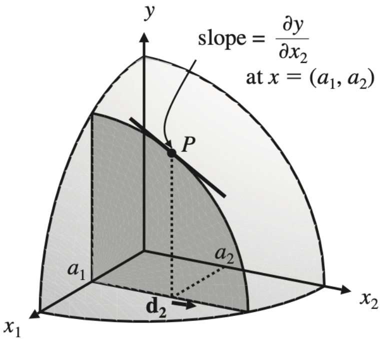
Figure 1a (Dérivées partielles pour les fonctions à deux variables)



(a)

Dérivées partielles d'ordre 1

Figure 1b (Dérivées partielles pour les fonctions à deux variables)



(b)

Dérivées partielles d'ordre 1

Definition (1)

La **dérivée partielle d'ordre 1** d'une fonction $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ par rapport à la variable x_i est

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

- Les notations suivantes sont interchangeables: $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $f_i(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ou simplement f_i.
- Lorsque l'on calcul f_i, toutes les variables autres que x_i restent constantes, d'où le nom de **dérivée partielle**.
- De plus, f_i dépend généralement de toutes les variables de $\mathbf{x}$.

Dérivées partielles d'ordre 1

Example (1)

Soit une firme vendant deux biens, le bien 1 et le bien 2, sur des **marchés concurrentiels**. Sa fonction de **recette totale** est

$$R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

où x_i représente la quantité de bien i vendue, et p_i représente le prix de marché du bien i (avec $i = 1, 2$).

- L'**hypothèse concurrentielle** implique que le niveau de production de la firme n'affecte pas les prix de marché p_1 et p_2 (considérés constants). On dit que la firme concurrentielle est **preneuse de prix**.

- D'après la **Définition 1**, la **dérivée partielle** de la fonction de **recette totale** par rapport à x_1 est calculée par

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{R\left(x_1 + \Delta x_1, x_2\right) - R\left(x_1, x_2\right)}{\Delta x_1} \\
&= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\left[p_1 \left[x_1 + \Delta x_1\right] + p_2 x_2\right] - \left[p_1 x_1 + p_2 x_2\right]}{\Delta x_1} \\
&= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{p_1 x_1 + p_1 \Delta x_1 + p_2 x_2 - p_1 x_1 - p_2 x_2}{\Delta x_1} \\
&= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{p_1 \Delta x_1}{\Delta x_1} \\
&= p_1
\end{aligned}
$$

- Si l'entreprise vend une unité de bien 1 supplémentaire, *ceteris paribus*, sa recette totale augmente d'un montant égal au prix unitaire du bien 1, i.e. p_1.
- R_1 est donc une constante qui ne dépend pas des variables x_1 et x_2 controlées par la firme.
  - Mathématiquement, l'indépendance de R_1 par rapport aux variables x_1 et x_2 résulte du fait que la fonction R est **linéaire** par rapport aux variables x_1 et x_2.
  - Cette propriété d'indépendance ne s'applique généralement pas aux fonctions **non-linéaires**, comme l'illustre l'exemple suivant.

Dérivées partielles d'ordre 1

Example (2)

Soit une fonction **non-linéaire** à deux variables:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

- D'après la **Définition 1**, la **dérivée partielle** de f par rapport à x_1 est calculée par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f\left(x_1+\Delta x_1,x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)}{\Delta x_1}\\
&= \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\left[x_1+\Delta x_1\right]^2 x_2-x_1^2x_2}{\Delta x_1}\\
&= \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\left[\left[x_1+\Delta x_1\right]^2-x_1^2\right]x_2}{\Delta x_1}\\
&= \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\left[x_1^2+\left[\Delta x_1\right]^2+2x_1\Delta x_1-x_1^2\right]x_2}{\Delta x_1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\left[x_1^2 + \left[\Delta x_1\right]^2 + 2x_1 \Delta x_1 - x_1^2\right] x_2}{\Delta x_1} \\
&= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\left[\left[\Delta x_1\right]^2 + 2x_1 \Delta x_1\right] x_2}{\Delta x_1} \\
&= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \left[\Delta x_1 + 2x_1\right] x_2 \\
&= 2x_1 x_2
\end{aligned}
$$

- La **dérivée partielle** de f par rapport à x_1 dépend ici de x_1 et de x_2 (contrairement à la fonction **linéaire** de l'**Exemple 1**).

- Plutôt que d'appliquer la **Définition 1**, on peut calculer les **dérivées partielles** de la même manière que pour une fonction à une variable.
- Comme on maintient constantes toutes les variables de la fonction f, autres que x_i, lorsque l'on calcule f_i, on peut traiter toutes ces autres variables comme des constantes et considérer la fonction f comme une fonction à une variable x_i.

- Dans l'**Exemple 1**, la fonction de **recette totale** est $R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$. Pour calculer R_1, on peut considérer R comme une fonction à une variable avec x_2 fixée:

$$R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + c, \quad \text{où } c = p_2 x_2$$

- La **dérivée partielle** par rapport à x_1 est alors simplement

$$\frac{\partial R(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial [p_1 x_1 + c]}{\partial x_1} = p_1$$

Calcul direct de la dérivée partielle (Exemple 2)

- Dans l'**Exemple 2**, la fonction est $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$. Pour calculer f_1, on peut considérer f comme une fonction à une variable avec x_2 fixée:

$$f(x_1, x_2) = cx_1^2, \quad \text{où } c = x_2$$

- La **dérivée partielle** par rapport à x_1 est alors simplement

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial \left[cx_1^2\right]}{\partial x_1} = 2cx_1$$

- En substituant $c = x_2$, on obtient (évidemment) le même résultat qu'en utilisant la **Définition 1**:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_2 x_1$$

- On peut appliquer la même technique pour les fonctions à plus de deux variables $f(x_1, ..., x_n)$. Soit une fonction à trois variables

$$y = 5x_1^2 x_2^4 x_3^6$$

- Par exemple, pour calculer $\frac{\partial y}{\partial x_2}$, on peut considérer y comme une fonction à une variable x_2, avec x_1 et x_3 fixées:

$$y = cx_2^4 \quad \text{où} \quad c = 5x_1^2 x_3^6$$

- La **dérivée partielle** par rapport à x_2 est alors simplement

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial \left[cx_2^4\right]}{\partial x_2} = 4cx_2^3$$

- En substituant $c = 5x_1^2 x_3^6$, on obtient

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 4\left[5x_1^2 x_3^6\right] x_2^3 = 20x_1^2 x_2^3 x_3^6$$

- Avec un peu de pratique, il n'est plus nécessaire d'identifier explicitement la constante c.
- On voit directement, en considérant x_1 et x_3 comme des constantes, que la **dérivée partielle** par rapport à x_2 est

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial \left[5x_1^2 x_2^4 x_3^6\right]}{\partial x_2} = 4 \times 5x_1^2 x_2^{4-1} x_3^6 = 20x_1^2 x_2^3 x_3^6$$

- Dans l'**Exemple 2**, nous avons observé que la valeur de la **dérivée partielle** d'une fonction à plusieurs variables dépend non seulement de la valeur de la variable par rapport à laquelle on effectue la dérivation, mais également des autres variables.
- De même, $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 20x_1^2 x_2^3 x_3^6$, calculée ci-dessus, dépend non seulement de la valeur de x_2, mais également de la valeur de x_1 et de la valeur de x_3.
- Il existe cependant une classe de fonctions pour lesquelles la **dérivée partielle** par rapport à une variable x_i ne dépend pas des autres variables x_j, $j \neq i$.

Definition (2)

Une fonction $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ qui peut s'écrire sous la forme

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = g^1(x_1) + g^2(x_2) + ... + g^n(x_n)$$

est **additivement séparable**.

Example (3)

Les fonctions suivantes sont des exemples de fonctions **additivement séparables**:

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 5x_2$$

où $g^1(x_1) = x_1^3$ et $g^2(x_2) = 5x_2$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 6x_2 + e^{x_3}$$

où $g^1(x_1) = 5x_1^2$, $g^2(x_2) = -6x_2$ et $g^3(x_3) = e^{x_3}$.

- Pour $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 5x_2$, on a

$$f_1 = \frac{\partial g^1(x_1)}{\partial x_1} = 3x_1^2 \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{\partial g^2(x_2)}{\partial x_2} = 5$$

- Pour $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 6x_2 + e^{x_3}$, on a

$$f_1 = \frac{\partial g^1(x_1)}{\partial x_1} = 10x_1, \quad f_2 = \frac{\partial g^2(x_2)}{\partial x_2} = -6, \quad f_3 = \frac{\partial g^3(x_3)}{\partial x_3} = e^{x_3}$$

- A chaque fois, la fonction étant **additivement séparable**, la **dérivée partielle** par rapport à une variable ne dépend pas des autres variables.

- En économie, on utilise notamment les **dérivées partielles** pour calculer la **productivité marginale** des **facteurs de production** d'une firme:

$$y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

où y représente la quantité de bien produite (extrant) par la firme, et x_i représente la quantité de facteur i utilisée (entrant) par la firme pour produire.

- Dans ce contexte, f_i reste une **approximation** de la **productivité marginale** du facteur i. Elle calcule (approximativement) la quantité supplémentaire de bien que la firme peut produire en utilisant une unité supplémentaire de facteur i.
    - D'après la **Définition 1**, on sait que les **dérivées partielles** sont calculées pour des variations infinitésimales, i.e. $\Delta x_i \to 0$. C'est pourquoi f_i reste une **approximation** de la **productivité marginale** du facteur i.
    - Toutefois, l'**approximation** peut être très bonne dès lors que l'on choisit des unités suffisamment "petites".

Dérivées partielles d'ordre 1

Fonctions de production et productivité marginale

- Comme la **dérivée partielle** f_i dépend généralement de toutes les variables de la **fonction de production**, on peut en donner une interprétation économique.
- Par exemple, la production supplémentaire générée par une unité de travail en plus peut dépendre positivement de la quantité de capital utilisée si le travail et le capital sont **complémentaires** dans la production.
- L'exemple suivant illustre ce point.

Dérivées partielles d'ordre 1

Example (4)

Soit une **fonction de production** à deux facteurs de type **Cobb-Douglas**:

$$y = 10x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$$

Les **productivités marginales** sont

$$f_1 = 5x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = 5\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$f_2 = 5x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} = 5\left[\frac{x_1}{x_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

- On peut alors calculer le ratio des **productivités marginales** appelé TMST (**Taux Marginal de Substitution Technique**) du facteur 2 au facteur 1:

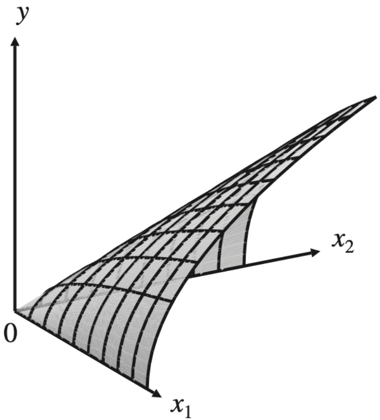
$$\mathrm{TMST}_{2,1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{5\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{\frac{1}{2}}}{5\left[\frac{x_1}{x_2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{x_2}{x_1}$$

- Noter que pour les **fonctions de production** à deux facteurs, on allège généralement la notation du TMST en supprimant l'indice $2,1$.

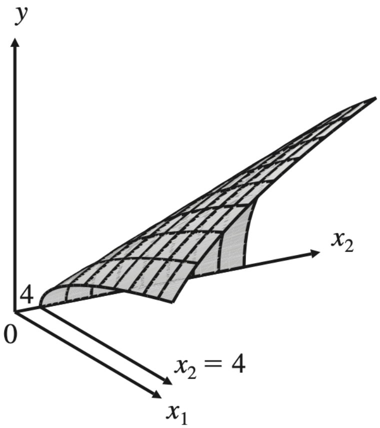
- Les **Figures 2a**, **2b**,**2c** et **2d** ci-dessous illustrent le fait que la relation entre y et x_1 dépend de la valeur de x_2, en considérant deux valeurs de x_2 ($x_2 = 4$ et $x_2 = 9$).
- La **Figure 3**, illustre le fait que la **productivité marginale** du travail $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 5\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{\frac{1}{2}}$ est d'autant plus forte que le niveau de capital x_2 est élevé (elle est plus forte pour $x_2 = 9$ que pour $x_2 = 4$).
- Pour $x_2 = 4$, on a $y = 20x_1^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 10x_1^{-\frac{1}{2}}$.
- Pour $x_2 = 9$, on a $y = 30x_1^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 15x_1^{-\frac{1}{2}}$.

Dérivées partielles d'ordre 1

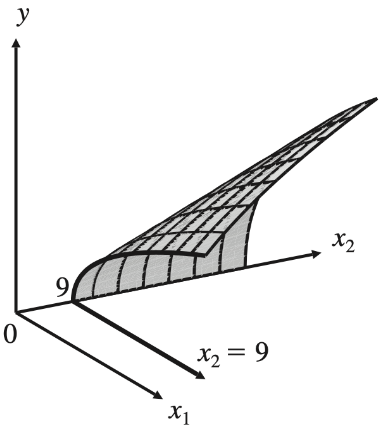
Figure 2a (Exemple 4)



(a)



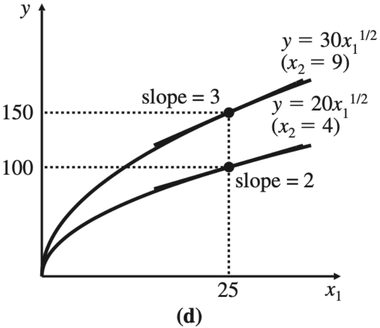
(b)



(c)

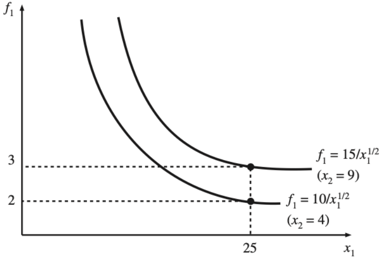
Dérivées partielles d'ordre 1

Figure 2d (Exemple 4)



Dérivées partielles d'ordre 1

Figure 3 (Exemple 4)



Dérivées partielles d'ordre 1

Example (5)

Soit une **fonction de production** générale à deux facteurs de type **Cobb-douglas**:

$$y = f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad A > 0,\, 0 < \alpha, \beta < 1$$

où A, α et β sont des paramètres technologiques.

- Les **productivités marginales** sont

$$f_K = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} \quad \text{et} \quad f_L = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}$$

- Compte tenu des hypothèses sur les paramètres, la **loi de productivité marginale décroissante des facteurs** est vérifiée. De plus, les facteurs de production sont **complémentaires** (e.g. une hausse de K augmente f_L).
- Le TMST du travail au capital est

$$\text{TMST}_{L,K} = \frac{f_K}{f_L} = \frac{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{L}{K}$$

Example (6)

Soit une **fonction de production** générale à trois facteurs de type **Cobb-Douglas**:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$$

où $A > 0$ et $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ sont des paramètres technologiques.

Dérivées partielles d'ordre 1

Exemple 6

- Les **productivités marginales** sont

$$f_1 = A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}, \quad f_2 = A\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma}, \quad f_3 = A\gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1}$$

- Encore une fois, la **productivité marginale** du facteur i diminue quand le facteur i augmente (**loi de la productivité marginale décroissante des facteurs**), et elle augmente quand les autres facteurs $j \neq i$ augmentent (**complémentarité des facteurs**).

- En présence de plus de deux facteurs, on peut calculer le TMST pour chaque paire de facteur:

$$\mathrm{TMST}_{j,i} = \frac{f_i}{f_j}$$

- Dans l'**Exemple 6**, on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{TMST}_{2,1} &= \frac{f_1}{f_2} = \frac{A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}}{A\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1} \\
\mathrm{TMST}_{3,1} &= \frac{f_1}{f_3} = \frac{A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}}{A\gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1}} = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{x_3}{x_1} \\
\mathrm{TMST}_{3,2} &= \frac{f_2}{f_3} = \frac{A\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma}}{A\gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1}} = \frac{\beta}{\gamma}\frac{x_3}{x_2}
\end{aligned}$$

- Les résultats se généralisent facilement à une **fonction de production** à N facteurs de type **Cobb-Douglas**

$$y = f\left(x_1, ..., x_N\right) = A\prod_{n=1}^{N} x_n^{\alpha_n}$$

où $A > 0$, $0 < \alpha_n < 1$ $(n = 1, ..., N)$ sont des paramètres technologiques.

- Pour un facteur x_i $(i = 1, ..., n)$, la **productivité marginale** est

$$\begin{aligned} f_i &= A\alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{N} x_n^{\alpha_n} = A\alpha_i \frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{x_i^{\alpha_i}} \prod_{n=1}^{N} x_n^{\alpha_n} \\ &= \alpha_i \frac{x_i^{\alpha_i - 1}}{x_i^{\alpha_i}} y = \frac{\alpha_i}{x_i} y \end{aligned}$$

- Le TMST entre deux facteurs i et j est

$$\mathrm{TMST}_{j,i} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{\frac{\alpha_i}{x_i}y}{\frac{\alpha_j}{x_j}y} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i}$$

- Remarquer l'analogie avec le cas où $n = 2$ (**Exemple 5**) et le cas $n = 3$ (**Exemple 6**) ci-dessus.

