Théorie quantique des champs

Felix Brümmer
Faculté des Sciences, Université de Montpellier

Dernière mise à jour : 11 novembre 2026

Table des matières

1 Introduction **4**
- 1.1 À propos de ces notes . . . 4
- 1.2 Motivation et aperçu . . . 4

2 Théorie relativiste des champs classiques **6**
- 2.1 Rappel de la notation en relativité restreinte . . . 6
- 2.2 Champs classiques . . . 7
- 2.3 Le théorème de Noether . . . 11

3 Quantification canonique du champ scalaire libre **13**
- 3.1 Développement du champ en modes de Fourier . . . 13
- 3.2 Relations de commutation canoniques . . . 16
- 3.3 L'espace de Fock . . . 17
- 3.4 Propagateurs . . . 19

4 La formule de réduction de LSZ **22**
- 4.1 La théorie libre vs. la théorie avec interactions . . . 22
- 4.2 La formule de réduction de LSZ . . . 22

5 Quantification par l'intégrale de chemin **28**
- 5.1 Les intégrales de chemin en mécanique quantique . . . 28
- 5.2 Fonctionnelle génératrice . . . 32
- 5.3 Les intégrales de chemin en théorie quantique des champs . . . 33

6 Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman **38**
- 6.1 Fonctionnelle génératrice et diagrammes de Feynman . . . 38
- 6.2 Les règles de Feynman pour la théorie ϕ^4 . . . 42
- 6.3 Un premier regard à la renormalisation . . . 45

7 Sections efficaces et taux de desintégration **52**
- 7.1 Des fonctions de correlation aux éléments de matrice . . . 52
- 7.2 La diffusion : les processus $2 \to 2$ et $2 \to n$ . . . 54
- 7.3 La désintégration : les processus $1 \to n$ . . . 56

8 Fermions **57**
- 8.1 Le groupe et l'algèbre de Lorentz . . . 57
- 8.2 Le champ de Dirac . . . 58
- 8.3 La quantification canonique du champ de Dirac libre . . . 61
- 8.4 Les intégrales de chemin pour les fermions . . . 66
- 8.5 La théorie de Yukawa . . . 67

9 L'électrodynamique quantique **70**
- 9.1 La quantification du champ électromagnétique . . . 70
- 9.2 L'électrodynamique quantique . . . 73
- 9.3 Processus élémentaires au niveau d'arbre . . . 75

9.4 L'électrodynamique quantique à une boucle 80

10 Le groupe de renormalisation **92**
10.1 La théorie ϕ^4 à une boucle revisitée 92
10.2 Équations de renormalisation pour la QED 95

A Annexe mathématique **99**
A.1 Le théorème des résidus 99
A.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma 100
A.3 Fonctionnelles 101

Chapitre 1

Introduction

1.1 À propos de ces notes

Ce document accompagne le cours HAP931P "Théorie quantique des champs" de la deuxième année du master "Cosmos, champs et particules" à la faculté des sciences de l'Université de Montpellier. Il contient sans doute toujours des erreurs typographiques et manque des signes perdus — merci de bien vouloir me le signaler si vous en trouvez (`felix.bruemmer@umontpellier.fr`).

Les prérequis pour ce cours sont des connaissances au niveau de la licence et du M1 en physique théorique : Mécanique analytique, théorie des champs classiques (électrodynamique), relativité restreinte, mécanique quantique avancée, introduction à la physique théorique des particules. Côté mathématique, des connaissances élémentaires de l'analyse complexe et de l'analyse fonctionnelle seront utiles.

Littérature et sources pour ce texte et le cours :

- M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books 1995.
- M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Pr. 2007.
- P. Ramond, *Field Theory : A Modern Primer (2nd ed.)*, Westview 2001.
- A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton Univ. Pr. 2003.
- M. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge Univ. Pr. 2014.
- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields vols. I, II*, Cambridge Univ. Pr. 2000.
- Notes de cours en ligne par M. Gaberdiel (Zurich), M. G. Schmidt (Heidelberg), D. Tong (Cambridge), T. Weigand (Heidelberg).

1.2 Motivation et aperçu

À quoi sert la théorie quantique des champs ?

