$$f_6(x) = 2x - \cos x \qquad f_7(x) = 2^x - \exp(x) \qquad f_8(x) = \frac{x\ln(x)}{1-x}$$

$\boxed{2.}$ $\lim\limits_{-\infty} \underbrace{2^x - e^x}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} - \frac{1}{e^x} = 0$ $\mathcal{C}_{f_7}$ admet (Ox) comme A.H. en $-\infty$.   Question: Positions relative

Etude de signe

Possibilité 1: $2^{+\infty} - e^{+\infty}$

Possibilité 2: $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2^x} - \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{e^x - 2^x}{2^x e^x} > 0.$ $\Rightarrow \mathcal{C}_{f_7}$ est au-dessus de (Ox) en $-\infty$.

$f_8(x) = \dfrac{x\ln x}{1-x}$ $\mathcal{D}_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$

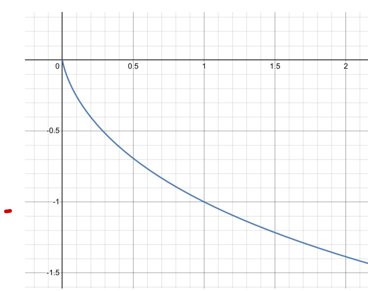
$\boxed{1.}$ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x\ln x}{-x+1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x}\overbrace{\ln x}^{\to+\infty}}{\cancel{x}\underbrace{\left(-1+\frac{1}{x}\right)}_{\to -1}} = -\infty$ $\Rightarrow$ A.O?

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f_8(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{-x+1} = \lim\limits_{+\infty} \underbrace{\dfrac{\ln(x)}{-x+\cdots}}_{0} = 0$ $m=0. \to$ STOP. Pas d'A.O. mais direction asymptotique $m=0$ ou branche parabolique de direction (Ox).

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{0} f_8(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{\overbrace{x\ln x}^{\to 0}}{1-x} = 0$ $\Rightarrow$ Pas d'A.V, $\mathcal{C}_{f_8}$ tend vers l'origine.

$\boxed{3.}$ $\lim\limits_{1} f_8(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{\overbrace{x\ln x}^{\to 0}}{\underbrace{1-x}_{\to 0}} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ $\Rightarrow$ Règle de L'Hospital (Reflexe immédiat). $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ si $g(x)\to 0$ et $f(x)\to 0$.

$= \lim\limits_{1} \dfrac{\overbrace{\ln x + 1}^{\to 1}}{-1} = -1$ $\Rightarrow$ Pas d'A.V. $\mathcal{C}_{f_8}$ tend vers le point de coordonnées $(1;-1)$



3. Calculer les limites et déterminer les éventuelles asymptotes aux bornes de l'intervalle d'étude I de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$; $I =]-\infty\,;\,1[$ (b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$; $I =]0\,;\,+\infty[$

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty\,;\,2[$ (d) $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $I =]0\,;\,\pi[$ (f) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4\,;+\infty[$ (h) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(a) $\lim\limits_{1^-} \underbrace{x}_{\to 1} + \dfrac{1}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$. A.V d'éq $x=1$

$\lim\limits_{-\infty} x + \underbrace{\dfrac{1}{x-1}}_{\to 0} = -\infty$. De plus $\lim\limits_{-\infty} \underbrace{x + \dfrac{1}{x-1}}_{\mathcal{C}_f} - \underbrace{x}_{D.} = 0^-$ $\mathcal{C}_f$ admet $D : y = x$ comme A.O en $-\infty$. ($\mathcal{C}_f$ en-dessous).

(b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ $I =]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{0^+} \dfrac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty$ A.V d'éq $x = 0$. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cos x}{x} = \lim\limits_{+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} \overbrace{\cos x}^{\text{bornée}} = 0$. A.H d'éq. $y = 0$.