Example (7)

Soit une **fonction de production** générale à deux facteurs de type **CES** (**Constant Elasticity of Substitution**):

$$y = f(x_1, x_2) = A\left[\delta x_1^{-r} + (1-\delta)\, x_2^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}}$$

où $A > 0$, $0 < \delta < 1$, et $r > -1$ sont des paramètres technologiques. L'**élasticité de substitution** est $\sigma = \frac{1}{1+r}$.

- Les **productivités marginales** de la fonction **CES** sont

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{1}{r}\delta\left[-r\right]x_1^{-r-1}A\left[\delta x_1^{-r}+\left[1-\delta\right]x_2^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}-1} \\
&= \delta x_1^{-r-1}A\left[\delta x_1^{-r}+\left[1-\delta\right]x_2^{-r}\right]^{-\frac{1+r}{r}}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
f_2 &= -\frac{1}{r}\left[1-\delta\right]\left[-r\right]x_2^{-r-1}A\left[\delta x_1^{-r}+\left[1-\delta\right]x_2^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}-1} \\
&= \left[1-\delta\right]x_2^{-r-1}A\left[\delta x_1^{-r}+\left[1-\delta\right]x_2^{-r}\right]^{-\frac{1+r}{r}}
\end{aligned}
$$

- On peut simplifier les expressions des **productivités marginales** en faisant apparaître y.
- On multiplie f_i par $\frac{A^r}{A^r}$, et on passe x_i^{-r-1} au dénominateur, pour obtenir

$$f_1 = \frac{\delta A^{1+r}\left[\delta x_1^{-r} + [1-\delta]\, x_2^{-r}\right]^{-\frac{1+r}{r}}}{A^r x_1^{1+r}}$$

et

$$f_2 = \frac{[1-\delta]\, A^{1+r}\left[\delta x_1^{-r} + [1-\delta]\, x_2^{-r}\right]^{-\frac{1+r}{r}}}{A^r x_2^{1+r}}$$

- En remarquant que

$$
\begin{aligned}
A^{1+r}\left[\delta x_1^{-r}+[1-\delta]\,x_2^{-r}\right]^{-\frac{1+r}{r}} &= \left[A\left[\delta x_1^{-r}+(1-\delta)\,x_2^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}}\right]^{1+r} \\
&= y^{1+r}
\end{aligned}
$$

- On obtient finalement des expressions plus simples

$$
f_1=\frac{\delta}{A^r}\left[\frac{y}{x_1}\right]^{1+r} \quad \text{et} \quad f_2=\frac{[1-\delta]}{A^r}\left[\frac{y}{x_2}\right]^{1+r}
$$

- L'**élasticité de substitution** est un concept microéconomique. Elle reflète la facilité/difficulté avec laquelle on peut passer d'un facteur de production à un autre dans la production d'une certaine quantité de bien.
- Lorsque $\sigma \longrightarrow 1$ on obtient une fonction **Cobb-Douglas**
- Lorsque $\sigma \longrightarrow \infty$ on obtient une fonction **linéaire** (substituabilité parfaite)
- Lorsque $\sigma \longrightarrow 0$ on obtient la fonction de **Leontief** (complémentarité parfaite).

- L'**élasticité de substitution** entre deux facteurs i et j est définie par

$$\sigma_{j,i} = \frac{\frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}}}{\frac{d\mathrm{TMST}_{j,i}}{\mathrm{TMST}_{j,i}}}$$

  où $\mathrm{TMST}_{j,i} = \frac{f_i}{f_j}$.

- Comme toutes les **élasticités**, c'est un rapport de taux de variation. Par exemple, une variation de 10% du TMST s'accompagne d'une variation de $\sigma \times 10\%$ du ratio $\frac{x_j}{x_i}$.

- Avec la **fonction de production** de type **CES** de l'**Exemple 7**, on a:

$$\mathrm{TMST}_{2,1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{\delta}{A^r}\left[\frac{y}{x_1}\right]^{1+r}}{\frac{[1-\delta]}{A^r}\left[\frac{y}{x_2}\right]^{1+r}} = \frac{\delta\left[\frac{1}{x_1}\right]^{1+r}}{[1-\delta]\left[\frac{1}{x_2}\right]^{1+r}} = \frac{\delta}{1-\delta}\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{1+r}$$

et

$$d\mathrm{TMST}_{2,1} = \frac{\delta}{1-\delta}\,[1+r]\, d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{r}$$

- Ainsi, on obtient

$$\frac{d\mathrm{TMST}_{2,1}}{\mathrm{TMST}_{2,1}} = \frac{\frac{\delta}{1-\delta}\left[1+r\right] d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^r}{\frac{\delta}{1-\delta}\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{1+r}} = \left[1+r\right]\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}$$

et donc finalement

$$\sigma_{2,1} = \frac{\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}}{\frac{d\mathrm{TMST}_{2,1}}{\mathrm{TMST}_{2,1}}} = \frac{\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}}{\left[1+r\right]\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}} = \frac{1}{1+r}$$

- Noter que $r \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma \rightarrow 1$ (**Cobb-Douglas**), $r \rightarrow -1 \Rightarrow \sigma \rightarrow \infty$ (**substituts parfaits**) et $r \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma \rightarrow 0$ (**Leontief** / **compléments parfaits**).

Avec une **fonction de production** générale à N facteurs de type **Cobb-Douglas**

$$y = f\left(x_1, ..., x_n\right) = A \prod_{n=1}^{N} x_n^{\alpha_n}$$

on a vu que:

$$\mathrm{TMST}_{j,i} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i}$$

et

$$d\mathrm{TMST}_{j,i} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)$$

- L'**élasticité de substitution** est unitaire pour les **fonctions de production** de type **Cobb-Douglas**:

$$\frac{d\mathrm{TMST}_{j,i}}{\mathrm{TMST}_{j,i}} = \frac{\frac{\alpha_i}{\alpha_j} d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i}} = \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}}$$

et donc finalement

$$\sigma_{j,i} = \frac{\frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}}}{\frac{d\mathrm{TMST}_{j,i}}{\mathrm{TMST}_{j,i}}} = \frac{\frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}}}{\frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}}} = 1$$

1. Dérivées partielles d'ordre 1
2. **Dérivées partielles d'ordre 2**
3. Différentielle totale
4. Propriétés de courbure (concavité et convexité)
5. D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

- Pour une fonction à une variable $f(x)$, sa **dérivée première** est elle-même une fonction $f'(x)$.
- On peut alors calculer la dérivée de $f'(x)$, appelée **dérivée seconde** et notée $f''(x)$, qui est également une fonction.
- On peut continuer ainsi jusqu'à la **dérivée d'ordre** k, notée $f^{(k)}(x)$, où $k = 1, 2, 3, \ldots$ est l'ordre de la dérivée.

- Pour les fonctions à n variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, nous avons vu, dans la **section 1.1**, comment calculer les n dérivées partielles par rapport à chaque variable: f_1, f_2,..., f_n.
- Chacune de ces **dérivées partielles** est elle-même une fonction $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ pour laquelle on peut calculer les n **dérivées partielles**.
- La fonction $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ possède donc n^2 **dérivées partielles d'ordre 2**.
- Plus généralement, la fonction $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ possède donc n^k **dérivées partielles d'ordre** $k = 1, 2, 3, ...$.

- En économie, on se limite généralement à l'étude des **dérivées partielles d'ordre** $k = 1, 2$.
- Les **dérivées partielles d'ordre 2** de la fonction $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ s'écrivent

$$\frac{\partial f_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{ou} \quad f_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\text{ou simplement} \quad f_{ij}, \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3, ..., n$$

- Etant donné que les **dérivées partielles** deviennent nombreuses (même en se limitant à l'ordre 2), on les catalogue en utilisant les notations vectorielles et matricielles.
- Le vecteur contenant les dérivées partielles d'ordre 1 d'une fonction est appelé le **gradient** (vecteur colonne ou vecteur ligne en transposé):

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \nabla f^T = [f_1, f_2, \dots, f_n]$$

- Le terme de **gradient** vient du fait qu'il indique la pente de la fonction par rapport à ses différentes variables.

Dérivées partielles d'ordre 2

Example (8)

Soit la fonction à deux variables

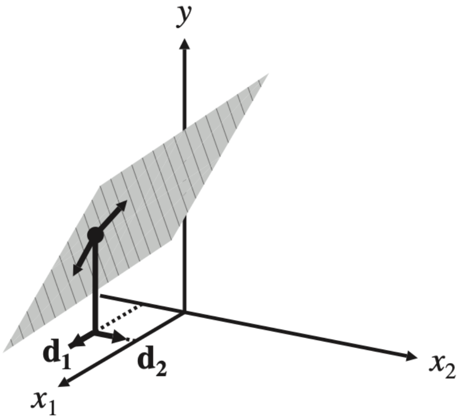
$$f(x_1, x_2) = 5 - 2x_1 + 3x_2$$

- Les **dérivées partielles** de la fonction de l'**Exemple 8** sont:

$$f_1 = -2 \quad \text{et} \quad f_2 = 3$$

- Le **gradient** de la fonction est donc

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



y
d1
d2
x2
x1

Example (9)

Soit une fonction à trois variables

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$$

- Les **dérivées partielles** de la fonction de l'**Exemple 9** sont:

$$f_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}, \quad f_2 = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma}, \quad f_3 = \gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1}$$

- Le **gradient** de la fonction est donc

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \\ \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma} \\ \gamma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

- Pour une fonction à deux variables, il existe 2^k **dérivées partielles d'ordre** k. Pour $k = 2$, on a $2^2 = 4$ **dérivées partielles**:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad f_{12} = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ f_{21} &= \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad f_{22} = \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{aligned}$$

- Pour une fonction à trois variables, il existe 3^k **dérivées partielles d'ordre** k. Pour $k = 2$, on a $3^2 = 9$ **dérivées partielles d'ordre 2**:

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{\partial f_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}, \quad f_{12} = \frac{\partial f_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}, \quad f_{13} = \frac{\partial f_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \\
f_{21} &= \frac{\partial f_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}, \quad f_{22} = \frac{\partial f_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}, \quad f_{23} = \frac{\partial f_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \\
f_{31} &= \frac{\partial f_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}, \quad f_{32} = \frac{\partial f_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}, \quad f_{33} = \frac{\partial f_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}
\end{aligned}
$$

- Et ainsi de suite, pour une fonction à n variables, il existe n^2 **dérivées partielles d'ordre 2**.

- On utilise alors une matrice pour cataloguer les **dérivées partielles d'ordre 2**, appelée **matrice Hessienne**:

$$\nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad \text{pour 2 variables}$$

$$\nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \text{pour 3 variables}$$

$$\nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{pour } n \text{ variables}$$

ou plus simplement

$$\nabla_2 F = [f_{ij}] \quad \text{pour } n \text{ variables}$$

Remarque sur les notations

- On utilise la notation ∇_k pour signifier qu'il s'agit des **dérivées partielles d'ordre** k.
- Donc la notation ∇_2 indique qu'il s'agit des **dérivées partielles d'ordre 2**.
- On utilise la notation majuscule F pour signifier qu'il s'agit d'une **matrice** (contrairement au **gradient**, ∇f, qui est un **vecteur**).

Example (10)

Soit la fonction à deux variables

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 x_2$$

- Les **dérivées partielles** sont:

$$f_1 = 2x_1x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = x_1^2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont:

$$\begin{aligned} f_{11} &= 2x_2, \quad f_{12} = 2x_1 \\ f_{21} &= 2x_1, \quad f_{22} = 0 \end{aligned}$$

- Le **gradient** et **matrice Hessienne** sont

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$$

et

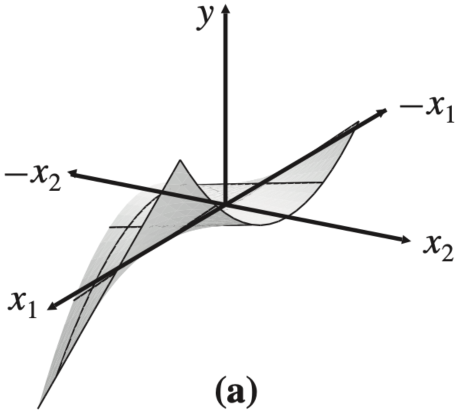
$$\nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sur la **Figure 5a**, on a représenté la fonction $y = x_1^2 x_2$ dans l'espace à trois dimensions.
  - Sur la **Figure 5b**, on suppose $x_2 > 0$. Dans ce cas $f_{11} > 0$. La fonction est **convexe** par rapport à x_1.
  - Sur la **Figure 5c**, on suppose $x_2 < 0$. Dans ce cas $f_{11} < 0$. La fonction est **concave** par rapport à x_1.

- Sur la **Figure 6**, on a représenté à nouveau la fonction $y = x_1^2 x_2$, mais avec une coupe (pour faciliter la lecture).
  - Comme $f_{12} > 0$ pour $x_1 > 0$, la pente de la fonction par rapport à x_1 (avec x_2 fixée) est plus forte au point $v = (a, d)$ qu'au point $u = (a, b)$, car la valeur de x_2 est plus forte au point v, où $x_2 = d$, qu'au point u, où $x_2 = b$ (avec $d > b$).

Dérivées partielles d'ordre 2

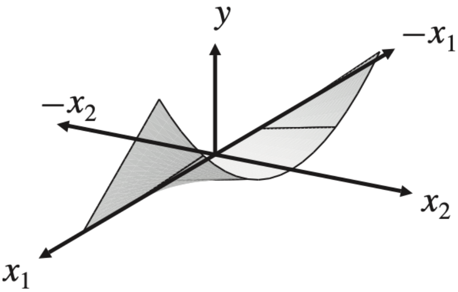
Figure 5a (Exemple 10)



(a)

Dérivées partielles d'ordre 2

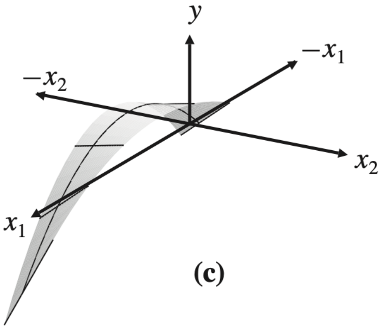
Figure 5b (Exemple 10)



(b)

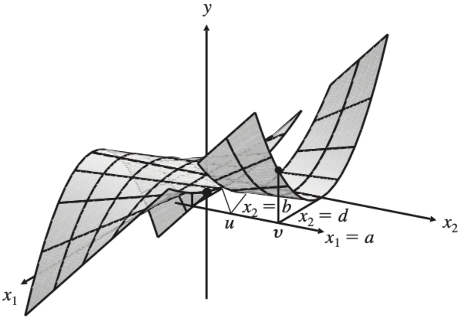
Dérivées partielles d'ordre 2

Figure 5c (Exemple 10)



(c)

Figure 6 (Exemple 10)



- Finalement, on peut remarquer que $f_{12} = f_{21} = 2x_1$.
- L'ordre dans lequel on effectue la dérivation n'a pas d'impact sur le résultat.
- La **matrice Hessienne** est donc symétrique (avec la diagonale comme axe de symétrie).
- Ceci n'est pas une coïncidence, comme l'illustre le **Théorème 1** ci-dessous, appelé **Théorème de Young**.

Theorem (1)

Pour une fonction $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, avec des **dérivées partielles d'ordre 1 et 2** *continues, l'ordre de dérivation est sans conséquence. Formellement, on a*

$$f_{ij} = f_{ji} \qquad \begin{array}{l} \forall i = 1, 2, ..., n \\ \forall j = 1, 2, ..., n \end{array}$$

C'est le **théorème de Young***.*

Example (11)

Soit une fonction à trois variables

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 e^{3x_2 + x_1 x_3} + \frac{2x_2^3}{x_1}$$

- D'après le **Théorème de Young**, on s'attend à ce que les **dérivées partielles croisées d'ordre 2** vérifient:

$$f_{12} = f_{21}, \quad f_{13} = f_{31}, \quad \text{et } f_{23} = f_{32}$$

Pour illustrer, montrons que $f_{23} = f_{32}$ (vérifier les autres égalités en exercice).

- Les **dérivées partielles** par rapport aux variables x_2 et x_3 sont

$$f_2 = 3x_1^2 e^{3x_2 + x_1 x_3} + \frac{6x_2^2}{x_1} \quad \text{et} \quad f_3 = x_1^3 e^{3x_2 + x_1 x_3}$$

- Les **dérivées partielles croisées d'ordre 2** entre les variables x_2 et x_3 sont:

$$f_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 3x_1^3 e^{3x_2 + x_1 x_3} \quad \text{et} \quad f_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 3x_1^3 e^{3x_2 + x_1 x_3}$$

Dérivées partielles d'ordre 2

Fonctions additivement séparables

- Pour les fonctions **additivement séparables** de la forme

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = g^1(x_1) + g^2(x_2) + ... + g^n(x_n)$$

les **dérivées partielles croisées d'ordre 2** sont nulles (car f_i ne dépend que de x_i, et donc $f_{ij} = 0$).