Dans les années 1920, la mécanique quantique a été trouvée d'être le formalisme approprié pour décrire des phénomènes atomiques et subatomiques. Mais la formulation habituelle de la mécanique quantique n'est pas relativiste, et une généralisation relativiste de l'équation de Schrödinger (l'équation de Dirac, regardée comme équation différentielle pour une fonction d'onde) pose des problèmes d'interprétation, car elle prédit des états d'énergies négatives illimitées. En plus, le nombre de particules dans ce formalisme est fixe. Il n'est donc pas possible de décrire des processus comme l'annihilation électron-positron en deux photons, ou plus généralement la diffusion inélastique ou la désintégration des particules.

Pour formuler une généralisation relativiste cohérente de la mécanique quantique, qui permettra en plus de traiter des systèmes avec un nombre variable de particules, on est obligé de passer de la notion de la *fonction d'onde* à la notion du *champ quantique*. En théorie quantique des champs,

les champs (fonctions d'espace-temps) sont eux-mêmes des opérateurs. L'action des opérateurs de champ sur l'état fondamental produit des états à une ou plusieurs particules. Ce formalisme a désormais trouvé ses applications non pas seulement dans la théorie des particules relativistes à hautes énergies, mais aussi en physique nucléaire et hadronique, en cosmologie, dans la physique statistique et dans la physique de la matière condensée. Dans le présent cours, on se limitera cependant aux aspects pertinents pour la physique des particules élémentaires.

Un résumé du cours en sept points-clés

Pour ceux qui ont déjà travaillé ce cours, les points suivants sembleront évidents ; ceux qui n'ont pas encore étudié la théorie quantique des champs trouveront les explications détaillés dans les $\sim$ 100 pages restantes. Voici alors ce que vous aurez compris après l'étude de ce document (et après avoir complété les détails manquants des calculs, fait tous les exercices qui accompagnent le cours et posé toutes vos questions...)

- Les *observables physiques* en physique des particules sont les *sections efficaces* de diffusion et les *taux de désintégration*. Il y a d'autres observables pouvant être prédites par la TQC, selon le contexte et le système physique, mais ici on mettra l'accent sur ces deux.
- Aux facteurs cinématiques près (qui résultent des aspects cinématiques de la relativité restreinte, et qui ne sont donc pas le sujet d'étude de la TQC proprement dite), les observables sont données par les *éléments de la matrice S*. La matrice S est un opérateur unitaire dont les éléments de matrice sont des *amplitudes de probabilité quantiques de transition*. Essentiellement, il s'agit des amplitudes de probabilité pour passer d'un état initial $|i\rangle$ dans le passée distant, $t \to -\infty$, à un état final $|f\rangle$ dans le futur distant, $t \to +\infty$. Par exemple, elle peut donner l'amplitude de transitionner d'un état initial "électron-positron" (avec certaines impulsions et polarisations) vers un état final "deux photons" (encore avec certaines impulsions et polarisations).
- Mathématiquement, les éléments de la matrice S se calculent comme les *résidus* des *fonctions de correlation en ordre chronologique* sur couche de masse transformées par Fourier, d'après la *formule de réduction de LSZ*. Une fonction de correlation est une certaine moyenne quantique d'un produit d'opérateurs de champ. Pour une grande partie de ce cours, on va s'occuper des techniques pour le calcul des fonctions de correlation.
- Notre point de départ pour leur calcul sera l'*intégrale de chemin* : l'évolution de l'état du système entre l'état initial observé $|i\rangle$ et l'état final observé plus tard $|f\rangle$ est par une *superposition cohérente* des chemins traversant tous les états intermédiaires possibles, pendant que les particules ne sont pas observées.
- Les seules théories pouvant être résolues exactement sont les théories *libres*, sans interactions entre les differents champs, et donc incapables de décrire la diffusion et la désintégration. Pour traiter des interactions entre particules, on va chercher des solutions approximatives en *théorie des perturbations*.
- On trouvera qu'aux ordres supérieures en théorie des perturbations, les calculs mènent souvent aux intégrales impropres *divergentes*. Pourtant une quantité divergente ne peut évidemment pas correspondre à une observable physique. Afin d'extraire des prédictions physiques sans tomber sur des infinis, il faut déformer la théorie de manière à la rendre finie, puis défaire la déformation en judicieusement suivant l'évolution des observables. Cette procédure s'appelle la *régularisation* et *renormalisation* de la théorie.
- Le formalisme est le plus simple pour des champs *scalaires* (de spin 0), qui nous serviront comme premier exemple. Mais il s'applique, avec quelques modifications, aussi aux champs de spin 1/2 (*fermions*) et de spin 1 (*bosons de jauge*), ce qui permet de traiter des théories plus intéressantes comme l'électrodynamique quantique. On étudiera cette dernière vers la fin du cours.