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$ $I =]-\infty ; 2[$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ $\deg(f(x)) > 2 \Rightarrow$ Pas d'A.O. $\Rightarrow$ branche parabolique (Oy)

$\lim\limits_{2} f(x) = f(2) = -19$. Car f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = -2x^3 - 5x + 7$; $I =]-\infty\,;\,2[$ (d) $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; $I =]0\,;\,\pi[$ (f) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$; $I =]4\,;+\infty[$ (h) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 - x}$; $I =]1\,;\,+\infty[$

(d) $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$ $I =]1;+\infty[$ f est définie en $x=1$ et continue $\lim_{1} f(x) = f(1) = 1.$

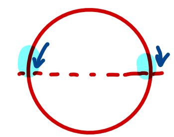
$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}_{\to 1} = +\infty$ Hypothèse : $D: y = x$ est A.O. à $\mathcal{C}_f$

↳ $\lim_{+\infty} f(x) - x = \lim_{+\infty} \cancel{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \cancel{x} = 0.$ ⇒ Hypothèse validée

⇒ $\mathcal{C}_f$ admet $D: y = x$ comme A.O en $+\infty$.

(e) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ $I =]0;\pi[$

$\lim_{0^+} \frac{1}{\underbrace{\sin(x)}_{\to 0^+}} = +\infty$ ⇒ A.V d'éq $x = 0$



$\lim_{\pi^-} \frac{1}{\underbrace{\sin(x)}_{\to 0^+}} = +\infty$ ⇒ A.V d'éq $x = \pi$

(f) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - x}$ $I =]1;+\infty[$ $D_f = \mathbb{R}$.

$\lim_{1} f(x) = f(1) = \frac{e-2}{e-1} \simeq 0{,}418.$

$\lim_{+\infty} \frac{e^x - 2}{e^x - x} = \lim_{+\infty} \frac{e^x(1 - 2/e^x)}{e^x(1 - x/e^x)} = 1$ → A.H. d'éq $y = 1$.

Position relative : $\lim_{+\infty} f(x) - 1 = 0^{+\text{ ou }-}$

$\lim_{+\infty} \frac{e^x - 2 - e^x + x}{e^x - 1} = \lim_{+\infty} \frac{x - 2}{e^x - 1} = 0^+$ $\mathcal{C}_f$ au dessus de l'A.H.

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$; $I =]4\,;+\infty[$ (h) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1-x}$; $I =]1\,;+\infty[$

(g) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\dots}{x^2+\dots} = 0^+ \Rightarrow (Ox)$ est A.H en $+\infty$ à $\mathcal{C}_f$ (au-dessus de D).

$\lim\limits_{4} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \Rightarrow$ Règle de l'Hospital (Réflexe)

$= \lim\limits_{4} \dfrac{1/2\sqrt{x}}{2x-5} = \dfrac{1/4}{3} = \dfrac{1}{12}$ $\Rightarrow$ Pas d'AV mais $\mathcal{C}_f$ tend vers le point $(4; 1/12)$

(h) $\lim\limits_{1} \dfrac{1-x^3}{1-x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \longmapsto$ l'Hospital

$\lim\limits_{1} f(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{-3x^2}{-1} = 3$ $\mathcal{C}_f$ tend vers le point $(1;3)$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-x^3+\dots}{-x+\dots} = \lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty.$ $\Rightarrow$ Branche parabolique. (Oy)

Sinus cardinal

4. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;

(b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.

(c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \to 0$?

(a) $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

f et g sont paires $\longrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent (Oy) comme axe de symétrie.

Ensemble de travail: $I =]0; +\infty[$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{\sin x}_{\text{bornée}} = 0$ Corollaire du théorème d'encadrement $\Rightarrow$ (Ox) est A.H à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (en $-\infty$)

4. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

(a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;

(b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.

(c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \to 0$?

Position relative : $-1 \leq \sin x \leq 1$ (Ox) $\sin(x)$ est alternative donc pas de position relative

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad x>0$$

$$0^- \qquad 0 \qquad 0^+$$

$$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{\sin x}{x} = "\frac{0}{0}" = \lim_{0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$\Rightarrow$ On ne peut pas parler de branche infinie en 0 puisque $\mathscr{C}_f \to (0;1)$.

On crée une fonction $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Prolongement par continuité de f.