- Le **gradient** est

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^1(x_1)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g^2(x_2)}{\partial x_2} \\ ... \\ \frac{\partial g^n(x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- La **matrice Hessienne** est

$$\nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g^1(x_1)}{\partial x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 g^2(x_2)}{\partial x_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^2 g^n(x_n)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Example (12)

Soit une **fonction de production** générale à deux facteurs de type **Cobb-douglas**:

$$y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} \quad A > 0,\ 0 < \alpha, \beta < 1$$

où A, α et β sont des paramètres technologiques.

- Les **productivités marginales** sont cataloguées dans le **gradient**

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} \\ \beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} \end{bmatrix}$$

- Les restrictions sur les paramètres ($A > 0$ et $\alpha, \beta > 0$) impliquent que les **productivités marginales** sont positives (une plus grande quantité de facteurs utilisée implique une hausse de la production).
- Le TMST est

$$\mathrm{TMST}_{2,1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{\beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont cataloguées dans la **matrice Hessienne**:

$$\nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha - 1]\, \alpha A x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} & \beta\alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & [\beta - 1]\, \beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

- Les restrictions sur les paramètres ($A > 0$ et $0 < \alpha, \beta < 1$) impliquent que $f_{11} < 0$ et $f_{22} < 0$, i.e. les **productivités marginales** sont **décroissantes** (une plus grande quantité de facteur i utilisée implique une baisse de la **productivité marginale** du facteur i). C'est la **loi des rendements marginaux décroissants**.
- Elles impliquent également que $f_{12} = f_{21} > 0$. La **productivité marginale** de chaque facteur augmente lorsque l'on accroît l'usage de l'autre facteur (**complémentarité des facteurs**).

- Pour une fonction à une variable $y = f(x)$, la **différentielle** est

$$dy = f'(x)\, dx$$

- Pour une valeur spécifique de x, disons $x = a$, on peut utiliser cette expression pour calculer la variation de y, notée Δy, suite à une variation de x, noté Δx, à partir de $x = a$.
- La variation **exacte** de y est calculée par

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

- Elle peut être **approximée** par la **différentielle**:

$$dy = f'(a)\, dx, \quad \text{où } dx = \Delta x$$

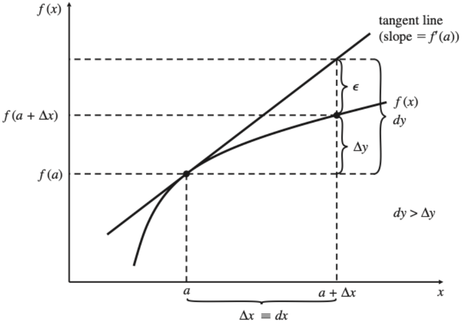
- La **Figure 7** illustre la différence entre la **valeur exacte** Δy et l'**approximation** par la **différentielle** dy.
- L'erreur est mesurée par

$$\epsilon = \Delta y - dy$$

- Grâce à la **Figure 7**, on comprend aisément que $\epsilon \to 0$ lorsque $\Delta x \to 0$. Ainsi, l'**approximation** est très bonne dès lors que la variation de x est "petite".

Différentielle totale

Figure 7



- On peut facilement étendre ce raisonnement à des fonctions de plusieurs variables, mais l'interprétation géométrique ne reste (évidemment) possible que pour des fonctions à deux variables $f(\mathbf{x})$, avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
- Pour une fonction à deux variables $f(x_1, x_2)$, on peut calculer les variations de la fonction en faisant varier x_1 (avec x_2 fixée), puis x_2 (avec x_1 fixée).
- Ce calcul rappelle celui des **dérivées partielles** (mais la variation ne tend pas nécessairement vers zéro).

- Pour une valeur spécifique de $\mathbf{x}$, disons $\mathbf{x} = (a_1, a_2)$, on peut calculer la variation de y, soit Δy, suite à une variation de x_1 (avec x_2 fixée).
- La variation **exacte** de y est calculée par

$$\Delta y = f\left(a_1 + \Delta x_1, a_2\right) - f\left(a_1, a_2\right)$$

- Elle peut être approximée par la **différentielle**

$$dy = f_1\left(a_1, a_2\right) dx_1, \quad \text{où } dx_1 = \Delta x_1 \text{ et } dx_2 = 0$$

- Pour une valeur spécifique de $\mathbf{x}$, disons $\mathbf{x} = (a_1, a_2)$, on peut calculer la variation de y, soit Δy, suite à une variation de x_2 (avec x_1 fixée).
- La variation **exacte** de y est calculée par

$$\Delta y = f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)$$

- Elle peut être **approximée** par la **différentielle**

$$dy = f_2(a_1, a_2)\, dx_2, \quad \text{où } dx_2 = \Delta x_2 \text{ et } dx_1 = 0$$

Différentielle totale

Definition (3)

La **différentielle totale** de la fonction de deux variables $y = f(x_1, x_2)$ est

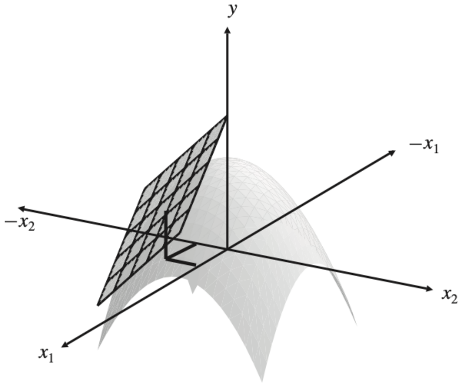
$$dy = f_1(x_1, x_2)\, dx_1 + f_2(x_1, x_2)\, dx_2$$

- La **Figure 8** illustre l'**erreur d'approximation** par la **différentielle totale** $\epsilon = \Delta y - dy$ pour la fonction

$$y = 1 - x_1^2 - x_2^2$$

- Comme nous somme dans un espace à trois dimensions, l'**erreur** est mesurée par la distance verticale entre la fonction et celle du **plan tangent** au point (a_1, a_2).

Différentielle totale
Figure 8



- Pour les **fonctions linéaires** à une variable, la **différentielle totale** fournit une **approximation exacte** de la variation de la fonction ($\epsilon = 0$), quelle que soit la taille du changement de la variable. La **tangente** d'une droite est la droite elle-même.
- La **différentielle totale** fournit également une **approximation exacte** pour les **fonctions linéaires à plusieurs variables**.
- Pour une fonction à deux variables, le **plan tangent** d'un plan est le plan lui-même.

- Pour illustrer ce point, considérons la **fonction linéaire** à deux variables
$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$
- Une hausse de 4 unités de x_1 génère une hausse de 8 unités de y, et une hausse de 5 unités de x_2 génère une hausse de 15 unités de y:
$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_1 + 4, x_2 + 5) - f(x_1, x_2) \\ &= 2[x_1 + 4] + 3[x_2 + 5] - [2x_1 + 3x_2] \\ &= 8 + 15 = 23 \end{aligned}$$
- La **différentielle totale** donne la **valeur exacte** de la variation de y:
$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 2(4) + 3(5) = 8 + 15 = 23$$

- Pour les **fonctions non-linéaires**, la **différentielle totale** reste une **approximation** de la variation **exacte** de la fonction.
- La raison est que les **dérivées partielles** ne sont pas constantes pour les fonctions **non-linéaires**.
- Dans le calcul de la **différentielle totale** dy, on suppose que f_1 et f_2 restent constantes lorsque l'on passe de (x_1, x_2) à $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$, car on utilise le **plan tangent**.

- Pour illustrer, considérons la fonction **non-linéaire** à deux variables

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

- Entre les points $(1, 1)$ et $(5, 6)$, par exemple, on a $dx_1 = 4$ et $dx_2 = 5$.
- La **valeur exacte** de la variation de y est

$$\Delta y = f(5, 6) - f(1, 1) = 30 - 1 = 29$$

- La **différentielle totale** donne une assez mauvaise **approximation** ($\epsilon = 20$) dans ce cas:

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = x_2 dx_1 + x_1 dx_2 = 1(4) + 1(5) = 9$$

- Bien entendu, pour de "petites" variations de x_1 et x_2, l'**erreur d'approximation** reste raisonnable.
- Par exemple, en exercice, vous pouvez calculer l'erreur $(\epsilon = 0.06)$ lorsque l'on passe du point $(1, 1)$ au point $(1.2, 1.3)$.

- On peut rencontrer une équation dans laquelle y est **implicitement** définie comme une fonction de $x \in \mathbb{R}$.
- Par exemple,
$$2y + 4x - 10 = 0$$
- On dit que y est une **fonction implicite** de x.
- Pour une valeur de x donnée, il existe une valeur spécifique de y qui résout l'équation.

- Un calcul algébrique élémentaire établit que

$$2y + 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 5$$

- On peut alors en déduire la **différentielle totale** de y:

$$dy = -2dx$$

- Mais il n'est pas toujours évident d'exprimer y en fonction de x comme ci-dessus.
- Comment calculer la **différentielle totale** dans ce cas?
- Par exemple, considérons

$$e^{x^2+y} - 5 = 0$$

- On peut calculer dy par **différenciation implicite**.

- D'abord supposons qu'il est possible d'exprimer y en fonction de x, i.e. supposons qu'il existe une fonction f telle que $y = f(x)$, et donc:

$$e^{x^2+y} - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2+f(x)} - 5 = 0$$

- En différenciant par rapport à x, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[e^{x^2+f(x)} - 5\right] &= 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{x^2+f(x)}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{d}{dx}\left[x^2 + f(x)\right]\right] e^{x^2+f(x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[2x + f'(x)\right] e^{x^2+f(x)} = 0 \end{aligned}$$

- Comme $e^{x^2+f(x)} > 0$, on obtient, de manière équivalente,

$$2x + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2x$$

- Par définition $dy = f'(x)\, dx$. On obtient donc

$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

- Même si c'est un peu plus compliqué que précédemment, on peut toutefois exprimer explicitement y en fonction de x pour cette fonction en utilisant le logarithme:

$$\begin{aligned} e^{x^2+y}-5 &= 0 \Leftrightarrow e^{x^2+y}=5 \Leftrightarrow \ln e^{x^2+y}=\ln 5 \Leftrightarrow x^2+y=\ln 5 \\ &\Leftrightarrow y=-x^2+\ln 5 \Leftrightarrow f(x)=-x^2+\ln 5 \end{aligned}$$

- Ainsi, on obtient, comme ci-dessus,

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-2x$$

- La première méthode par **différenciation implicite** peut sembler fastidieuse.
- Une méthode plus simple consiste à exprimer directement la relation entre x et y par la **fonction implicite**

$$F\left(x,y\right)=e^{x^2+y}-5=0$$

- La **différentielle totale** de cette fonction donne

$$dF\left(x,y\right)=F_x dx+F_y dy=0$$

et donc

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2xe^{x^2+y}}{e^{x^2+y}}=-2x$$

Différentielle totale

Théorème des fonctions implicites (deux variables)

Theorem (2)

Soit $F(x, y) = 0$ *une* **fonction implicite** *avec des dérivées partielles continues qui est satisfaite en un point* (x_0, y_0) *et définie aux alentours de ce point. Si* $F_y(x_0, y_0) \neq 0$*, alors il existe une* **fonction explicite** $y = f(x)$*, définie aux alentours de* $x = x_0$*, qui correspond à la* **fonction implicite** $F(x, y) = 0$*. Alors, on a:*

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{et} \quad f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

- Le **Théorème des fonctions implicites** établit sous quelles conditions il est possible de présumer que la **fonction implicite** $F(x, y) = 0$ implique une relation explicite entre x et y, i.e. $y = f(x)$, et comment calculer la dérivée de la **fonction explicite** f.
- Le point clé est que $F_y \neq 0$.
- L'exemple suivant illustre l'application du **Théorème 2**.

Example (13)

Soit la **fonction implicite** à deux variables (équation d'un cercle de rayon 5 et de centre $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$)

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

- On peut réécrire cette **fonction implicite** comme

$$x^2 = 25 - y^2 = 0$$

ou

$$y^2 = 25 - x^2 = 0$$

- En conséquence, on a

$$-5 \leq x \leq 5 \quad \text{et} \quad -5 \leq y \leq 5$$

(car le carré d'une variable réelle ne peut pas être négatif).

- La **fonction implicite** $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ est notamment vérifiée au point $(x_0, y_0) = (3, 4)$.
- Comme $F_Y = 2y$, on a $F_Y(x_0, y_0) = 2y_0$, et donc $F_Y(3, 4) = 8 \neq 0$.
- Le **Théorème 2** s'applique. Aux alentours du point $(x_0, y_0) = (3, 4)$, il existe une **fonction explicite** $y = f(x)$, avec

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

- Au point $(x_0, y_0) = (3, 4)$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{3}{4}$$

- Dans l'**Exemple 13**, il est encore une fois évident de trouver la **fonction explicite** $y = f(x)$.

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow y = f(x) = \left[25 - x^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

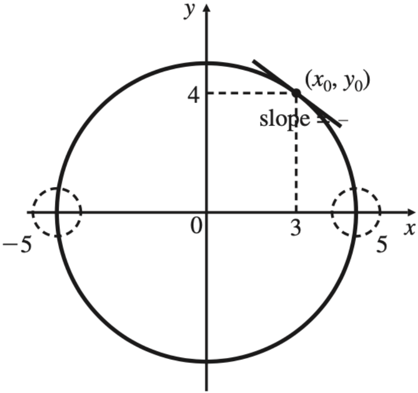
- En différenciant par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'(x) = \frac{1}{2}\left[-2x\right]\left[25 - x^2\right]^{\frac{1}{2}-1} \\ &= -x\left[25 - x^2\right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- Pour $x = x_0 = 3$, on retrouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{\sqrt{16}} = -\frac{3}{4}$$

- La **Figure 9** illustre les résultats de l'**Exemple 13**.
- Noter que les points $(5, 0)$ et $(-5, 0)$ qui satisfont la **fonction implicite**, ne satisfont pas les conditions du **Théorème 2**.
- Il n'est pas possible de trouver une **fonction explicite** $y = f(x)$ aux alentours de ces points.
- En effet, si f est une fonction, à chaque valeur de x doit correspondre une unique valeur de y, ce qui n'est pas le cas aux points $(5, 0)$ et $(-5, 0)$.
- Par contre, c'est notamment le cas au point $(3, 4)$ que nous avons choisi.



$\frac{3}{4}$

Example (14)

Soit la **fonction implicite** à deux variables

$$F(x, y) = x^2y^3 + 3xy^2 + y - 22 = 0$$

- La **fonction implicite** $F(x, y) = x^2y^3 + 3xy^2 + y - 22 = 0$ est notamment vérifiée au point $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
- Comme $F_Y = 3x^2y^2 + 6xy + 1$, on a $F_Y(1, 2) = 25 \neq 0$.
- Le **Théorème 2** s'applique. Aux alentours du point $(x_0, y_0) = (1, 2)$, il existe une **fonction explicite** $y = f(x)$, avec

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy^3 + 3y^2}{3x^2y^2 + 6xy + 1}$$

- Au point $(x_0, y_0) = (1, 2)$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{28}{25}$$

Theorem (3)

Soit $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ *une* **fonction implicite** *avec des dérivées partielles continues qui est satisfaite en un point* $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y^0)$ *et définie aux alentours de ce point. Si* $F_y \neq 0$ *à ce point, alors il existe une* **fonction explicite** $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, *définie aux alentours de* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, *qui correspond à la* **fonction implicite** $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$. *Alors, on a:*

$$y_0 = f\left(\mathbf{x}^0\right) \quad et \quad f_i\left(\mathbf{x}^0\right) = \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}$$

Différentielle totale

Example (15)

Soit une **fonction implicite** à trois variables

$$F(x_1, x_2, y) = 3x_1x_2 + x_2y^2 + x_1^2x_2y - 10 = 0$$

Différentielle totale

Exemple 15

- Utilisons le **Théorème 3** pour calculer les **dérivées partielles** $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial y}{\partial x_2}$.
- D'abord, les **dérivées partielles** de $F(x_1, x_2, y) = 3x_1x_2 + x_2y^2 + x_1^2x_2y - 10$ sont

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= 3x_2 + 2x_1x_2y \\ F_{x_2} &= 3x_1 + y^2 + x_1^2y \\ F_y &= 2x_2y + x_1^2x_2 \end{aligned}$$

- D'après le **Théorème (3)**, on peut expliciter la **fonction implicite** via la **fonction explicite** $y = f(x_1, x_2)$ autour de n'importe quel point, si $F_y \neq 0$ en ce point.
- Ainsi, en tout point où $F_y \neq 0$, on a:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_1 = -\frac{F_{x_1}}{F_y} = -\frac{3x_2 + 2x_1x_2y}{2x_2y + x_1^2x_2}$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_2 = -\frac{F_{x_2}}{F_y} = -\frac{3x_1 + y^2 + x_1^2y}{2x_2y + x_1^2x_2}$$

- Comme précédemment, on peut retrouver le résultat du **Théorème 3** grâce à la **différentielle totale** de la **fonction implicite**:

$$dF\left(x_1, x_2, y\right) = F_{x_1} dx_1 + F_{x_2} dx_2 + F_y dy = 0$$

- Pour calculer $\frac{\partial y}{\partial x_1}$, par exemple, on pose $dx_2 = 0$:

$$dF\left(x_1, x_2, y\right) = F_{x_1} dx_1 + F_y dy = 0$$

et donc

$$\left.\frac{dy}{dx_1}\right|_{dx_2=0} = \frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_y}$$

- De même pour calculer $\frac{\partial y}{\partial x_2}$, on pose $dx_1 = 0$.