Chapitre 2

Théorie relativiste des champs classiques

2.1 Rappel de la notation en relativité restreinte

Notre objectif sera de développer une théorie relativiste, alors les variables les plus appropriées se transformeront de façon covariante par des transformations de Lorentz (même si parfois il conviendra de fixer un référentiel et de séparer l'espace et le temps).

Pour la métrique de Minkowski, on utilisera la signature $(+---)$, conformément à la convention courante en physique des hautes énergies :

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

La métrique inverse est désignée par $g^{\mu\nu}$. Ses coefficients sont les mêmes car

$$(g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}) = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}\,. \tag{2.2}$$

Ici et partout, on utilise la convention de sommation d'Einstein,

$$a_\mu b^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu \equiv a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 \tag{2.3}$$

où les indices sont levés et abaissés avec la métrique,

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}a^\nu = \begin{cases} a^\mu & (\mu = 0) \\ -a^\mu & (\mu = 1,2,3) \end{cases}, \qquad a^\mu = g^{\mu\nu}a_\nu\,. \tag{2.4}$$

L'ensemble des *transformations de Lorentz propres et orthochrones* est désigné par $\mathrm{SO}^\uparrow(3,1)$. Les transformations $\Lambda \in \mathrm{SO}^\uparrow(3,1)$ sont représentés par des matrices 4×4 Λ qui satisfont

$$\Lambda^T g \Lambda = g\,, \qquad \det\Lambda = +1 \text{ (propre)}, \qquad \Lambda^0_0 > 0 \text{ (orthochrone)}\,. \tag{2.5}$$

La première équation caractérise une transformation de Lorentz générale. La deuxième indique que les transformations propres n'incluent pas la transformation de *parité* qui renverse les signes

des composantes spatiales. La troisième signifie que les transformations orthochrones ne changent pas la direction du temps des vecteurs de genre temps, alors pour un observateur physique qui se déplace sur une ligne d'univers de genre temps, le futur et le passé ne sont pas échangés par une transformation orthochrone.

Même si les transformations de parité P et de renversement du temps T jouent des rôles importants en physique des particules, on ne va pas les discuter en détail dans ce cours ; on se limitera largement aux transformations propres et orthochrones, formant un sous-groupe du groupe de Lorentz.

Les coordonnées de l'espace-temps

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \qquad \text{(convention : } c = 1\text{)} \tag{2.6}$$

se transforment comme un *vecteur de Lorentz* (ou "quadrivecteur") :

$$x \to \Lambda x \,. \tag{2.7}$$

Les dérivées d'une fonction de l'espace-temps par rapport à x sont notées

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \right) \tag{2.8}$$

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu}\partial_\nu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \,. \tag{2.10}$$

2.2 Champs classiques

L'équation de Schrödinger (convention : $\hbar = 1$)

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \tag{2.11}$$

n'est pas covariante de Lorentz : elle est *linéaire* en temps mais *quadratique* en espace, p.ex. pour une particle libre, on a $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\vec{\nabla}^2}{2m}$. En fait, la distinction entre temps et espace en mécanique quantique est même plus profonde. Le temps est traité comme un paramètere réel du système ; en revanche l'espace est associé à un opérateur qui agit sur l'espace de Hilbert. Si on veut traiter les deux au même niveau, dans l'objectif de formuler une théorie manifestement covariante, il faudra soit promouvoir le temps au statut d'un opérateur, soit dégrader l'espace pour qu'il devienne un paramètre. On choisira cette dernière option.

On rappelle la représentation de Heisenberg de la mécanique quantique, où les opérateurs dépendent du temps, alors que l'état d'un système physique n'évolue pas. Les opérateurs en théorie quantique des champs relativiste dépendront donc à la fois du temps et de l'espace, et ce de façon covariante : $\Phi(t) \to \Phi(t, \vec{x}) = \Phi(x)$. En revanche, les états (les vecteurs de l'espace de Hilbert sur lequel les opérateurs agissent) seront indépendants de l'espace-temps, contrairement à la représentation de Schrödinger.

Un *champ quantique* est alors une fonction de l'espace-temps à valeur *opérateur*.

Cependant, dans ce premier chapitre, on va d'abord étudier des *champs classiques* : des fonctions de l'espace-temps à valeur *réelle* où *complexe*. On choisira une approche axiomatique : on va postuler les principes généraux qui déterminent le comportement du système sans trop chercher à les motiver, sauf par analogie avec la mécanique classique.