Pour $g(x)$: $\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0} \underbrace{(1 - \cos x)}_{\text{bornée entre } 0 \text{ et } 2} = 0^+$ $\Rightarrow$ (Ox) est A.H à $\mathscr{C}_g$ en $\pm\infty$.

$\mathscr{C}_g$ est au-dessus de (Ox)

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 1-1 \leq 1-\cos x \leq 1+1 \Rightarrow 0 \leq 1-\cos x \leq 2$$

4. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

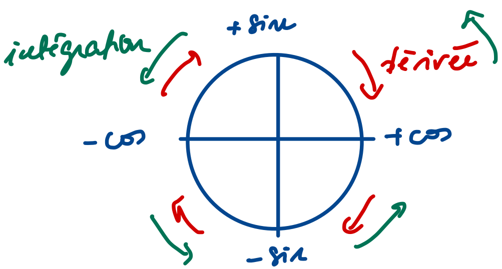
(a) Déterminer les ensembles de définition de f et g ;

(b) puis étudier les branches infinies de ces fonctions.

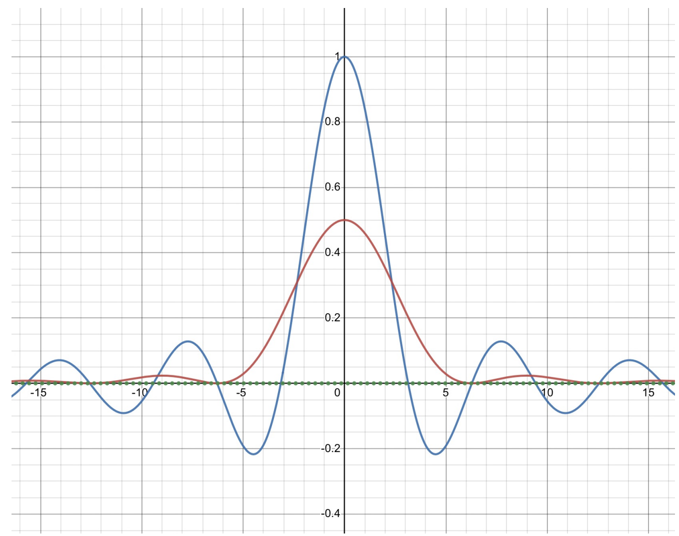
(c) Peut-on parler de branches infinies pour f et g quand $x \to 0$?

$$\lim_{0} g(x) = \lim_{0} \frac{\overbrace{1-\cos x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \to \text{l'Hospital}$$

$$= \lim_{0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{0} \frac{1}{2} \overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 1} = \frac{1}{2}$$



Pas de branche infinie quand $x \to 0$: $\mathcal{C}_g \to (0; \frac{1}{2})$

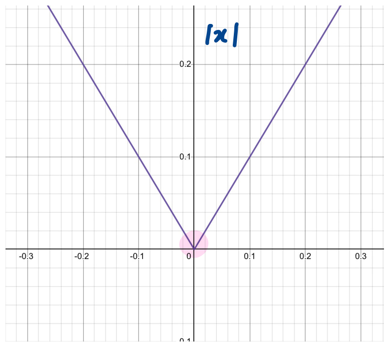


5. La fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\lim_{0} f(x) = ?$

$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ admet-elle une limite en 0 ?

$\Leftrightarrow$ $|x|$ est-elle dérivable en 0 ?

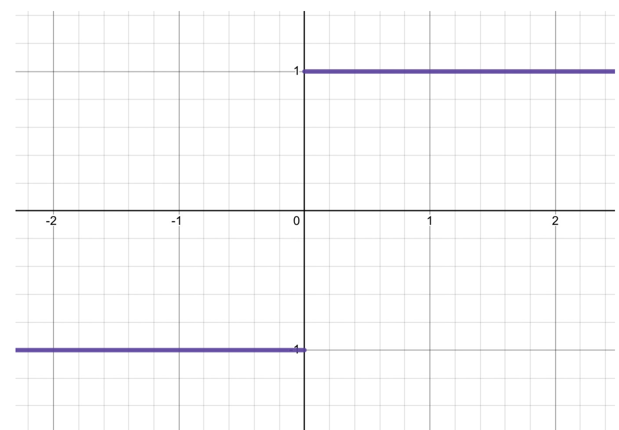
$\lim_{0} \dfrac{|x|}{x} = \lim_{0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0}$

Je dois décider si $x \to 0^+$ ou si $x \to 0^-$

Pour calculer la limite en 0, je fais $\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \dfrac{\bigcirc}{x}$

Stratégie : $\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^-} f(x)$?