- Pour une fonction $y = f(x_1, x_2)$, l'ensemble des couples (x_1, x_2) qui génèrent une même valeur de la fonction $\overline{y}$ est appelé **ensemble de niveau**.
- Si l'on peut résoudre cette équation en exprimant x_2 en fonction de x_1 et du niveau $\overline{y}$ constant, on obtient l'équation d'une **courbe de niveau** $\overline{y}$ dans le repère (x_1, x_2) pour n'importe quel niveau $\overline{y}$ donné.
- Le ratio $\frac{dx_2}{dx_1}$ est la **pente de la courbe de niveau** dans le repère (x_1, x_2).

- Une autre méthode consiste à utiliser la **différentielle totale**.
- L'avantage de cette méthode est qu'il n'est pas nécessaire d'exprimer x_2 en fonction de x_1, ce qui peut s'avérer fastidieux pour certaines fonctions.
- Une **courbe de niveau** $\overline{y}$ pour la fonction $f(x_1, x_2)$ s'écrit

$$\overline{y} = f(x_1, x_2) \quad \text{ou} \quad f(x_1, x_2) - \overline{y} = 0$$

- On obtient une **fonction implicite** à deux variables:

$$F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \overline{y} = 0$$

- On peut appliquer le **Théorème 2** :

$$dF(x_1, x_2) = df(x_1, x_2) = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 0 \quad \text{avec } d\bar{y} = 0$$

- Si $f_2 \neq 0$, la **pente d'une courbe de niveau** est

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\bar{y}} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dy=0} = -\frac{f_1}{f_2}$$

Example (16)

Soit une fonction à deux variables

$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

- Cherchons la **pente de la courbe de niveau** $\bar{y}$ en utilisant la **différentielle totale**:

$$df\left(x_1, x_2\right) = 2dx_1 + 3dx_2 = 0$$

- On a donc

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\bar{y}} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{2}{3}$$

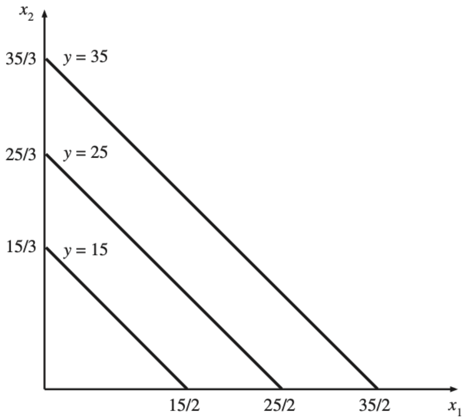
- Il est ici évident de trouver la relation explicite entre x_1 et x_2 pour un niveau $\overline{y}$, soit l'équation de la **courbe de niveau** $\overline{y}$:

$$\overline{y} = 2x_1 + 3x_2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}\overline{y}$$

  où la pente est effectivement $-\frac{2}{3}$.
- Sur la **Figure 10**, on a représenté trois courbes **de niveau** (qui sont des droites ici) pour $\overline{y} = 15,\ 25,\ 35$.

Différentielle totale

Figure 10



Example (17)

Soit une fonction à deux variables

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

- Cherchons la **pente de la courbe de niveau** $\overline{y}$ en utilisant le **Théorème 2**.
- Les **dérivées partielles** sont :

$$f_1 = 2x_1x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = x_1^2$$

et donc

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\overline{y}} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{2x_1x_2}{x_1^2} = -\frac{2x_2}{x_1}$$

- Il est encore une fois évident de trouver la relation explicite entre x_1 et x_2 pour un niveau $\overline{y}$, soit l'équation de la **courbe de niveau** $\overline{y}$:

$$\overline{y} = x_1^2 x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\overline{y}}{x_1^2} = \overline{y} x_1^{-2}$$

- La pente est

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -2\overline{y} x_1^{-3}$$

- En substituant $\overline{y} = x_1^2 x_2$, on retrouve

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\overline{y}} = -2x_1^2 x_2 x_1^{-3} = -2\frac{x_2}{x_1}$$

- Pour une **fonction de production** $y = f(x_1, x_2)$, la **courbe de niveau** $\overline{y}$ d'équation $x_2 = g(x_1)$ est définie par l'**ensemble de niveau** $\overline{y}$:

$$\{(x_1, x_2) : \overline{y} = f(x_1, x_2)\} \Rightarrow x_2 = g(x_1)$$

- Il s'agit de tous les couples de quantités de facteurs (x_1, x_2) qui permettent de **réaliser un même niveau de production** $\overline{y}$.
- Dans ce contexte, la **représentation graphique des courbes de niveau** $x_2 = g(x_1)$ est appelée **isoquantes de production**.

- Comme $dy = 0$ $(y = \bar{y})$, le long d'une **isoquante**, on a

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 0$$

- On obtient donc, comme précédemment,

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\bar{y}} = -\frac{f_1}{f_2}$$

- Dans ce contexte, la **valeur absolue de la pente** d'une **isoquante** est égale au TMST:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\bar{y}} = -\frac{f_1}{f_2} = -\text{TMST}_{2,1}$$

Différentielle totale

Example (18)

Soit une **fonction de production** à deux facteurs de type **Cobb-Douglas**

$$y = f\left(x_1, x_2\right) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

- La **différentielle totale** est

$$dy = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 = \frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{2}}\,dx_1 + \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{1}{2}}\,dx_2 = 0$$

- La pente d'une **isoquante** est

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\overline{y}} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{\frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1}$$

- Le TMST est égal à la **valeur absolue de la pente de l'isoquante**

$$\mathrm{TMST}_{2,1} = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\overline{y}} = \frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1}$$

- Sur une **isoquante** de niveau $\overline{y}$, on a

$$\overline{y} = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

- L'équation de cette **isoquante** dans le repère (x_1, x_2) est obtenue en exprimant x_2 en fonction de x_1:

$$x_2 = g(x_1) = \left[\frac{\overline{y}}{x_1^{\frac{1}{3}}}\right]^2 = \overline{y}^2 x_1^{-\frac{2}{3}}$$

- Elle est **strictement décroissante**

$$\frac{dx_2}{dx_1} = g'(x_1) = -\frac{2}{3}\overline{y}^2 x_1^{-\frac{5}{3}} < 0$$

(avec $\overline{y}^2 = x_1^{\frac{2}{3}} x_2$, on retrouve $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1}$).

- Elle est **strictement convexe** (pente croissante ou TMST décroissant)

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = g''(x_1) = \frac{10}{9}\overline{y}^2 x_1^{-\frac{8}{3}} > 0$$

(avec $\overline{y}^2 = x_1^{\frac{2}{3}} x_2$, on a $\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = \frac{10}{9} x_2 x_1^{-2}$)

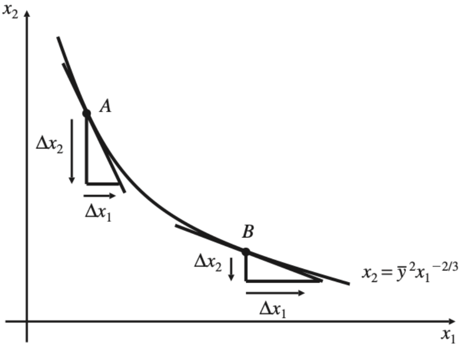
- On peut aussi calculer la **différentielle d'ordre 2** comme suit:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} &= \frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} = \frac{d\left(-\frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1}\right)}{dx_1} = -\frac{2}{3}\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{dx_1} \\
&= -\frac{2}{3}\frac{\frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_1^2}}{dx_1} = -\frac{2}{3}\frac{\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{x_2}{x_1}}{x_1} \\
&= -\frac{2}{3}\frac{-\frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2}{x_1}}{x_1} = -\frac{2}{3}\frac{-\frac{5}{3}\frac{x_2}{x_1}}{x_1} \\
&= \frac{10}{9}\frac{x_2}{x_1^2} > 0
\end{aligned}$$

- Une **isoquante** de niveau $\overline{y}$ quelconque ayant pour équation $x_2 = \overline{y}^2 x_1^{-\frac{2}{3}}$ est représentée **Figure 11**.
- Noter que la **convexité** indique que la **pente** est **croissante**, i.e. de moins en moins négative ici (décroissante en valeur absolue).
- D'un point de vue économique, la **décroissance** des **isoquantes** indique que la **productivité marginale** est **positive**, tandis que leur **convexité** indique que le TMST est **décroissant**, reflétant la **complémentarité des facteurs** dans la production.

Différentielle totale

Figure 11 (Exemple 18)



Différentielle totale

Fonction de production générale

- Pour une **fonction de production** générale à deux facteurs $y = f(x_1, x_2)$, on a $-\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\overline{y}} = \frac{f_1}{f_2} = \mathrm{TMST}_{2,1}$.
- La condition de **décroissance** du TMST est

$$\frac{d\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}\right)}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{f_1(x_1,g(x_1))}{f_2(x_1,g(x_1))}\right)}{dx_1} < 0$$

  où x_2 est une fonction de x_1, i.e. $x_2 = g(x_1)$, avec $g'(x_1) = -\frac{f_1}{f_2}$.
- Noter que, par **dérivation en chaîne**, on a

$$\frac{df_1(x_1, g(x_1))}{dx_1} = f_{11} + f_{12}g'(x_1)$$

  et

$$\frac{df_2(x_1, g(x_1))}{dx_1} = f_{21} + f_{22}g'(x_1)$$

- La condition de **décroissance** du TMST dans le repère (x_1, x_2) est équivalente au signe négatif de sa différentielle par rapport à x_1

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{f_1(x_1,g(x_1))}{f_2(x_1,g(x_1))}\right)}{dx_1} &= \frac{\frac{df_1(x_1,g(x_1))}{dx_1} f_2 - f_1 \frac{df_2(x_1,g(x_1))}{dx_1}}{[f_2]^2} \\
&= \frac{[f_{11} + f_{12}g'] f_2 - f_1 [f_{21} + f_{22}g']}{f_2^2} \\
&= \frac{1}{f_2^2}\left[f_{11}f_2 + f_{12}f_2\left[-\frac{f_1}{f_2}\right] - f_{21}f_1 - f_{22}f_1\left[-\frac{f_1}{f_2}\right]\right] \\
&= \frac{1}{f_2^3}\left[f_{11}f_2^2 - f_{12}f_2f_1 - f_{21}f_1f_2 + f_{22}f_1^2\right] \\
&= \frac{1}{f_2^3}\left[f_{11}f_2^2 - 2f_{21}f_1f_2 + f_{22}f_1^2\right] < 0
\end{aligned}
$$

- La condition de **décroissance** du TMST est donc

$$f_{11}f_2^2 - 2f_{21}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 < 0$$

- Cette condition est la condition de **stricte quasi-concavité** pour une fonction à deux variables. Toute fonction **strictement concave** est **strictement quasi-concave**, mais la réciproque est fausse. Nous reviendrons sur cette notion dans les sections suivantes (**Section 1.4** et **Section 1.5**).

Example (19)

Soit une **fonction de production** générale à deux facteurs de type **Cobb-Douglas**

$$y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} \quad A > 0,\ 0 < \alpha, \beta < 1$$

où A, α et β, sont des paramètres technologiques.

- En égalisant la **différentielle totale** de la fonction à zéro, on a:

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} dx_1 + \beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} dx_2 = 0$$

- La **pente d'une isoquante** est

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dy=0} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{\alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{\beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

- Le TMST est égal à la **valeur absolue de la pente de l'isoquante**

$$\mathrm{TMST}_{2,1} = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dy=0} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

- Sur une **isoquante** de niveau $\overline{y}$, on a

$$\overline{y} = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$$

- L'équation de cette **isoquante** dans le repère (x_1, x_2) est obtenue en exprimant x_2 en fonction de x_1 :

$$x_2 = g(x_1) = \left[\frac{\overline{y}}{Ax_1^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}} = \left[\frac{\overline{y}}{A}\right]^{\frac{1}{\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

- Les **isoquantes** sont **strictement décroissantes**

$$\frac{dx_2}{dx_1} = g'(x_1) = -\frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{\overline{y}}{A}\right]^{\frac{1}{\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} < 0$$

(avec $\overline{y} = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, on retrouve $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$).

- Les **isoquantes** sont **strictement convexes (pente croissante** $\Leftrightarrow$ TMST **décroissant)**

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = g''(x_1) = -\left[-\frac{\alpha}{\beta}-1\right]\frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{\overline{y}}{A}\right]^{\frac{1}{\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} > 0$$

(avec $\overline{y} = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, on a $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{\alpha+\beta}{\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1^2}$)

- On peut aussi calculer la **différentielle d'ordre 2** comme suit:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} &= \frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1} = \frac{d\left(-\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}\right)}{dx_1} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{dx_1} \\
&= -\frac{\alpha}{\beta}\frac{\frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_1^2}}{dx_1} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{x_2}{x_1}}{x_1} \\
&= -\frac{\alpha}{\beta}\frac{-\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2}{x_1}}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\left[\frac{\alpha}{\beta}+1\right]\frac{x_2}{x_1}}{x_1} \\
&= \frac{\alpha}{\beta}\frac{\alpha+\beta}{\beta}\frac{x_2}{x_1^2} > 0
\end{aligned}
$$

- Dans la théorie du consommateur, on représente les **préférences individuelles** sur les paniers de biens par une **fonction d'utilité** $u(\mathbf{x})$ définie sur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$.
- Dans le cas de deux biens $(n = 2)$, pour une fonction d'utilité $u(x_1, x_2)$, la **courbe de niveau** $\overline{u}$, d'équation $x_2 = g(x_1)$, est définie par l'**ensemble de niveau** $\overline{u}$:

$$\{(x_1, x_2) : u(x_1, x_2) = \overline{u}\} \Rightarrow x_2 = g(x_1)$$

- Il s'agit de tous les couples de quantités de biens (x_1, x_2) qui permettent de réaliser un même **niveau d'utilité** (entre lesquels le consommateur est **indifférent,** puisqu'ils donnent tous le **même niveau d'utilité** ou de satisfaction).

- Dans la théorie du consommateur, les **courbes de niveau d'utilité** sont appelées **courbes d'indifférence**. Elles sont analogues aux **isoquantes** dans la théorie du producteur.
- Le rapport des utilités marginales est appelé TMS (**Taux Marginal de Substitution**). C'est l'analogue du TMST dans la théorie du producteur. Il est égal à la **valeur absolue de la pente des courbes d'indifférence**:

$$\mathrm{TMS}_{2,1} = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{du=0}$$

- L'analogie entre une **fonction d'utilité** et une **fonction de production** est presque totale.
- Une différence importante est qu'un **niveau de production** est une **entité physique**, tandis qu'un **niveau d'utilité** ou de satisfaction est une **entité abstraite** (psychologique).
- Dire que la production a doublé fait parfaitement sens. Mais dire que l'utilité à doublé n'a pas de sens.

- On dit que l'utilité est **ordinale**.
- La **fonction d'utilité** représente les **préférences du consommateur** car elle conduit au **même classement** des paniers de biens (au même ordre) que la **relation de préférence**.
- Un panier de biens $A = \left(x_1^A, x_2^A\right)$ est préféré à un panier de biens $B = \left(x_1^B, x_2^B\right)$ ssi $u(A) > u(B)$, peu importe l'écart entre $u(A)$ et $u(B)$.
- Par exemple, si $u(A) = 2$ et $u(B) = 1$, le consommateur n'est pas deux plus heureux avec le panier A qu'avec le panier B. Une autre **fonction d'utilité** qui donnerait $u(A) = 200$ et $u(B) = -10$, représenterait exactement les mêmes préférences.