La quantité fondamentale : l'*action* S.

On affirme que la dynamique d'un système de champs classiques Φ_i peut être décrite par une seule quantité, l'action $S[\Phi_i]$. Elle est soumise à trois **postulats** : S est une fonctionnelle [1]

1. Une application qui associe à une fonction un nombre, voir annexe A.3.

1. *réelle*,
2. *invariante* par les transformations de Lorentz
3. et *locale*

sur l'espace des champs Φ_i.

L'action doit être réelle, même si les champs peuvent être complexes, car les observables physiques doivent être réelles. Ultérieurement, dans une théorie quantique, cette propriété sera liée avec la conservation des probabilités. L'action est une invariante de Lorentz car la théorie doit être relativiste. Par la *localité* de l'action, on entend qu'elle peut s'écrire comme

$$\boxed{S[\Phi_i] = \int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(\Phi_i(x), \partial_\mu\Phi_i(x), \partial_\mu\partial_\nu\Phi_i(x), \ldots)} \tag{2.12}$$

où la fonction $\mathcal{L}$ (la *densité lagrangienne* ou "lagrangien") dépend des champs et d'un nombre fini de leurs dérivées à *un seul point* x de l'espace-temps. La localité est importante pour garantir la structure causale de la théorie (les causes précèdent toujours leurs effets ; il n'y a pas de propagation superluminaire).

La notion d'action est bien connue du formalisme lagrangien de la mécanique classique, où l'action est une fonctionnelle locale des coordonnées généralisées $q_i(t)$ du système :

$$S[q_i] = \int \mathrm{d}t\ L(q_i(t), \dot{q}_i(t), \ldots) \tag{2.13}$$

Du postulat 2., l'invariance de Lorentz de l'action, on déduit que la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ doit un scalaire de Lorentz, car après une transformation de Lorentz propre

$$S \to S' = \int \mathrm{d}^4x\ \det\Lambda\ \mathcal{L}' \overset{!}{=} S. \tag{2.14}$$

Or, le jacobien $\det\Lambda$ vérifie $\det\Lambda = 1$, donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ (éventuellement aux dérivées totales près, voir ci-dessous).

Le principe fondamental : le *principe de moindre action.*

On affirme en plus que l'évolution temporelle du système (dans l'espace des configurations des champs) soit telle que l'action est *stationnaire*,

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta\Phi_i} = 0\,.} \tag{2.15}$$

Cf. les trajectoires classiques en mécanique qui vérifient $\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0$.

La condition de stationnarité par rapport aux petites variations peut s'écrire comme un système d'équations différentielles qui doivent être satisfaites par les champs. En fait, par définition de la dérivée fonctionnelle dans éq. (2.15),

$$\begin{aligned} S[\Phi_i + \delta\Phi_i] &= S[\Phi_i] + \frac{\delta S}{\delta\Phi_i}\cdot\delta\Phi_i + \mathcal{O}\left(||\delta\Phi_i||^2\right) \\ &= S[\Phi_i] + \int \mathrm{d}^4x\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i}\delta\Phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)}\partial_\mu\delta\Phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\Phi_i)}\partial_\mu\partial_\nu\delta\Phi_i + \ldots\right) \\ &\qquad + \mathcal{O}\left(||\delta\Phi_i||^2\right) \\ &= S[\Phi_i] + \int \mathrm{d}^4x\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} + \partial_\mu\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\Phi_i)} - \ldots\right)\delta\Phi_i \\ &\qquad + \mathcal{O}\left(||\delta\Phi_i||^2\right)\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ici la dernière égalité suit après intégration par parties, si on se limite aux variations telles que $\delta\Phi_i$ et toutes ses dérivées tendent rapidement vers zéro à l'infini. Vu que, selon éq. (2.15), l'intégrale

doit s'annuler pour toute variation $\delta\Phi_i$, on conclut que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} + \partial_\mu\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\Phi_i)} - \ldots = 0\,. \tag{2.17}$$

La condition d'action stationnaire donne alors un système d'équations différentielles nommées les *équations de mouvement*.

Maintenant il convient d'introduire un quatrième (et dernier) **postulat** :

4. L'action est telle que les équations de mouvement sont au maximum du second ordre en temps (et alors en espace aussi, grace à la covariance relativiste).

Cf. encore la mécanique classique, où les équations de mouvement sont du second ordre, comme l'indique le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m\,\ddot{\vec{x}}$.