$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \neq \lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$

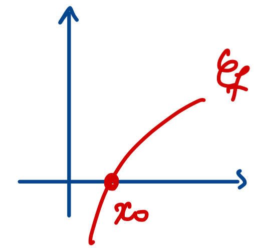


$\Rightarrow f$ n'admet pas de limite en 0.

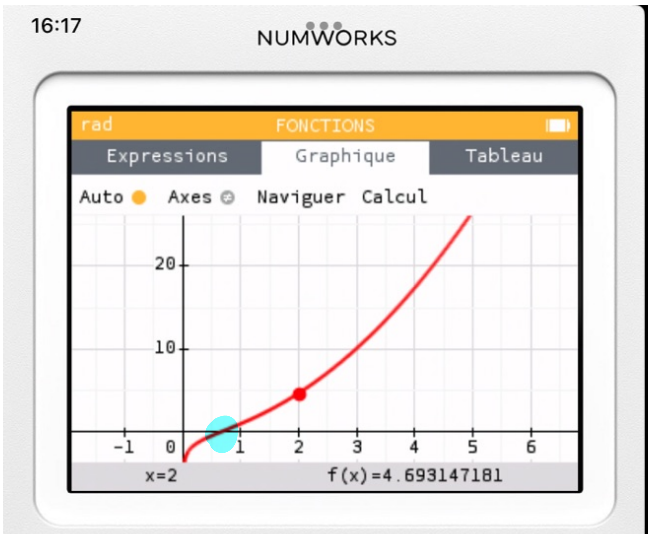
TD 7

2. Donner une approximation à 10^{-2} près des solutions de l'équation $x^2 = -\ln(x)$.

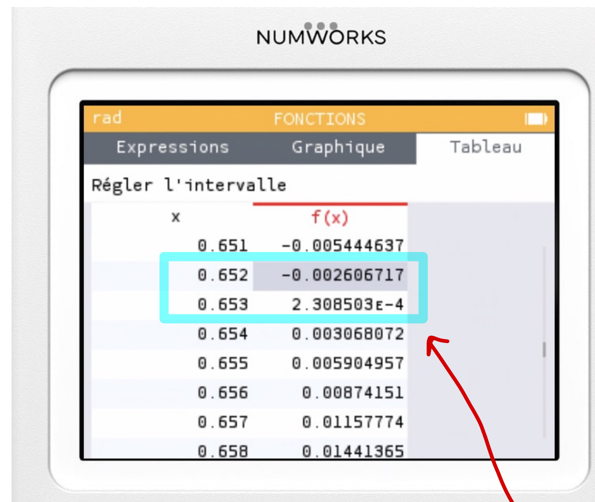
Cherche x_0 / $x^2 = -\ln x$ c'est chercher x_0 / $f(x) = x^2 + \ln(x) = 0$



AVEC LA CALCULATRICE



$x_0 \in]0;1[$



$x_0 \in]0{,}652 ; 0{,}653[$

f(x) change de signe.