- Sur la **Figure 12**, on a représenté trois **courbes d'indifférences** et quatre paniers de biens, avec $u(B_1) = 6$, $u(B_2) = 4$, $u(B_3) = 4$, et $u(B_4) = 2$.
- Ainsi, la **relation de préférences** représentée par la **fonction d'utilité** est

$$B_1 \succ B_2 \sim B_3 \succ B_4$$

car

$$u(B_1) > u(B_2) = u(B_3) > (B_4)$$

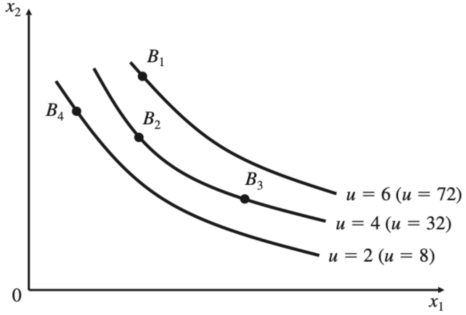
- En général, si la **fonction d'utilité** $u(\mathbf{x})$ définie sur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ représente les **préférences d'un consommateur**, toute **transformation monotone croissante** de u représentera les mêmes préférences

$$v(\mathbf{x}) = T(u(\mathbf{x})), \quad T' > 0$$

- Par exemple, si $T(u) = 2u^2$, avec $T' = 4u > 0$.
- La **fonction d'utilité** v donne $v(B_1) = 72 > v(B_2) = 32 = v(B_3) = 32 > v(B_4) = 8$.

Différentielle totale

Figure 12



- Un autre exemple, plus général, avec une **fonction d'utilité** de type **Cobb-Douglas**:

$$u(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b, \quad A, a, b > 0$$

- La fonction $v = T(u)$, avec $T(u) = \frac{1}{A^k} u^k$ et $T'(u) = \frac{k}{A^k} u^{k-1} > 0$, représente les mêmes préférences que u:

$$v(x_1, x_2) = x_1^{ak} x_2^{bk}, \quad a, b, k > 0$$

- En particulier, en choisissant $k = \frac{1}{a+b}$, on obtient

$$v(x_1, x_2) = x_1^{\frac{a}{a+b}} x_2^{\frac{b}{a+b}}, \quad a, b > 0$$

- De plus, en posant $\alpha = \frac{a}{a+b}$, on obtient

$$v(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- On peut donc représenter ainsi, plus simplement (avec un seul paramètre), mais sans perte de généralité, toute **fonction d'utilité** de type **Cobb-Douglas**.

Différentielle totale

Example (20)

Les **fonctions d'utilité**

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

et

$$v(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^4$$

représentent les mêmes préférences. On a $v = T(u)$, avec $T(u) = u^6$ et $T' = 6u^5 > 0$.

- Comme u et v représentent les mêmes préférences, leurs **courbes d'indifférence** ont la même pente:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{u=\overline{u}} = -\frac{u_1}{u_2} = -\frac{\frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1}$$

et

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{v=\overline{v}} = -\frac{v_1}{v_2} = -\frac{2x_1x_2^4}{4x_1^2x_2^3} = -\frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1}$$

- Leurs TMS sont donc identiques:

$$\mathrm{TMS}_{2,1}^{u} = \mathrm{TMS}_{2,1}^{v} = \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1}$$

- Dans ce contexte, la **décroissance** du TMS traduit le **goût pour la diversité** du consommateur.

- Nous avons vu plus haut que la condition de **stricte quasi-concavité** d'une **fonction de production** à deux facteurs $f\left(x_1, x_2\right)$, satisfaisant $f_2 > 0$, est équivalente à la **décroissance** du TMST, et s'écrit

$$f_{11} f_2^2 - 2 f_{21} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2 < 0$$

- Par analogie, la condition de **stricte quasi-concavité** d'une **fonction d'utilité** à deux biens $u\left(x_1, x_2\right)$, satisfaisant $u_2 > 0$, est équivalente à la **décroissance** du TMS, et s'écrit

$$u_{11} u_2^2 - 2 u_{21} u_1 u_2 + u_{22} u_1^2 < 0$$

- Nous reviendrons sur la notion de **stricte quasi-concavité** dans les sections suivantes (**Section 1.4** et **Section 1.5**).

Example (21)

Soit une **fonction d'utilité** à deux biens de type **Cobb-Douglas**

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

- Les **utilité marginales** sont

$$u_1 = 2x_1x_2 \quad \text{et} \quad u_2 = x_1^2$$

- Le TMS (la **valeur absolue** de la **pente des courbes d'indifférence**) est donc

$$-\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{du=0} = \mathrm{TMS}_{2,1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{2x_1x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1}$$

Différentielle totale

Example (22)

Soit une **fonction d'utilité linéaire** à deux biens (**substituts parfaits**)

$$u\left(x_1, x_2\right) = x_1 + x_2$$

- Les **utilité marginales** sont

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_2 = 1$$

- Le TMS (la **valeur absolue** de la **pente des courbes d'indifférence**) est donc constant:

$$-\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{du=0} = \mathrm{TMS}_{2,1} = \frac{u_1}{u_2} = 1$$

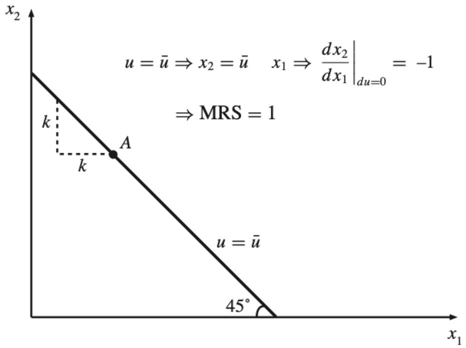
- En effet, l'équation d'une **courbe d'indifférence** de niveau $\overline{u}$ est

$$x_2 = \overline{u} - x_1$$

- Les **courbes d'indifférence** sont donc des **droites** dans le cas de **substituts parfaits** (voir **Figure 13**).

Différentielle totale

Figure 13 (Exemple 22)



- Comme pour le TMST, les interprétations du concept de TMS, ainsi que les calculs associés, s'étendent aux fonctions à plus de deux variables.

Différentielle totale

Definition

La **différentielle totale** d'une fonction $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ est

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

Différentielle totale

- Pour une **fonction d'utilité** $u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, le TMS du bien j au bien i est
$$\text{TMS}_{j,i} = \frac{u_i}{u_j}$$
- En effet, si seules les quantités de bien i et j changent ($dx_k = 0$ pour tout $k \neq i$ et $k \neq j$), on a
$$du\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = u_i dx_i + u_j dx_j$$
- Sur une **courbe d'indifférence**, où $du = 0$, on a donc
$$\left.\frac{dx_j}{dx_i}\right|_{du=0} = -\frac{u_i}{u_j} = -\text{TMS}_{j,i}$$

Example (23)

Soit une **fonction d'utilité** à trois biens de type **Cobb-Douglas**:

$$u\left(x_1, x_2, x_3\right) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}$$

où $A, \alpha, \beta, \gamma > 0$ sont des paramètres caractérisant les **préférences du consommateur**.

- La **différentielle totale** de la **fonction d'utilité** est

$$du\left(x_1, x_2, x_3\right) = u_1 \, dx_1 + u_2 \, dx_2 + u_3 \, dx_3$$

- Sur une **courbe d'indifférence** entre le bien 3 et le bien 2 (dans le repère (x_2, x_3)), on a $du = 0$ et $dx_1 = 0$. Ainsi, on obtient:

$$\left.\frac{dx_3}{dx_2}\right|_{du=0, dx_1=0} = -\frac{u_2}{u_3} = -\mathrm{TMS}_{3,2} = -\frac{\beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} x_3^{\gamma}}{\gamma A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma-1}} = -\frac{\beta x_3}{\gamma x_2}$$

- De même on peut calculer $\mathrm{TMS}_{2,1}$ et $\mathrm{TMS}_{3,1}$.

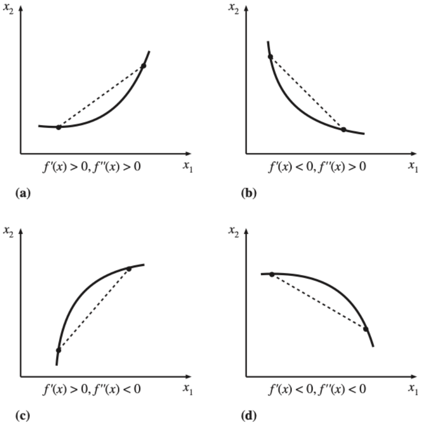
1. Dérivées partielles d'ordre 1
2. Dérivées partielles d'ordre 2
3. Différentielle totale
4. **Propriétés de courbure (concavité et convexité)**
5. D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

- La **courbure** est un aspect important de la forme d'une fonction (notamment pour la recherche des extremums, fondamentale en économie).
- Pour déterminer la **courbure**, on utilise les **dérivées partielles d'ordre 2**.
- Pour les fonctions à une variable $y = f(x)$, le **signe de la dérivée seconde** caractérise la **courbure**.
    - Si $f'' > 0$, la fonction est **strictement convexe**. La **pente** est **strictement croissante**.
    - Si $f'' < 0$, la fonction est **strictement concave**. La **pente** est **strictement décroissante**.

- La **Figure 14** illustre les propriétés de **stricte convexité** ($f'' > 0$) et de **stricte concavité** ($f'' < 0$) pour une fonction à une variable **strictement croissante** ($f' > 0$) ou **strictement décroissante** ($f' < 0$).

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Figure 14



- Pour les fonctions à n variables, $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, on pourrait penser que la courbure est déterminée en étudiant le signe des n dérivées directes d'ordre 2, i.e. les termes de la diagonale de la **matrice Hessienne** $(f_{11}, f_{22}, ..., f_{nn})$. Mais ce n'est pas le cas.
- Le problème de cette approche est que cela reviendrait à étudier la courbure de la fonction en utilisant seulement certaines directions.
  - Il n'y a qu'une seule façon de se déplacer le long d'une courbe pour une fonction à une variable.
  - Par contre il y a une infinité de façon de se déplacer sur le graph d'une fonction à n variables.
  - On peut par exemple gravir une colline via une infinité de directions rectilignes de son pied à son sommet.

- Il est donc relativement plus difficile de caractériser la **courbure** (**concavité** et **convexité**) des fonctions à plus d'une variable que de caractériser celle des fonctions à une variable.
- L'**Exemple 24** illustre ce point.

Example (24)

Soit une fonction à deux variables

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 2x_1 - 5x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = 2x_2 - 5x_1$$

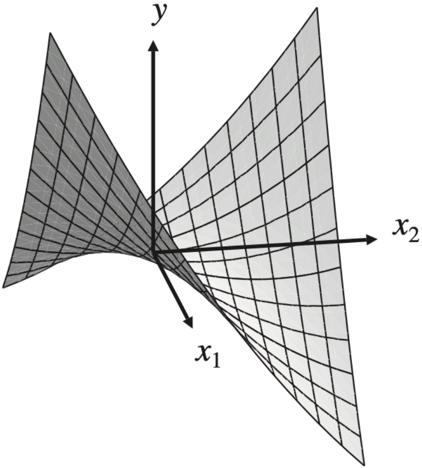
- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 2, \quad f_{22} = 2 \quad \text{et} \quad f_{12} = f_{21} = -5$$

- Bien que $f_{11} > 0$ et $f_{22} > 0$, la fonction f n'est pas **convexe**, comme l'illustre la **Figure 15**. Le signe de la **dérivée partielle croisée d'ordre 2** ($f_{12} < 0$) joue également un rôle.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Figure 15



- Considérons une fonction à une variable $y = f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
- La **différentielle totale** en un point $x = x^0$ est

$$dy = f'\left(x^0\right) dx$$

- C'est une fonction de la **dérivée partielle** $f'\left(x^0\right)$, ainsi que de la variation dx, mais cette dernière est considérée comme donnée ou constante.

- La **différentielle totale** de la variation dy est

$$d^2y = d\left[f'\left(x^0\right)dx\right] = d\left[f'\left(x^0\right)\right]dx$$

- Comme $d\left[f'\left(x^0\right)\right] = f''\left(x^0\right)dx$, on a

$$d^2y = f''\left(x^0\right)dx^2$$

- C'est la **différentielle totale d'ordre 2**.

- Comme le terme dx^2 ou $[dx]^2$ est strictement positif pour toute variation non nulle $(dx \neq 0)$ de x, on a

$$signe\left(d^2y\right) = signe\left(f''(x)\right)$$

- La fonction est **convexe** si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout x. Elle est **concave** si seulement $f''(x) \leq 0$ pour tout x.
- De manière équivalente, la fonction est **convexe** si et seulement si $d^2y \geq 0$ pour tout x. Elle est **concave** si et seulement si $d^2y \leq 0$ pour tout x.

- Pour les fonctions à plusieurs variables $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ on détermine également la **courbure** en étudiant le signe de $d^2 y$.
- Par exemple, pour une fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$, la **différentielle totale** est

$$dy = df(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

ou, plus simplement,

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

- La **différentielle totale d'ordre 2** est

$$
\begin{aligned}
d^2y &= d\left[dy\right] = \frac{\partial\left[dy\right]}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\left[dy\right]}{\partial x_2}dx_2 \\
&= \frac{\partial\left[f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2\right]}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\left[f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2\right]}{\partial x_2}dx_2 \\
&= \left[f_{11}\,dx_1 + f_{21}\,dx_2\right]dx_1 + \left[f_{12}\,dx_1 + f_{22}\,dx_2\right]dx_2 \\
&= f_{11}\,dx_1^2 + f_{21}\,dx_1\,dx_2 + f_{12}\,dx_1\,dx_2 + f_{22}\,dx_2^2 \\
&= f_{11}\,dx_1^2 + 2f_{12}\,dx_1\,dx_2 + f_{22}\,dx_2^2
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité découle du **théorème de Young** (**Théorème 1**).

- Pour une fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$, on a donc

$$d^2y = f_{11} dx_1^2 + 2f_{12} dx_1 dx_2 + f_{22} dx_2^2$$

- On constate que d^2y dépend non seulement de f_{11} et f_{22}, mais également de f_{12}.
- A partir de cette expression, on obtient deux théorèmes (**Théorème 4** et **Théorème 5**) donnant les **conditions suffisantes** pour obtenir, respectivement, la **stricte convexité** ($d^2y > 0$) et la **stricte concavité** ($d^2y < 0$) d'une fonction à deux variables.

Theorem (4)

Si la fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$, définie sur $\mathbb{R}^2$, est deux fois continûment différentiable et vérifie

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2 > 0$$

lorsque au moins une des deux variations dx_1 et dx_2 n'est pas nulle, alors la fonction $y = f(x_1, x_2)$ est ***strictement convexe****.*

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Theorem (5)

Si la fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$, définie sur $\mathbb{R}^2$, est deux fois continûment différentiable et vérifie

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2 < 0$$

lorsque au moins une des deux variations dx_1 et dx_2 n'est pas nulle, alors la fonction $y = f(x_1, x_2)$ est **strictement concave**.

Example (25)

Soit une fonction à deux variables

$$y = f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + x_2^2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 2x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = 2x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 2, \quad f_{22} = 2 \quad \text{et} \quad f_{12} = f_{21} = 0$$

- La **différentielle totale d'ordre 2** est donc

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2 = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$$

- Comme $dx_1^2 > 0$ si $dx_1 \neq 0$, et $dx_2^2 > 0$ si $dx_2 \neq 0$, on a $d^2y = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$ (car $d^2y = 0$ seulement si $dx_1 = 0$ et $dx_2 = 0$).
- D'après le **Théorème 4**, la fonction f est **strictement convexe**.

- Les conditions de **stricte convexité** et de **stricte concavité** apparaissant, respectivement, dans le **Théorème 4** et le **Théorème 5** sont des **conditions suffisantes**, mais pas des **conditions nécessaires**:
    - $d^2y > 0 \Rightarrow f$ **strictement convexe**, mais f **strictement convexe** $\not\Rightarrow d^2y > 0$.
    - $d^2y < 0 \Rightarrow f$ **strictement concave**, mais f **strictement concave** $\not\Rightarrow d^2y < 0$.
- L'**Exemple 26** illustre ce point.

Example (26)

Soit une fonction à deux variables

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1^3 \quad \text{et} \quad f_2 = 4x_2^3$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 12x_1^2, \quad f_{22} = 12x_2^2 \quad \text{et} \quad f_{12} = f_{21} = 0$$

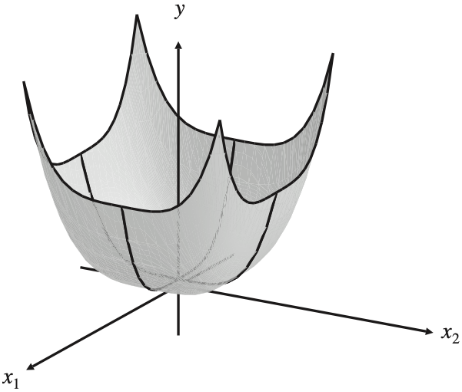
- La **différentielle totale d'ordre 2** est donc

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2 = 12x_1^2dx_1^2 + 12x_2^2dx_2^2$$

- La **Figure 16** montre que la fonction est **strictement convexe**. Pourtant $d^2y = 0$ lorsque $x_1 = x_2 = 0$. La condition $d^2y > 0$ n'est donc pas nécessaire pour la **stricte convexité** (elle est seulement suffisante).

