Champs de vecteurs

DÉFINITION 5.1. *Un champ de vecteur est une application $\vec{F}$ définie et continue sur un domaine $D(\vec{F})$ de $\mathbf{R}^3$ qui a chaque point (x,y,z) de $\mathbf{R}^3$ associe une vecteur $\vec{F}(x,y,z)$ de $\mathbf{R}^3$:*

$$\vec{F} : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \mapsto & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) \end{array}$$

Ainsi se donner un champs de vecteur revient à ce donner trois fonctions continues sur un domaine de $\mathbf{R}^3$ à valeurs réelles.

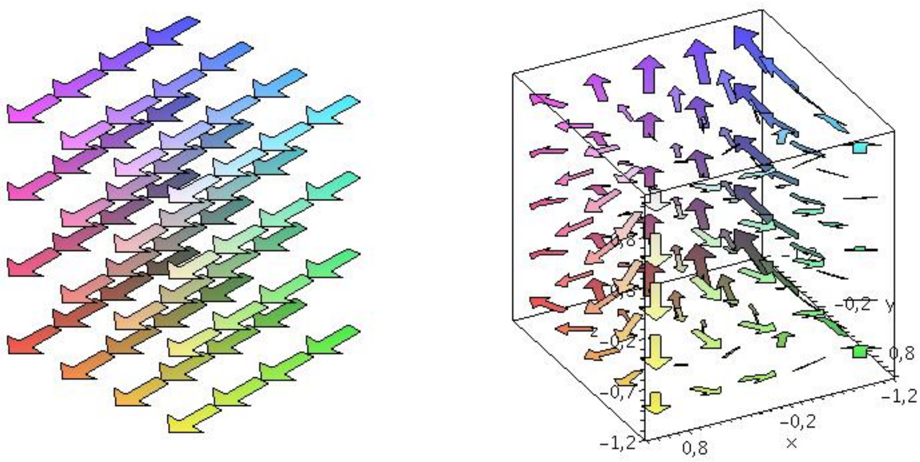

FIGURE 1. Exemples : $\vec{F}(x,y,z) = (1,0,0)$, $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2 - y^2, 2y, z^2 - x)$

Exemple 0.3.3. (Champs de vecteurs constants) On considére une application qui associe a tout point un vecteur constant

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Exemple 0.3.4. On considére le champ $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 - y^2, 2y, z^2 - x)$

1. Champs de gradients

Une classe trés importante de champs de vecteurs est celle des *champs de gradients* encore appelées *champ de potentiel* :

Définition 5.2. *Soit $f : D(f) \subset \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ une fonction différentiable définie sur un domaine $D(f)$. Le champ de gradient associé à f (on dit aussi le champ associé au potentiel f) est le champ définit sur $D(f)$ par*

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)).$$

En d'autres termes les coordonnées du champ sont

$$F_1(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), F_2(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), F_3(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$$

Par exemple, un champ de vecteur constant $\vec{F}(x, y, z) = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ est le champ de gradient associé à la fonction (au potentiel)

$$f(x, y, z) = v_1 x + v_2 y + v_3 z = \vec{v}.(x, y, z).$$

Notons qu'un tel potentiel n'est pas unique : pour tout constant C

$$\nabla f = \nabla(f + C)$$

car $\nabla C = \vec{0}$. Notons que réciproquement si $\nabla f = \vec{0}$ alors $f = Constante$: en effet, si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \equiv 0$$

alors $f(x, y, z) = f(1, y, z)$ ne dépend pas de x, de même f ne dépend pas de y ni de z... Ainsi si $\nabla f_1 = \nabla f_2$ alors $f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z) = Constante$: deux potentiels associés a un même champ de potentiel différent par une constante.

1.1. Exemple : le champ de gravitation.

Un corps ponctuel de masse M localisé à l'origine $(0, 0, 0)$ crée un potentiel gravitationel dont la valeur au point $P = (x, y, z)$ vaut

$$V(x, y, z) = -\frac{MG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{MG}{r}, \ r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|(x, y, z)\|.$$

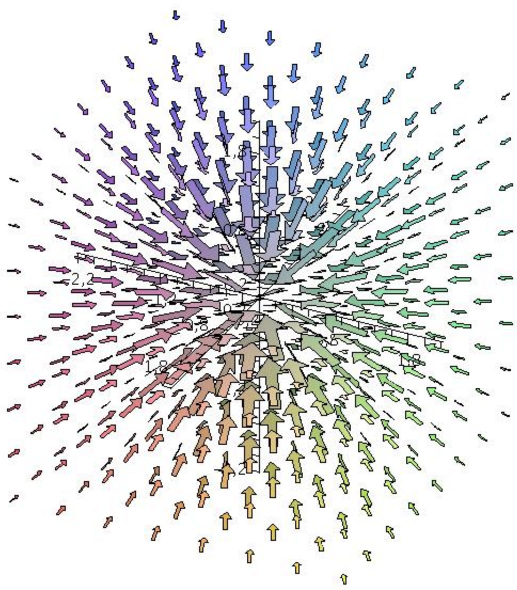

FIGURE 2. Le champ de gravitation $\vec{F} = -m\nabla V(x,y,z)$, $V = -\frac{MG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$.

Un corps ponctuel de masse m, situé au point (x,y,z) subitra alors une force de gravitation dont le vecteur est donné par

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y,z) &= -m\nabla V(x,y,z)\\ &= mMG\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\\ &= \frac{mMG}{r^2}\vec{u}(x,y,z)\end{aligned}$$

avec

$$\vec{u}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)$$

le vecteur unitaire (ie. de longueur $\|\vec{u}\| = 1$) colinéaire au vecteur $\vec{OP} = (x,y,z)$. et $G = 6,67.10^{-11}$ la constante gravitationelle.