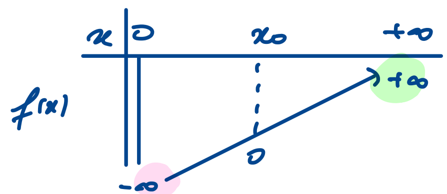
TVI : x_0 existe et est unique $\Leftrightarrow$ 1. f continue
2. f change de signe
3. f est strictement monotone

AVEC LES NOTIONS DE MATH

1. $\rightarrow$ $f(x) = x^2 + \ln(x)$ est continue sur $D_f =]0;+\infty[$

3. $\rightarrow$ J'étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} > 0 \text{ sur } D_f \Rightarrow f \text{ est strictement croissante}$$



$f(1) = 1$
$f(0{,}5) = -0{,}443$
$\Rightarrow x_0 \in]0{,}5;1[$

$f(0{,}75) = 0{,}275$
$x_0 \in]0{,}5;0{,}75[$

2. $\rightarrow$ Je regarde la courbe de loin (je dézoome)

$$\lim_{0} x^2 + \ln x = -\infty$$

$$\lim_{+\infty} x^2 + \ln x = +\infty$$

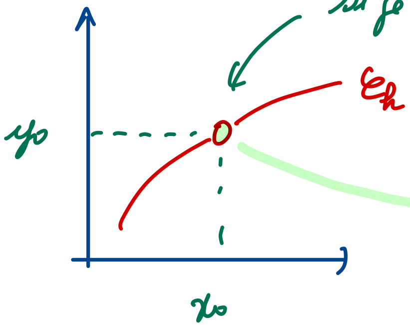
$\Rightarrow \exists x_0 \in]0;+\infty[\;/\; f(x_0) = 0.$ $\Rightarrow$ Calculatrice (tableau)

etc... $\underbrace{f(0{,}65) = -0{,}008 \quad f(0{,}66)}_{x_0 \in]0{,}65;\,0{,}66[} = 0{,}0201$

$\Rightarrow$ Nous avons procédé par dichotomie.

3. Prolonger par continuité chacune des fonctions $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de leurs prolongements par continuité.

Si je rajoute un point ici je prolonge la courbe



$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = y_0$ alors que h n'est pas définie en x_0.

Je peux prolonger $h(x)$ par $\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ y_0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

(a) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \underset{\to 0}{x} \sin\left(\underset{\to \pm\infty}{\frac{1}{x}}\right)$ n'existe pas mais elle est bornée $\Rightarrow \lim\limits_{0} f(x) = 0$ DONC f est prolongeable par continuité en 0

par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Dire que $\tilde{f}$ est dérivable en x_0 c'est dire que je peux calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ en x_0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{x - x_0} = \tilde{f}'(x_0)$$

↳ Nombre ! C'est lui le coeff. directeur.

$\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ? $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \lim\limits_{0} \dfrac{x\sin(1/x)-0}{x-0} = \lim\limits_{0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

Donc le coef. directeur de la tangente en 0 de $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ n'existe pas et donc $\tilde{f}$ n'est pas
(le nombre dérivé)

dérivable en 0.

(b) $g(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad \mathcal{D}g =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{0} g(x) = \lim\limits_{0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}} = 0 \Rightarrow g$ est prolongeable par continuité en $x=0$ par $\tilde{g}(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Question : $\tilde{g}$ est-elle dérivable en $x=0$?

$\lim\limits_{0} \dfrac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0} = \lim\limits_{0} \dfrac{x^2\sin(1/x)-0}{x-0} = \lim\limits_{0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \tilde{g}'(0)$ $\Rightarrow$ J'ai calculé le coeff directeur de la tangente.

$\Rightarrow \tilde{g}$ est dérivable en $x=0$.

4. Lorsque c'est possible, prolonger par continuité les fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$

(a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \Rightarrow \mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \{0\,[2\pi]\}$

f est 2π-périodique $\Rightarrow I = [-\pi;0[\cup]0;\pi]$

f est impaire $\Rightarrow I =]0;\pi]$

$$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{\underset{\to 0}{\sin x}}{\underset{\to 0}{1-\cos x}} = \lim_{0^+} \frac{\underset{\to 1}{\cos x}}{\underset{\to 0^+}{\sin x}} = +\infty.$$