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Figure 16



- Le **Théorème 6** et le **Théorème 7** ci-dessous donnent, respectivement, les **conditions nécessaires et suffisantes** pour la **convexité** (non stricte) et la **concavité** (non stricte) d'une fonction à deux variables.
- Les propriétés de **convexité** (non stricte) et de **concavité** (non stricte) sont moins restrictives, ou plus faibles, que les propriété de **stricte convexité** et de **stricte concavité**. Elles peuvent notamment être vérifiées pour des fonctions avec des **segments linéaires**.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Theorem (6)

Si la fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$, définie sur $\mathbb{R}^2$, est deux fois continûment différentiable, elle est **convexe** *si et seulement si*

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2 \geq 0$$

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Theorem (7)

Si la fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$, définie sur $\mathbb{R}^2$, est deux fois continûment différentiable, elle est **concave** *si et seulement si*

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2 \leq 0$$

Example (27)

Soit une fonction à deux variables

$$y = f\left(x_1, x_2\right) = 5 - \left[x_1 + x_2\right]^2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = -2\left[x_1 + x_2\right] \quad \text{et} \quad f_2 = -2\left[x_1 + x_2\right]$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = -2, \quad f_{22} = -2 \quad \text{et} \quad f_{12} = f_{21} = -2$$

- La **différentielle totale d'ordre 2** est donc

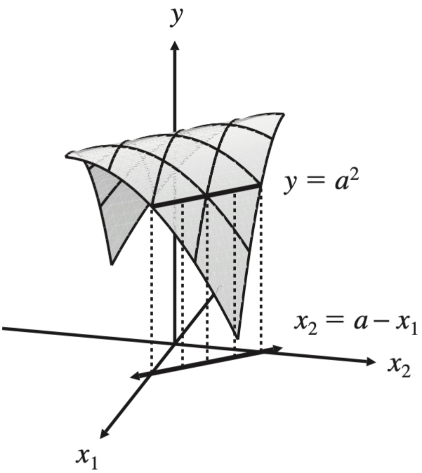
$$\begin{aligned} d^2y &= f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2 \\ &= -2dx_1^2 - 4dx_1dx_2 - 2dx_2^2 \\ &= -2\left[dx_1 + dx_2\right]^2 \leq 0 \end{aligned}$$

- Le **Théorème 7** s'applique, la fonction f est **concave**.
- Mais le **Théorème 5** ne s'applique pas (e.g. $dx_1 = -dx_2 \neq 0 \Rightarrow d^2y = 0$).

- La **Figure 17** illustre le fait que la fonction est **concave**, mais qu'elle n'est pas **strictement concave**.
- En effet, pour des points vérifiant $x_2 + x_1 = a$, où a est une constante positive quelconque, la fonction garde une valeur constante $y = 5 - [x_1 + x_2]^2 = 5 - [x_1 + a - x_1]^2 = 5 - a^2 = cst$.
- Graphiquement on des **segments linéaires horizontaux** pour les points (x_1, x_2) qui vérifient $x_2 + x_1 = a$.
- Noter une coquille sur la **Figure 17**, il faut lire $y = 5 - a^2$ plutôt que $y = a^2$.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Figure 17



- L'analyse de la **courbure** que nous venons d'effectuer s'étend aux fonctions à plus de deux variables.
- Pour une fonction à n variables $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, la **différentielle totale** est

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

où chaque **dérivée partielle** f_i est elle-même une fonction à n variables $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$.

- La **différentielle totale d'ordre 2** est

$$
\begin{aligned}
d^2y &= d\left[dy\right] = \frac{\partial\left[dy\right]}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\left[dy\right]}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\left[dy\right]}{\partial x_n}dx_n \\
&= \frac{\partial\left[\sum\limits_{i=1}^{n} f_i dx_i\right]}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\left[\sum\limits_{i=1}^{n} f_i dx_i\right]}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\left[\sum\limits_{i=1}^{n} f_i dx_i\right]}{\partial x_n}dx_n
\end{aligned}
$$

où chaque terme représente une **dérivée partielle**.

- Par exemple, le premier terme est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i\right]}{\partial x_1} &= \frac{\partial\left[f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n dx_n\right]}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_n \\
&= f_{11} dx_1 + f_{21} dx_2 + \ldots + f_{n1} dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{i1} dx_i
\end{aligned}$$

- Il y a n termes de ce type dans d^2y. De plus, on voit ci-dessus que chacun de ces n termes contient également n termes. Il y a donc n^2 termes dans d^2y.

- Comme d^2y contient n^2 termes additionnés, il est fastidieux de l'écrire de manière développée.
- Toutefois, on peut l'écrire de manière compacte:

$$\begin{aligned} d^2y &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i \right]}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{ij} dx_i dx_j \end{aligned}$$

- On peut également utiliser l'**écriture matricielle**:

$$d^2y = \mathbf{dx}^T \nabla_2 F \mathbf{dx}$$

où $\mathbf{dx}^T = (dx_1, dx_2, ..., dx_n)$ est le **vecteur** (ligne) des variations, et où $\nabla_2 F$ est la **matrice Hessienne**

$$\nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

- Pour illustrer le **calcul matriciel** (produit vecteur×matrice):

$$\begin{aligned}
\mathbf{dx}^T \nabla_2 F &= (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{n1} & f_{n2} & ... & f_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} f_{i1} dx_i, \sum_{i=1}^{n} f_{i2} dx_i, ..., \sum_{i=1}^{n} f_{in} dx_i \right)
\end{aligned}$$

- Finalement:

$$
\begin{aligned}
d^2y &= \mathbf{dx}^T \nabla_2 F \mathbf{dx} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} f_{i1} dx_i, \sum_{i=1}^{n} f_{i2} dx_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} f_{in} dx_i \right) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \ldots \\ dx_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{i1} dx_i dx_1 + \sum_{i=1}^{n} f_{i2} dx_i dx_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} f_{in} dx_i dx_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{ij} dx_i dx_j
\end{aligned}
$$

- Comme précédemment, on peut établir des théorèmes relatifs à la **courbure** selon le signe de $d^2y = \mathbf{dx}^T \nabla_2 F \mathbf{dx}$. Pour simplifier les écritures, on note la **matrice Hessienne** $\nabla_2 F = H$.
- L'exercice reste relativement simple ici car d^2y a une forme dite **quadratique**, avec la **matrice Hessienne** H (qui est carrée de taille $n \times n$) et le vecteur des variations $\mathbf{dx}$ (de taille n).

- De plus, la **matrice Hessienne** H est **symétrique** d'après le théorème de Young (**Théorème 1**).
- La **forme quadratique** d^2y est alors **strictement positive** (resp. **strictement négative**) si la matrice H est **définie positive** (resp. **définie négative**) pour $\mathbf{dx} \neq 0$.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Theorem (8)

Pour toute fonction à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, deux fois continûment différentiable dont la **matrice Hessienne** *est H, on a:*

1. *f est* **strictement convexe** *sur $\mathbb{R}^n$ si H est* **définie positive** *pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (i.e. $d^2y = d\mathbf{x}^T H d\mathbf{x} > 0$).*
2. *f est* **strictement concave** *sur $\mathbb{R}^n$ si H est* **définie négative** *pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (i.e. $d^2y = d\mathbf{x}^T H d\mathbf{x} < 0$).*

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Theorem (8)

Pour toute fonction à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *deux fois continûment différentiable dont la* **matrice Hessienne** *est* H, *on a:*

3. f *est* **convexe** *sur* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si* H *est* **semi-définie positive** *pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *(i.e.* $d^2y = d\mathbf{x}^T H d\mathbf{x} \geq 0$*).*
4. f *est* **concave** *sur* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si* H *est* **semi-définie négative** *pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *(i.e.* $d^2y = d\mathbf{x}^T H d\mathbf{x} \leq 0$*).*

- Afin de déterminer si une matrice est **définie positive/négative** ou **semi-définie positive/négative**, nous devons introduire les concepts de **sous-matrices principales** et de **déterminant** d'une matrice.

- Les **sous-matrices principales** d'une **matrice Hessienne** sont obtenues en supprimant des couples Ligne i /Colonne i de cette matrice.
- Le **déterminant** d'une matrice H est noté $|H|$. Il joue aussi un rôle important dans la résolution des systèmes d'équations linéaires en économétrie. Son calcul peut s'avérer très fastidieux pour une matrice de grande taille. Nous nous limiterons donc à des matrices de taille réduite.

- Les **sous-matrices principales** d'une matrice Hessienne H, de taille $n \times n$, sont obtenues en éliminant des couples Ligne i /Colonne i de H.
  - **Sous-matrices principales d'ordre 1**, notées H_1^* de taille 1×1 (on retire $n-1$ couples Li/Ci).
  - **Sous-matrices principales d'ordre 2**, notées H_2^* de taille 2×2 (on retire $n-2$ couples Li/Ci).
  - ...
  - **Sous-matrice principale d'ordre** n, notée $H_n^* = H$ de taille $n \times n$ (on ne retire rien car $n - n = 0$).
- Comme H est **carrée** et **symétrique**, toutes ses **sous-matrices principales** sont **carrées** et **symétriques**.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Sous-matrices principales successives

- Les **sous matrices principales "successives" ou "diagonales" d'ordre** $k = 1, 2, ..., n$ sont obtenues en retirant les $n - k$ **dernières lignes et colonnes**.
- Comme H est **carrée** et **symétrique**, toutes ses **sous-matrices principales successives** sont **carrées** et **symétriques**.

- Par exemple, considérons une **matrice Hessienne** H pour une fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ à trois variables

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

- **Sous-matrices principales d'ordre 1** (on retire $3-1=2$ couples L/C). En retirant **L1/C1** et **L2/C2**, on obtient f_{33}. En retirant **L1/C1** et **L3/C3**, on obtient f_{22}. En retirant **L2/C2** et **L3/C3**, on obtient f_{11}.

$$H_1^* = [f_{11}], [f_{22}], [f_{33}]$$

- **Sous-matrice principale successive d'ordre 1** (on retire les 2 derniers couples **L2/C2** et **L3/C3**):

$$H_1 = [f_{11}]$$

- **Sous-matrices principales d'ordre 2** (on retire $3-2=1$ couple Li/Ci). En retirant **L1/C1**, on obtient $\begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$. En retirant **L2/C2** $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{13} \\ f_{31} & f_{33} \end{bmatrix}$. En retirant **L3/C3** on obtient $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$.

$$H_2^* = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{11} & f_{13} \\ f_{31} & f_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

- **Sous-matrice principale successive d'ordre 2** (on retire le dernier couple **L3/C3**):

$$H_2 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

- **Sous-matrice principale d'ordre 3** (on ne retire rien car $3 - 3 = 0$).
- La **sous-matrice principale successive d'ordre 3** est identique à la **sous-matrice principale d'ordre 3.**
- Elles sont donc en fait identiques à la **matrice Hessienne** (complète):

$$H_3^* = H_3 = H$$

- Plus généralement, les **sous-matrices principales successives** d'une **matrice Hessienne** H, de taille $n \times n$, sont

$$H_1 = [f_{11}], \quad H_2 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}, \ldots, H_n = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

- Les **sous-matrices principales** d'une **matrice Hessienne** H, de taille $n \times n$, sont fastidieuses à écrire.
- Par exemple, pour une **matrice Hessienne** 4×4, on a

$$H_1^* = [f_{11}], [f_{22}], [f_{33}], [f_{44}]$$

$$\begin{aligned} H_2^* \quad = \quad & \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{11} & f_{14} \\ f_{41} & f_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{11} & f_{13} \\ f_{31} & f_{33} \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} f_{33} & f_{34} \\ f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{22} & f_{24} \\ f_{42} & f_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Pour une **matrice Hessienne** 4×4, on a

$$
\begin{aligned}
H_3^* \quad = \quad & \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{24} \\ f_{41} & f_{42} & f_{44} \end{bmatrix}, \\
& \begin{bmatrix} f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{11} & f_{13} & f_{14} \\ f_{31} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

et

$$H_4^* = H$$

- Le **déterminant** de la **sous-matrice principale successive** H_1 est simplement $|H_1| = |f_{11}| = f_{11}$.
- Le **déterminant** de la **sous-matrice principale successive** H_2 est

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2$$

- Le **déterminant** de la **sous-matrice principale successive** H_3 est plus complexe à calculer.

- On calcule le **déterminant** D_{11} de la **sous-matrice** obtenue en supprimant la **ligne 1** et la **colonne 1**:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = f_{22} f_{33} - f_{23} f_{32} = f_{22} f_{33} - f_{23}^2$$

- On calcule le **déterminant** D_{12} de la **sous-matrice** obtenue en supprimant la **ligne 1** et la **colonne 2**:

$$D_{12} = \begin{vmatrix} f_{21} & f_{23} \\ f_{31} & f_{33} \end{vmatrix} = f_{21} f_{33} - f_{23} f_{31}$$

- On peut vérifier, d'après le **théorème de Young** (**Théorème 1**), que $D_{21} = D_{12}$.

- On calcul le déterminant D_{13} de la **sous-matrice** obtenue en supprimant la **ligne 1** et la **colonne 3**:

$$D_{13} = \begin{vmatrix} f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{vmatrix} = f_{21} f_{32} - f_{22} f_{31}$$

- On peut vérifier, d'après le **théorème de Young** (**Théorème 1**), que $D_{31} = D_{13}$.

- On définit le **cofacteur**

$$C_{ij} = [-1]^{i+j} D_{ij}$$

- Lorsque $i + j$ est **pair**, le signe du **cofacteur** est le même que celui du **déterminant**. Par exemple, $C_{11} = D_{11}$ et $C_{13} = D_{13.}$
- Lorsque $i + j$ est **impair**, le signe du **cofacteur** est l'opposé de celui du **déterminant**. Par exemple, $C_{12} = -D_{12}$.
- D'après le théorème de Young (**Théorème 1**), $D_{ij} = D_{ji}$ et donc $C_{ij} = C_{ji}$.

- On calcule le déterminant de la **sous-matrice principale successive** H_3 en multipliant la **ligne 1** de H_3 par les **cofacteurs** correspondants:

$$\begin{aligned} |H_3| &= f_{11} C_{11} + f_{12} C_{12} + f_{13} C_{13} \\ &= f_{11} D_{11} - f_{12} D_{12} + f_{13} D_{13} \end{aligned}$$

- De manière équivalente, d'après le **théorème de Young** (**Théorème 1**), on peut calculer le **déterminant** de H_3 en multipliant la **colonne 1** de H_3 par les **cofacteurs** correspondants:

$$
\begin{aligned}
|H_3| &= f_{11}C_{11} + f_{21}C_{21} + f_{31}C_{31} \\
&= f_{11}D_{11} - f_{21}D_{21} + f_{31}D_{31} \\
&= f_{11}D_{11} - f_{12}D_{12} + f_{13}D_{13}
\end{aligned}
$$

- On retrouve le même résultat que ci-dessus (en multipliant la **ligne 1** de H_3 par les **cofacteurs** correspondants).

- On obtient en fait le même résultat en multipliant n'importe quelle ligne ou colonne de H_3 par les **cofacteurs** correspondants.
- Par analogie, on peut généraliser cette méthode pour calculer les **déterminants** de **matrices Hessiennes** de taille 4×4, 5×5,...,$n \times n$.

- En explicitant les **déterminants** on a:

$$
\begin{aligned}
|H_3| &= f_{11} D_{11} - f_{12} D_{12} + f_{13} D_{13} \\
&= f_{11} \begin{vmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} - f_{12} \begin{vmatrix} f_{21} & f_{23} \\ f_{31} & f_{33} \end{vmatrix} + f_{13} \begin{vmatrix} f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|H_3| &= f_{11}\begin{vmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} - f_{12}\begin{vmatrix} f_{21} & f_{23} \\ f_{31} & f_{33} \end{vmatrix} + f_{13}\begin{vmatrix} f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{vmatrix} \\
&= f_{11}\left[f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32}\right] - f_{12}\left[f_{21}f_{33} - f_{23}f_{31}\right] + f_{13}\left[f_{21}f_{32} - f_{22}f_{31}\right] \\
&= f_{11}f_{22}f_{33} - f_{11}f_{23}f_{32} - f_{12}f_{21}f_{33} + f_{12}f_{23}f_{31} + f_{13}f_{21}f_{32} - f_{13}f_{22}f_{31} \\
&= f_{11}f_{22}f_{33} + 2f_{12}f_{13}f_{23} - f_{11}f_{23}^2 - f_{12}^2f_{33} - f_{13}^2f_{22}
\end{aligned}
$$

Theorem (9)

Soit H la **matrice Hessienne** *associée à une fonction à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, deux fois continûment différentiable.*

1. *H est* **définie positive** *sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les n* **déterminants** *des* **sous-matrices principales successives** *sont strictement positifs: $|H_1| > 0$, $|H_2| > 0$,...,$|H_n| > 0$. Dans ce cas, $d^2y > 0$ et f est donc* **strictement convexe**.