$\Rightarrow f$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

"$\frac{0}{0}$" $\to$ L'Hospital

(b) $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$

$D_g =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$$\lim_{1} g(x) = \lim_{1} \frac{1}{\underbrace{1-x}_{\infty}} - \frac{3}{\underbrace{1-x^3}_{\infty}} = \lim_{1} \frac{1-x^3-3(1-x)}{(1-x)(1-x^3)} = \lim_{1} \frac{-x^3+3x-2}{\underbrace{1-x-x^3+x^4}_{\text{"}\frac{0}{0}\text{"} \Rightarrow \text{L'Hospital}}} = \lim_{1} \frac{\underset{\to 0}{-3x^2+3}}{\underbrace{\underset{\to 0}{4x^3-3x^2-1}}_{\text{"}\frac{0}{0}\text{"} \Rightarrow \text{L'Hospital}}} = \lim_{1} \frac{-6x}{12x^2-6x} = \frac{-6}{6} = -1$$

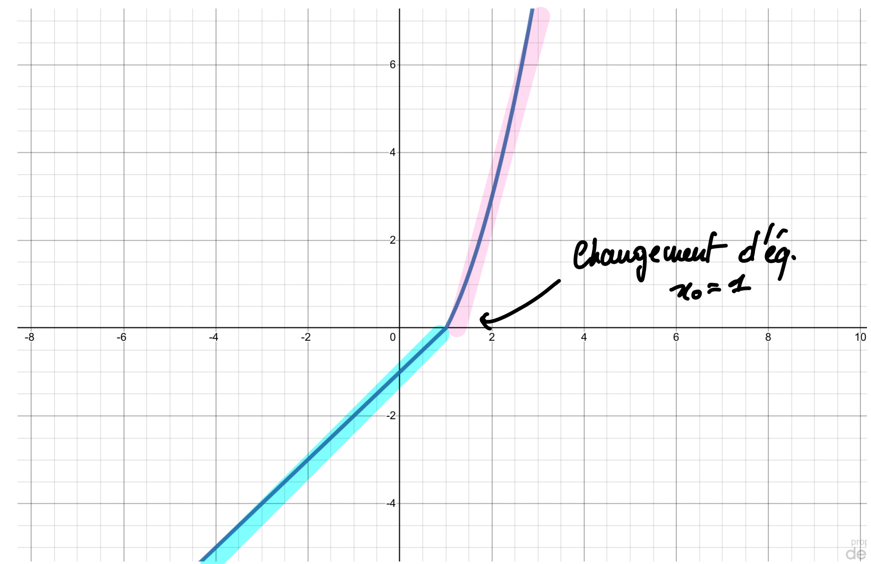
$\Rightarrow \lim_{1} g(x) = -1 \Rightarrow g$ est prolongeable par continuité en $x = 1$.

$$\Rightarrow \tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

5. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par morceaux par

$$f(x) = \begin{cases} x-1 \text{ si } x<1 \\ x^2-1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

On utilise les notions de limite à gauche et à droite pour étudier la continuité $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$ et la dérivabilité de f : $\lim_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ taux d'accroissement.



(a) $\lim_{x\to 1} f(x) = ?$ Je dois procéder à gauche et à droite.

$\lim_{1^+} f(x) = \lim_{1^+} x^2-1 = 0 = f(1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$\lim_{1^-} f(x) = \lim_{1^-} x-1 = 0$

$\Big\}\ \lim_{1} f(x) = 0 = f(1)$

↳ c'est la définition de la continuité

(b) $\lim_{1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{1^+} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{1^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2$

$\lim_{1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{1^-} \frac{x-1-0}{x-1} = 1$

$2 \neq 1$ $\quad \lim_{1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ n'existe

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en 1.

NB: Autre méthode : En 1^- $\quad f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{1^-} f'(x) = 1$

En 1^+ $\quad f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad \lim_{1^+} f'(x) = 2$

7. Remplir le tableau ci-dessous :

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}$
$\arccos(x)$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$		$\pi/4$	$\pi/6$	0	
$\arcsin(x)$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$		$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	
$\arctan(x)$	$-\pi/4$				0		$\pi/6$			$\pi/4$	$\pi/3$

$\longleftarrow$ impaire (arcsin)

$\longleftarrow$ impaire. (arctan)

$y = \arccos(x)$ me renvoie $y \in [0;\pi]$. Mais attention l'angle correspondant est à interpréter : $\theta = \pm y \ [2\pi]$

$y = \arcsin(x)$ me renvoie $y \in [-\pi/2 ; \pi/2]$. ⚠ $\theta = \begin{cases} y & [2\pi] \\ \pi - y & [2\pi] \end{cases}$

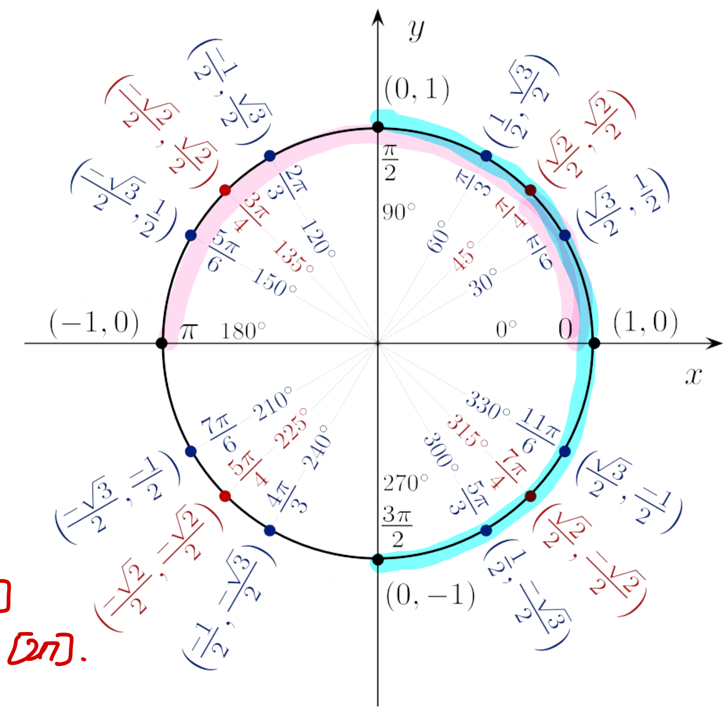
$y = \arctan(x)$ me renvoie $y \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\xrightarrow{\pi/6}$ $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\xrightarrow{\pi/4}$ $\tan(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$

$\xrightarrow{\pi/3}$ $\tan(\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

⚠ $\theta = \begin{cases} y & [2\pi] \\ y + \pi & [2\pi]. \end{cases}$



$\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. À l'aide des formules de dérivées usuelles, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ **2)** $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+1}$ **3)** $f(x) = \exp\left[\tan\left(x^2+1\right)\right]$

4) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$ **5)** $f(x) = \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)$ **6)** $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$

7) $f(x) = \arctan(3x)$ **8)** $f(x) = \arctan(3x)$ **9)** $f(x) = \arccos(2x+1)$

10) $f(x) = \arcsin\left(x^2\right)$ **11)** $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad (u^n)' = nu^{n-1}\times u'$$

$$\left(u\circ v\circ w(x)\right)' = w'(x)\times v'\circ w(x)\times u'\circ v\circ w(x)$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x(1-\cos x) - \sin x\sin x}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{\cos x - \overbrace{(\cos^2 x+\sin^2 x)}^{-1}}{(1-\cos x)^2} = \dfrac{\cos x - 1}{(\cos x-1)^2} = \dfrac{1}{\cos x - 1}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(6x-4)(x^2+1) - (3x^2-4x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{\cancel{6x^3}+6x-4x^2-4-\cancel{6x^3}+8x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^2+4x-4}{(x^2+1)^2} = 4\,\dfrac{x^2+x-1}{(x^2+1)^2}$

$\Delta = 1+4 = 5 = (\sqrt{5})^2$ $\quad x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad x_2 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	3

3) $f(x) = \exp[\tan(x^2+1)]$

$= u\circ v\circ w(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = \tan(x) \\ w(x) = x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2(x) \\ w'(x) = 2x \end{cases}$

$f'(x) = 2x \times \underbrace{\dfrac{1}{\cos(x^2+1)}}_{>0} \underbrace{\exp[\tan(x^2+1)]}_{>0}$ a le signe de x.

4) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$ **5)** $f(x) = \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)$ **6)** $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$

7) $f(x) = \arctan(3x)$ ~~8) $f(x) = \arctan(2x)$~~ **9)** $f(x) = \arccos(2x+1)$

10) $f(x) = \arcsin\left(x^2\right)$ **11)** $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x).$

$2\cos x \sin x = \sin(2x).$

4) $f(x) = \sin(x)\cos(x) \to f'(x) = \cos x.\cos x + \sin x(-\sin(x)) = \cos^2 x - \sin^2(x) = \cos(2x).$

5) $f(x) = \sin^2 x . \cos^3 x \to f'(x) = \underbrace{2\sin x \cos x}_{(\sin^2 x)'} . \cos^3 x + \sin^2 x \, 3\cos^2 x(-\sin x) = 2\sin x \cos^4 x - 3\sin^3 x \cos^2 x = \sin x \cos^2 x\left[2\cos^2 x - 3\sin^2 x\right]$

contrôle le signe de $f'(x)$.

6) $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1} = (2x^2-3x+1)^{1/2} \to f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2-3x+1)^{-1/2}.(4x-3) = \dfrac{4x-3}{\underbrace{2\sqrt{2x^2-3x+1}}_{\text{positif si défini}}}$

<u>Exo sup:</u> $D_f = ?$

$D_f =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$

$\Delta = 9-8 = 1 = 1^2 \to x_1 = \dfrac{3-1}{2\times 2} = 1/2 \Rightarrow 2x^2+\dots\dots$ est positif à l'extérieur de ses racines.

$\to x_2 = \dfrac{3+1}{2\times 2} = 1$

7) $f(x) = \arctan(3x)$ ~~**8)** $f(x) = \arctan(3x)$~~ **9)** $f(x) = \arccos(2x+1)$

10) $f(x) = \arcsin\left(x^2\right)$ **11)** $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

7) $f(x) = \arctan(3x) = u \circ v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \arctan x \longrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x) = 3x \longrightarrow v'(x) = 3 \end{cases}$

$$f'(x) = v'(x) \times u' \circ v(x) = 3 \times \frac{1}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$$

$\mathcal{D}f = ?$ arctan (X) est définie $\Leftrightarrow X \in \mathbb{R}$ $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

9) $f(x) = \arccos(2x+1)$ $f'(x) = 2\,\dfrac{-1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$ positive si définie

$\mathcal{D}f = ?$ arccos (X) est définie $\forall X$ tel que $-1 \leq X \leq 1$ f est définie $\forall x \,/\, -1 \leq 2x+1 \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$

$\Rightarrow \mathcal{D}f = [-1; 0]$

contrôle le signe de $f'(x)$.

10) $f(x) = \arcsin(x^2)$ $f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

positive si définie.

$\mathcal{D}f = ?$ arcsin (X) définie si $-1 \leq X \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$. (signe du polynôme de degré 2). $\Rightarrow \mathcal{D}f = [-1; 1]$.

x) $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = u \circ v \circ w(x)$ avec

$$\begin{cases} u(x) = \arctan(x) \longrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x) = \sqrt{x} \longrightarrow v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ w(x) = \dfrac{1+x}{1-x} \longrightarrow w'(x) = \dfrac{1-\cancel{x} + 1+\cancel{x}}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2} \end{cases}$$

$$f'(x) = w'(x) \times v'\circ w(x) \times u'\circ v\circ w(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \times \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2} = \frac{1}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[1+\frac{1+x}{1-x}\right]} = \frac{1}{\underbrace{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}_{>0 \text{ si défini}}\left[\frac{2}{1-x}\right]}$$

contrôle le signe

$$D_f = \left\{ x \,/\, \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \right\}$$

$$sg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = sg\left[(1+x)\cdot(1-x)\right] = sg\left(1-x^2\right)$$

Règle du polynôme de degré 2 $\Rightarrow$ $sg(1-x^2) = +$ à l'intérieur des racines

$a = -1$

$$\Rightarrow D_f = [-1;1].$$