Theorem (9)

Soit H la **matrice Hessienne** *associée à une fonction à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, deux fois continûment différentiable.*

2. *H est* **définie négative** *sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les n* **déterminants** *des* **sous-matrices principales successives** *alternent en signe, en commençant par un signe négatif: $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0, \ldots, |H_n| \begin{cases} > 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ < 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Dans ce cas, $d^2y < 0$ et f est donc* **strictement concave** *sur $\mathbb{R}^n$.*

Theorem (9)

Soit H la **matrice Hessienne** *associée à une fonction à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, deux fois continûment différentiable.*

3. *H est* **semi-définie positive** *sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les n* **déterminants** *des* **sous-matrices principales** *sont positifs ou nuls:* $|H_1^*| \geq 0$, $|H_2^*| \geq 0$,...,$|H_n^*| \geq 0$. *Dans ce cas, $d^2y \geq 0$ et f est donc* **convexe**. *De plus, si f est* **convexe**, *alors cet ensemble de conditions est vérifié.*

Theorem (9)

Soit H la **matrice Hessienne** *associée à une fonction à n variables $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, deux fois continûment différentiable.*

4. *H est* **semi-définie négative** *sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les n* **déterminants** *des* **sous-matrices principales** *alternent en signe, en commençant par un signe négatif ou zéro: $|H_1^*| \leq 0$, $|H_2^*| \geq 0, \ldots, |H_n^*| \begin{cases} \geq 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \leq 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Dans ce cas, $d^2y \leq 0$ et f est donc* **concave**. *De plus, si f est* **concave**, *alors cet ensemble de conditions est vérifié.*

Example (28)

Soit une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$:

$$y = f(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]^{\frac{1}{2}}$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont:

$$f_1 = \frac{1}{2}\left[x_1 + x_2\right]^{-\frac{1}{2}} > 0$$

et

$$f_2 = \frac{1}{2}\left[x_1 + x_2\right]^{-\frac{1}{2}} > 0$$

Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont:

$$f_{11} = -\frac{1}{4}\left[x_1 + x_2\right]^{-\frac{3}{2}} < 0$$

$$f_{12} = f_{21} = -\frac{1}{4}\left[x_1 + x_2\right]^{-\frac{3}{2}} < 0$$

$$f_{22} = -\frac{1}{4}\left[x_1 + x_2\right]^{-\frac{3}{2}} < 0$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

- Les **sous-matrices principales successives** de H sont:

$$H_1 = [f_{11}]$$

$$H_2 = H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

- Les **déterminants** des **sous-matrices principales successives** sont:

$$|H_1| = |f_{11}| = f_{11} < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

- Comme $|H_2| = 0$, on ne peut pas appliquer le **Théorème 9.2** concernant la **stricte concavité**.
- Mais on peut tenter d'établir la **concavité** (non-stricte).

- Les **déterminants** des **sous-matrices principales** sont:

$$|H_1^*| = |f_{11}|, |f_{22}| = f_{11}, f_{22}$$

$$|H_2^*| = |H_2| = 0$$

- Comme $f_{11} < 0$ et $f_{22} < 0$, on a $|H_1^*| < 0$. De plus, $|H_2^*| = 0$. On peut appliquer le **Théorème 9.4** concernant la **concavité**. En effet, $|H_1^*| \leq 0$ et $|H_2^*| \geq 0$.
- La fonction f est **concave**.

Example (29)

Soit une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$y = f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2^2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont:

$$f_1 = 3 \quad \text{et} \quad f_2 = 2x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont:

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = f_{21} = 0 \quad \text{et} \quad f_{22} = 2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Les **déterminants** des **sous-matrices principales successives** sont:

$$|H_1| = |f_{11}| = f_{11} = 0$$

et

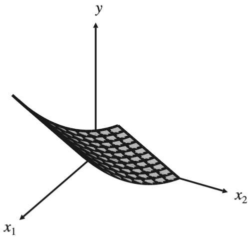
$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

- Comme $|H_1| = 0$ et $|H_2| = 0$, on ne peut pas appliquer le **Théorème 9.1**/**9.2** concernant la **stricte convexité/concavité**.
- Mais on peut tenter d'établir la **convexité** ou la **concavité** (non-stricte)**.**

- L'erreur serait ici de conclure que la fonction est à la fois **concave** et **convexe** au sens non stricte (donc **linéaire**) car $|H_1| = 0$ et $|H_2| = 0$ satisfont de manière triviale les conditions **3** et **4** du **Théorème 9**.
- La **Figure 18** montre clairement que la fonction n'est pas **linéaire** (sa représentation graphique n'est pas un plan). Elle est **convexe**.
- Le point est que les conditions **3** et **4** du **Théorème 9**, concernent les **déterminants** de toutes les **sous matrices principales** $|H_1^*|$ et $|H_2^*|$ (pas seulement ceux des **sous-matrices principales successives** $|H_1|$ et $|H_2|$).

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Figure 18



- Les **déterminants** des **sous-matrices principales** sont:

$$|H_1^*| = \begin{cases} |f_{11}| = f_{11} = 0 \\ |f_{22}| = f_{22} = 2 > 0 \end{cases}$$

$$|H_2^*| = |H_2| = 0$$

- Comme $f_{11} = 0$ et $f_{22} > 0$, on a $|H_1^*| \geq 0$. De plus, $|H_2^*| = 0$. On peut appliquer le **Théorème 9.3** concernant la **convexité**. En effet, $|H_1^*| \geq 0$ et $|H_2^*| \geq 0$.
- La fonction f est **convexe**, comme le montre la **Figure 18**. De plus, elle n'est pas **concave** car $f_{22} > 0$ et donc $|H_1^*| \nleq 0$.

Example (30)

Soit une fonction à trois variables, **additivement séparable**, définie sur $\mathbb{R}^3_{++}$:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\alpha} + x_2^{\beta} + x_3^{\gamma}, \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = \alpha x_1^{\alpha-1}, \quad f_2 = \beta x_2^{\beta-1}, \quad f_3 = \gamma x_3^{\gamma-1}$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = \alpha\left[\alpha - 1\right] x_1^{\alpha-2} < 0$$

$$f_{22} = \beta\left[\beta - 1\right] x_2^{\beta-2} < 0$$

$$f_{33} = \gamma\left[\gamma - 1\right] x_3^{\gamma-2} < 0$$

et

$$f_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

(car la fonction f est **additivement séparable**).

- Les **déterminants** des **sous-matrices principales successives** de la **matrice Hessienne** sont

$$|H_1| = |f_{11}| = f_{11} < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11} f_{22} > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{vmatrix} = f_{11} f_{22} f_{33} < 0$$

(car $|H_3| = f_{11} D_{11} - f_{12} D_{12} + f_{13} D_{13}$ et $D_{11} = f_{22} f_{33} - f_{23}^2$).

- Comme $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$ et $|H_3| < 0$. D'après le **Théorème 9.2**, la **matrice Hessienne** est **définie négative**. La fonction f est **strictement concave**.
- Cet exemple illustre le fait que la fonction est **concave** si ses dérivées partielles (non-croisées) d'ordre 2 sont toutes **négatives**.
- Ce résultat est en fait valable pour toutes les fonctions **additivement séparables** car une **somme** de fonctions **strictement concaves** donne une fonction **strictement concave**.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Theorem (10)

Soit une fonction **additivement séparable** $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

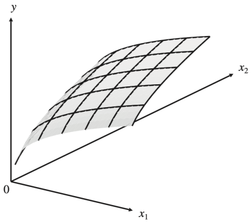
1. f *est* **strictement convexe** *si* $f_{ii} > 0$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n$.
2. f *est* **strictement concave** *si* $f_{ii} < 0$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n$.
3. f *est* **convexe** *si et seulement si* $f_{ii} \geq 0$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n$.
4. f *est* **concave** *si et seulement si* $f_{ii} \leq 0$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n$.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

- On peut illustrer le **Théorème 10** avec la fonction **additivement séparable** à deux variables $y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$.
- Comme la fonction $x_i^{\frac{1}{2}}$ est **strictement concave** pour $x_i > 0$, on a $f_{ii} = -\frac{1}{4}x_i^{-\frac{3}{2}} < 0$ pour $i = 1, 2$.
- D'après le **Théorème 10** la fonction f est **strictement concave** sur $\mathbb{R}^2_{++}$, comme l'illustre la **Figure 19**.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Figure 19

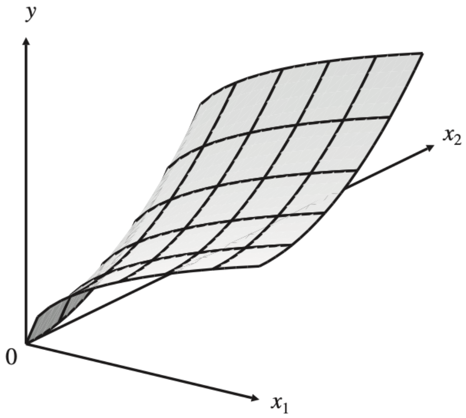


Propriétés de courbure (concavité et convexité)

- On peut également illustrer le **Théorème 10** avec la fonction **additivement séparable** à deux variables $y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^2$ définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$.
- Comme la fonction $x_1^{\frac{1}{2}}$ est **strictement concave** pour $x_1 > 0$, on a $f_{11} = -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}} < 0$. La fonction f est **strictement concave** par rapport à x_1.
- Comme la fonction x_2^2 est **strictement convexe** pour $x_2 > 0$, on a $f_{22} = 2 > 0$. La fonction f est **strictement convexe** par rapport à x_2.
- D'après le **Théorème 10**, la fonction f n'est donc ni **strictement concave**, ni **strictement convexe** sur $\mathbb{R}^2_{++}$, comme l'illustre la **Figure 20**.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Figure 20



Propriétés de courbure (concavité et convexité)

- Pour les fonctions qui ne sont pas **additivement séparables**, dont les **dérivées partielles croisées d'ordre 2** ne sont pas nulles, la **concavité** implique que les **dérivées partielles non-croisées d'ordre 2** doivent être **négatives**.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Theorem (11)

Si une fonction $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *est* **concave**, *alors* $f_{ii} \leq 0$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n$. *Si la fonction* f *est* **convexe**, *alors* $f_{ii} \geq 0$ *pour tout* $i = 1, 2, ..., n$.

Propriétés de courbure (concavité et convexité)

- Nous terminerons cette section en montrant que si la somme des exposants d'une fonction **Cobb-Douglas** reste strictement inférieure à 1, alors la fonction **Cobb-Douglas** est **strictement concave**.
- Nous illustrons ce résultat dans l'**Exemple 31** pour une fonction de production **Cobb-Douglas** à deux facteurs. Toutefois, il reste vrai pour toute fonction **Cobb-Douglas** à n variables.

Example (31)

Soit une **fonction de production** à deux facteurs de type **Cobb-Douglas**

$$y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad A > 0,\, 0 < \alpha, \beta < 1$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = A\alpha\left[\alpha - 1\right] x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta}$$

$$f_{22} = A\beta\left[\beta - 1\right] x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2}$$

$$f_{12} = f_{21} = A\alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}$$

- Les **déterminants** des **sous-matrices principales successives** sont:

$$|H_1| = |f_{11}| = f_{11} = A\alpha\left[\alpha - 1\right] x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta}$$

et

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\alpha\left[\alpha - 1\right] x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} & A\alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ A\alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & A\beta\left[\beta - 1\right] x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} \end{vmatrix}$$

- Comme $0 < \alpha < 1$, on a $|H_1| < 0$. D'après le **Théorème 9.2**, la fonction est **strictement concave** si $|H_2| = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$.

- $|H_2| > 0$ est équivalente à $f_{11}f_{22} > f_{12}^2$, soit

$$\left[A\alpha\left[\alpha-1\right]x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}\right]\left[A\beta\left[\beta-1\right]x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}\right] > \left[A\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}\right]^2$$

- Cette inégalité est équivalente à

$$\begin{aligned} A^2\alpha\left[\alpha-1\right]\beta\left[\beta-1\right]x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2} &> A^2\alpha^2\beta^2x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2} \\ &\Leftrightarrow \\ \left[\alpha-1\right]\left[\beta-1\right] &> \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta<1 \end{aligned}$$

- La fonction est donc **strictement concave** si $\alpha + \beta < 1$.

Thème 1: Calcul pour les fonctions à plusieurs variables

1. Dérivées partielles d'ordre 1
2. Dérivées partielles d'ordre 2
3. Différentielle totale
4. Propriétés de courbure (concavité et convexité)
5. **D'autres propriétés des fonctions et applications économiques**

- Dans la **Section 1.3**, nous avons montré qu'une fonction à deux variables $f\left(x_1, x_2\right)$, définie sur $\mathbb{R}^2$, strictement croissante par rapport à chaque variable, possède des **courbes de niveau strictement convexes** $(\mathrm{TMST}/\mathrm{TMS}$ **décroissant**$)$ dans le repère (x_1, x_2) si la condition suivante est vérifiée:

$$f_2^{-3}\left[f_{11} f_2^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_{22} f_1^2\right] < 0$$

- Une fonction qui satisfait cette propriété est dite **strictement quasi-concave**.

- Toute fonction **strictement concave** est **strictement quasi-concave**, mais la réciproque est fausse.
- L'**Exemple 32** illustre cette implication pour une fonction à deux variables.

Example (32)

Soit une fonction **strictement concave** à deux variables $y = f(x_1, x_2)$, définie sur $\mathbb{R}^2$, et vérifiant $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$.

- Nous avons vu précédemment que f est **strictement concave** si:

$$d^2y = d\mathbf{x}^T H d\mathbf{x} < 0 \quad \text{pour tout vecteur } d\mathbf{x}$$

- Montrons que cette condition implique que f est **strictement quasi-concave**.

- Comme la condition de **stricte concavité** est vérifiée pour tout vecteur $d\mathbf{x}$, elle est notamment vérifiée pour

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{bmatrix}$$

- Ainsi, on a

$$d^2y = [f_2, -f_1] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{bmatrix} < 0$$

- En développant on obtient

$$
\begin{aligned}
d^2y &= \left[\left(f_2 f_{11} - f_1 f_{21} \right), \left(f_2 f_{12} - f_1 f_{22} \right) \right] \begin{bmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{bmatrix} \\
&= \left[f_2 f_{11} - f_1 f_{21} \right] f_2 + \left[f_2 f_{12} - f_1 f_{22} \right] \left[-f_1 \right] \\
&= f_{11} f_2^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_{22} f_1^2 < 0
\end{aligned}
$$

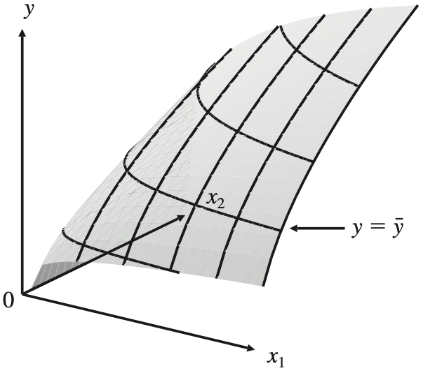
- Comme $f_2 > 0$, cette condition implique f est **strictement quasi-concave**.

- Les figures suivantes, illustrent la différence entre **concavité** et **quasi-concavité**.
- La **Figure 21a** représente la fonction à deux variables $y = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}}$. La **Figure 21b** représente une **courbe de niveau** pour cette fonction.
- La **Figure 22a** représente la fonction à deux variables $y = x_1 x_2^2$. La **Figure 22b** représente une **courbe de niveau** pour cette fonction.

- Les **courbes de niveau** des deux fonctions sont **convexes**.
- Les deux fonctions sont donc **quasi-concaves**.
- La fonction $y = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}}$ est **concave**, mais la fonction $y = x_1 x_2^2$ n'est pas **concave**.
- **quasi-concave** $\not\Rightarrow$ **concave**.

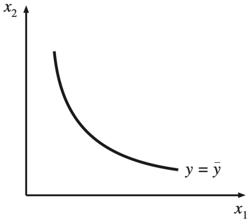
D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Figure 21a



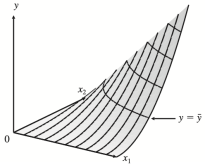
D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Figure 21b



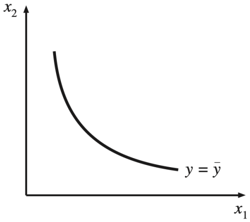
D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Figure 22a



D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Figure 22b



D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

- Le **Théorème 12** donne des **conditions suffisantes** pour qu'une fonction soit **quasi-concave** ou **quasi-convexe**.
- Le **Théorème 13** établit que la **concavité** implique la **quasi-concavité** et que la **convexité** implique la **quasi-convexité.**
- Avant de présenter ces théorèmes, nous avons besoin de définir la notion de **matrice Hessienne bordée**.

Definition (6)

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^n$, possédant des dérivées partielles continues d'ordre 1 et d'ordre 2. La **matrice Hessienne bordée** de la fonction f est

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

Elle obtenue en ajoutant le vecteur $[0, f_1, f_2, ..., f_n]$ en première ligne et première colonne à la **matrice Hessienne** H.

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

- Pour une **matrice Hessienne bordée** de taille $(n+1) \times (n+1)$, on note la **sous-matrice principale successive** d'ordre k:

$$\overline{H}_k = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1k} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k & f_{k1} & f_{k2} & \dots & f_{kk} \end{bmatrix}$$

- Remarquer que l'on ne la note pas $\overline{H}_{k+1}$ (pour simplifier les écritures notamment). On retire les $(n+1)-(k+1)$ derniers couples ligne/colonne pour obtenir la sous-matrice principale d'ordre k.

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

- Les **déterminants** des **sous-matrices principales successives** de $\overline{H}$ sont

$$\left|\overline{H}_1\right| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix}, \quad \left|\overline{H}_2\right| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix},$$

$$\left|\overline{H}_3\right| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

- Le **déterminant** de la **sous-matrice principale successive** d'ordre 1 est toujours **non-positif** car

$$\left|\overline{H}_1\right| = \begin{bmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{bmatrix} = 0 \times f_{11} - f_1 \times f_1 = -f_1^2$$

- En conséquence, il n'est pas fait mention du signe de $\left|\overline{H}_1\right|$ dans le **Théorème 12** ci-dessous.

Theorem (12)

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^n$, possédant des dérivées partielles continues d'ordre 1 et d'ordre 2. On note $\overline{H}$ la **matrice Hessienne bordée** *de f.*

1. *Si $\left|\overline{H}_2\right| > 0$, $\left|\overline{H}_3\right| < 0$,..., $\left|\overline{H}_n\right| = \left|\overline{H}\right| > 0$ (n pair) < 0 (n impair) pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$, alors f est* **quasi-concave**.
2. *Si $\left|\overline{H}_2\right| < 0$, $\left|\overline{H}_3\right| < 0$,..., $\left|\overline{H}_n\right| = \left|\overline{H}\right| < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$, alors f est* **quasi-convexe**.

Theorem (13)

Toute fonction **concave** *(resp.* **convexe***) est* **quasi-concave** *(resp.* **quasi-convexe***), mais la réciproque n’est pas nécessairement vraie.*

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Example (33)

Soit une fonction à deux variables $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$, définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$. Montrons que cette fonction est **quasi-concave** en utilisant le **Théorème 12.1**.

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{H}_2\right| &= \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2^2 & 2x_1x_2 \\ x_2^2 & 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} \\
&= 0 \begin{vmatrix} 0 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} - x_2^2 \begin{vmatrix} x_2^2 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2x_1x_2 \begin{vmatrix} x_2^2 & 0 \\ 2x_1x_2 & 2x_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\overline{H}_2| &= -x_2^2 \begin{vmatrix} x_2^2 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 2x_1 \end{vmatrix} + 2x_1x_2 \begin{vmatrix} x_2^2 & 0 \\ 2x_1x_2 & 2x_2 \end{vmatrix} \\
&= -x_2^2 \left[2x_1x_2^2 - 4x_1x_2^2\right] + 4x_1x_2^4 \\
&= 6x_1x_2^4 > 0 \quad \text{pour } x_1, x_2 > 0
\end{aligned}
$$

- D'après le **Théorème 12.1**, la fonction f est **quasi-concave**.

Example (34)

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^2_+$, possédant des dérivées partielles continues d'ordre 1 et d'ordre 2. Montrons la condition de **quasi-concavité** du **Théorème 12.1** est cohérente avec la condition donnée au début de cette section.

La **condition suffisante** de **quasi-concavité** du **Théorème 12.1** est

$$\left|\overline{H}_2\right| = \left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{H}_2\right| &= \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} - f_1 \begin{vmatrix} f_1 & f_{12} \\ f_2 & f_{22} \end{vmatrix} \\
&\quad + f_2 \begin{vmatrix} f_1 & f_{11} \\ f_2 & f_{21} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\overline{H}_2| &= -f_1 \begin{vmatrix} f_1 & f_{12} \\ f_2 & f_{22} \end{vmatrix} + f_2 \begin{vmatrix} f_1 & f_{11} \\ f_2 & f_{21} \end{vmatrix} \\
&= -f_1 \left[f_1 f_{22} - f_{12} f_2 \right] + f_2 \left[f_1 f_{21} - f_{11} f_2 \right] \\
&= -f_{11} f_2^2 + 2 f_1 f_2 f_{12} - f_{22} f_1^2 > 0
\end{aligned}
$$

- Si $f_2 > 0$ on retrouve la condition introduite au début de cette section:

$$
f_2^{-3} \left[f_{11} f_2^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_{22} f_1^2 \right] < 0
$$

- La fonction **Cobb-Douglas**, définie sur $\mathbb{R}^n_+$,

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

  où $A > 0$ et $0 < \alpha_i < 1$ pour tout $i = 1, ..., n$, est **quasi-concave**.
- Elle est **concave** si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ et **strictement concave** si $\sum_{i=1}^n \alpha_i < 1$.

- En microéconomie, lorsque l'on étudie la **théorie de l'entreprise concurrentielle**, on impose la **concavité** (plutôt que la **quasi-concavité**) des **fonctions de production**. La **concavité** exclut la possibilité de **rendement d'échelle croissants**, un phénomène incompatible avec l'existence d'un grand nombre d'entreprise de *petite* taille, car si les **rendements d'échelle sont croissants**, il est plus efficace pour les entreprises de fusionner ou d'accroître au maximum leur taille plutôt que de rester *petites*.
- L'analyse est alors sensiblement simplifiée lorsque l'on restreint à des **fonctions de production homogènes**.

Definition (7)

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^n$, est **homogène** de degré k si

$$f\left(sx_1, sx_2, ..., sx_n\right) = s^k f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

où s est une constante positive.

- Si une **fonction de production** est **homogène** de degré k, alors multiplier la quantité de chaque facteur par une constante s va augmenter la production de s^k.
- Par exemple, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ est **homogène** de degré 3:

$$f(sx_1, sx_2) = sx_1 [sx_2]^2 = s^3 x_1 x_2^2 = s^3 f(x_1, x_2)$$

- Doubler la quantité de chaque facteur ($s = 2$) conduit à multiplier la production par 8 ($s^k = 2^3$). Ceci est un exemple de **rendements d'échelle croissants** ($s^k > s$).

- Par exemple, $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{2}}$, est **homogène** de degré $\frac{3}{4}$:

$$f(sx_1, sx_2) = [sx_1]^{\frac{1}{4}} [sx_2]^{\frac{1}{2}} = s^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} [x_1]^{\frac{1}{4}} [x_2]^{\frac{1}{2}} = s^{\frac{3}{4}} f(x_1, x_2)$$

- Doubler la quantité de chaque facteur $(s = 2)$ conduit à multiplier la production par $s^k = 2^{\frac{3}{4}} = 1,68 < 2$. Ceci est un exemple de **rendements d'échelle décroissants** $(s^k < s)$.

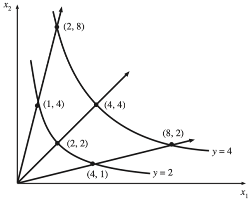
- Par exemple, $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$, est **homogène** de degré 1:

$$f(sx_1, sx_2) = [sx_1]^{\frac{1}{2}} [sx_2]^{\frac{1}{2}} = s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} [x_1]^{\frac{1}{4}} [x_2]^{\frac{1}{2}} = sf(x_1, x_2)$$

- Doubler la quantité de chaque facteur $(s = 2)$ conduit doubler la production $(s^k = 2)$. Ceci est un exemple de **rendements d'échelle constants** $(s^k = s)$.
- Cette exemple est illustré **Figure 23**.

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Figure 23 (rendements d'échelle constants)



D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

- Evidemment, toutes les fonctions ne sont pas **homogènes**.
- L'exemple suivant illustre ce point.

Example (35)

Soit une **fonction de production non-homogène** à deux facteurs

$$y = f\left(x_1, x_2\right) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{3}{2}}$$

- On a

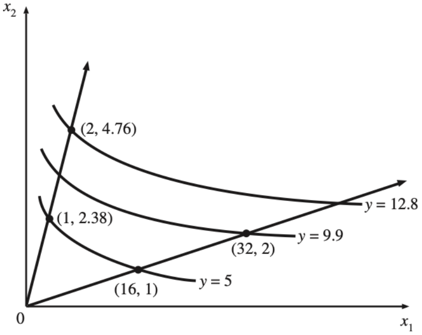
$$\begin{aligned} f\left(sx_1, sx_2\right) &= \left[sx_1\right]^{\frac{1}{2}}\left[sx_2\right]^{\frac{1}{3}} + \left[sx_2\right]^{\frac{3}{2}} \\ &= s^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} + s^{\frac{3}{2}} x_2^{\frac{3}{2}} \\ &= s^{\frac{5}{6}} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} + s^{\frac{3}{2}} x_2^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

- Cette fonction est **non-homogène** car elle ne peut pas être écrite sous la forme

$$f\left(sx_1, sx_2\right) = s^k f\left(x_1, x_2\right) = s^k\left[x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{3}{2}}\right]$$

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Figure 24 (Exemple 35)



D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Theorem (14)

Soit une **fonction de production** $f(\mathbf{x})$, *définie sur* $\mathbb{R}^n_+$, **homogène** *de degré* k*:*

$$f(s\mathbf{x}) = s^k f(\mathbf{x})$$

1. *Si* $k > 1$, *les* **rendements d'échelle** *sont* **croissants** $(s^k > s)$.
2. *Si* $k = 1$, *les* **rendements d'échelle** *sont* **constants** $(s^k = s)$.
3. *Si* $k < 1$, *les* **rendements d'échelle** *sont* **décroissants** $(s^k < s)$.

- Lorsque la **fonction de production** est **homogène**, le **Théorème 15** ci-dessous, connu sous le nom de **théorème d'Euler** permet d'obtenir un résultat intéressant.

Theorem (15)

Si une fonction $f(\mathbf{x})$, définie sur $\mathbb{R}_+^n$, **homogène** *de degré k, alors:*

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

C'est le **théorème d'Euler**.

- La preuve reste assez simple à établir. D’après la **Définition 7**, Si la fonction f est homogène de degré k, on a:

$$f\left(sx_1, sx_2, ..., sx_n\right) = s^k f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

- En différenciant les deux membres de cette égalité par rapport à s, on a:

$$f_1 \frac{\partial\left[sx_1\right]}{\partial s} + f_2 \frac{\partial\left[sx_2\right]}{\partial s} + ... + f_n \frac{\partial\left[sx_n\right]}{\partial s} = ks^{k-1} f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

- Ceci implique que

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_n x_n = ks^{k-1} f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

- Comme cette condition est valable pour tout $s > 0$, elle est valable pour $s = 1$:

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_n x_n = kf\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

- Lorsque $k = 1$, le **théorème d'Euler** nous apprend que la quantité produite est obtenue en sommant la quantité de chaque facteur pondérée par sa **productivité marginale**.
- L'exemple suivant illustre ce point

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Example (36)

Soit une **fonction de production** à deux facteurs de type **Cobb-Douglas**, et **homogène** de degré 1

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}$$

- Les **productivités marginales** sont

$$f_1 = \frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{3}{4} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{-\frac{1}{4}}$$

- En conséquence

$$\begin{aligned} f_1 x_1 + f_2 x_2 &= \frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} x_1 + \frac{3}{4} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{-\frac{1}{4}} x_2 \\ &= \frac{1}{4} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} \\ &= x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} \\ &= f\left(x_1, x_2\right) \end{aligned}$$

- Nous avons vu précédemment que l'**élasticité de substitution** $\sigma > 0$ entre deux facteurs de production est calculée en rapportant le **taux de variation du rapport des quantités de facteurs** au **taux de variation du** TMST.
- Plus l'**élasticité de substitution** σ est **forte**, plus les facteurs peuvent être aisément substitués l'un à l'autre (**substituts parfaits** lorsque $\sigma \to \infty$).
- Plus l'**élasticité de substitution** σ est **faible**, moins les facteurs peuvent être aisément substitués l'un à l'autre (**compléments parfaits** lorsque $\sigma \to 0$).

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Definition (8)

L'**élasticité de substitution** du facteur j au facteur i, pour une **fonction de production** à n variables $y = f(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^n$, ayant des dérivées partielles continues, est définie par

$$\sigma_{j,i} = \frac{d \ln (x_j / x_i)}{d \ln (f_i / f_j)}$$

où

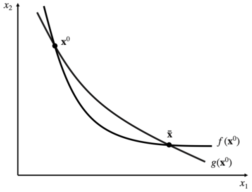
$$\frac{f_i}{f_j} = \mathrm{TMST}_{j,i}$$

- La **Figure 25** illustre les **isoquantes** de deux **fonctions de production** à deux facteurs différentes f et g.
- Lorsque l'on se déplace de gauche à droite (du point $\mathbf{x}^0$ au point $\bar{\mathbf{x}}$) le ratio des quantités de facteurs x_2/x_1 évolue au même taux pour f et g (numérateur de $\sigma_{2,1}$).
- Par contre, la pente de f diminue à un taux plus fort que la pente de g. Autrement dit, le TMST de f diminue plus vite que le TMST de g (dénominateur de $\sigma_{2,1}$).

- La fonction g a donc une **élasticité de substitution** plus forte que la fonction f.
- La technologie représentée par g permet donc de substituer plus aisément les facteurs que la technologie représentée par f.

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Figure 25



Example (37)

Soit une **fonction de production** $f(x_1, x_2)$, définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$, de type **Cobb-douglas**:

$$y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} \quad A > 0,\ 0 < \alpha, \beta < 1$$

où A, α et β sont des paramètres technologiques.

- Les **productivités marginales** sont

$$f_1 = A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} \quad \text{et} \quad f_2 = A\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}$$

- Le TMST du facteur 2 au facteur 1 est

$$\mathrm{TMST}_{2,1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Exemple 37

- En appliquant le logarithme (en utilisant la règle $ln\left(ab\right) = \ln a + \ln b$):

$$\ln\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

- Ce qui implique (en utilisant la règle $ln\left(a^{-1}\right) = -\ln a$):

$$\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \ln\left(\frac{f_1}{f_2}\right) + \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

- En différentiant, on obtient finalement (car $\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = cst$):

$$d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = d\ln\left(\frac{f_1}{f_2}\right) \Rightarrow \sigma_{2,1} = 1$$

Example (38)

Soit une **fonction de production** $f(L, K)$, définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$, de type **CES**:

$$y = f(L, K) = \left[\delta L^{-r} + (1-\delta) K^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}}$$

où $0 < \delta < 1$, et $r > -1$ sont des paramètres technologiques. L'**élasticité de substitution** est $\sigma = \frac{1}{1+r}$.

- Les **productivités marginales** sont

$$
\begin{aligned}
f_L &= -\frac{1}{r}\delta\,[-r]\,L^{-r-1}\left[\delta L^{-r}+[1-\delta]\,K^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}-1} \\
&= \delta L^{-r-1}\left[\delta L^{-r}+[1-\delta]\,K^{-r}\right]^{-\frac{1+r}{r}}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
f_K &= -\frac{1}{r}\,[1-\delta]\,[-r]\,K^{-r-1}\left[\delta L^{-r}+[1-\delta]\,K^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}-1} \\
&= [1-\delta]\,K^{-r-1}\left[\delta L^{-r}+[1-\delta]\,K^{-r}\right]^{-\frac{1+r}{r}}
\end{aligned}
$$

- Le TMST du facteur capital au facteur travail est donc

$$\mathrm{TMST}_{K,L} = \frac{f_L}{f_K} = \frac{\delta}{1-\delta}\left[\frac{K}{L}\right]^{1+r}$$

- En appliquant le logarithme on obtient

$$\ln\left(\frac{f_L}{f_K}\right) = \ln\left(\frac{\delta}{1-\delta}\left[\frac{K}{L}\right]^{1+r}\right)$$

- Ce qui implique:

$$\ln\left(\frac{f_L}{f_K}\right) = \ln\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) + [1+r]\ln\left[\frac{K}{L}\right]$$

- En différentiant, on obtient finalement:

$$d\ln\left(\frac{f_L}{f_K}\right) = [1+r]\, d\ln\left[\frac{K}{L}\right] \Rightarrow \sigma_{K,L} = \frac{d\ln\left[\frac{K}{L}\right]}{d\ln\left(\frac{f_L}{f_K}\right)} = \frac{1}{1+r}$$

- La **Figure 26** illustre les isoquantes de la fonction CES pour différentes valeurs du paramètre r (et de l'élasticité de substitution σ).
- Noter que $r \longrightarrow 0 \Rightarrow \sigma \longrightarrow 1$ (**Cobb-Douglas**), $r \longrightarrow -1 \Rightarrow \sigma \longrightarrow \infty$ (**substituts parfaits**) et $r \longrightarrow \infty \Rightarrow \sigma \longrightarrow 0$ (**Leontief** / **compléments parfaits**).

D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Figure 26 (Exemple 38)