Une implication du postulat 4. est que le lagrangien $\mathcal{L}$ peut dépendre de $\partial_\mu\Phi_i$ (au maximum quadratiquement) ou de $\partial_\mu\partial_\nu\Phi_i$ (au maximum linéairement), mais pas des dérivées supérieures. De plus, un terme qui dépend de $\partial_\mu\partial_\nu\Phi_i$ linéairement peut toujours s'écrire comme

$$f(\Phi_j)\partial_\mu\partial_\nu\Phi_i = \underbrace{\partial_\mu\Big(f(\Phi_j)\partial_\nu\Phi_i\Big)}_{\text{dérivée totale}} - \frac{\partial f}{\partial\Phi_j}\,(\partial_\mu\Phi_j)\,(\partial_\nu\Phi_i) \tag{2.18}$$

On se limitera aux configurations où tous les champs et toutes leurs dérivées s'annulent à l'infini ; sinon l'action et l'énergie du système seraient infinies. On peut donc supprimer les dérivées totales (les *termes de surface*) dans $\mathcal{L}$ car

$$\int_{\mathbb{R}^4} \partial\mathcal{F}(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i, \ldots) = \int_{\partial\mathbb{R}^4} \mathcal{F}(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i, \ldots) = 0 \tag{2.19}$$

pour toute fonction $\mathcal{F}$ qui tend rapidement vers zéro à l'infini. Du postulat 4. et de (2.18) on conclut finalement que, sans perte de généralité, $\mathcal{L}$ ne dépend que de Φ_i et de $\partial_\mu\Phi_i$ (et de ce dernier au maximum quadratiquement).

Les équations de mouvement deviennent alors les *équations d'Euler-Lagrange*,

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} = 0\,.} \tag{2.20}$$

Cf. leurs équivalents en mécanique classique :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} = 0\,. \tag{2.21}$$

Exemple : Le champ scalaire réel

Appliquons ce formalisme au cas d'un seul champ réel $\phi(x)$ dit champ *scalaire*, caractérisé par sa transformation triviale par une transformation de Lorentz : $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$. [2]

Les champs scalaires classiques relativistes ne figurent pas dans la déscription d'un système physique familier, même s'ils ont un rôle important en cosmologie. Pour cette raison, il pourrait sembler plus évident d'étudier plutôt le champ *vectoriel* $A_\mu(x)$ de l'électromagnétisme, par exemple. Mais la quantification du champ vectoriel s'avére bien plus compliquée que celle d'un champ scalaire, alors ce sera le champ scalaire qui va nous servir comme système exemplaire pour la première partie du cours. Pour l'application du formalisme lagrangien à l'électromagnétisme classique, voir les exercices.

Le lagrangien d'un champ scalaire réel est

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \mathcal{V}(\phi).} \tag{2.22}$$

2. L'inverse de la matrice Λ figure ici parce que $\phi'(x') = \phi(x)$ avec $x' = \Lambda x$.

- Le *terme cinétique* $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ est le terme avec des dérivées le plus simple permis par l'invariance de Lorentz. Son coefficient $\frac{1}{2}$ est choisi par *convention* et fixe ainsi la normalisation du champ ϕ. Ce choix implique que la *dimension* de ϕ est $[\phi] = 1$. [3]
- La *densité d'énergie potentielle* $\mathcal{V}(\phi)$ pourrait être une fonction quelconque. Pour décrire un système physique raisonnable, il faudra pourtant qu'elle possède une borne inférieure. En supposant qu'elle soit analytique, on regarde son développement limité en 0 :

$$\mathcal{V}(\phi) = \mathcal{V}_0 + M^3\,\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{3!}\mu\phi^3 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 + \dots \tag{2.23}$$

La constante $\mathcal{V}_0$ ne figure pas dans les équations de mouvement. Le terme linéaire peut toujours être absorbé par une redéfinition du champ $\phi \to \phi - \text{cte.}$ et des autres coefficients. Alors, sans perte de généralité, les premiers termes dans $\mathcal{V}$ sont

$$\boxed{\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{3!}\mu\phi^3 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4\,.} \tag{2.24}$$

Ici m^2, μ et λ sont des paramètres réels de dimension 2, 1 et 0 respectivement, avec $\lambda \geq 0$ pour garantir que $\mathcal{V}$ soit borné par dessous.

On aurait pu ajouter des termes de dimension > 4 à $\mathcal{L}$ comme $\phi\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, $\phi^2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$,..., ϕ^5, ϕ^6,... etc. (avec des coefficients de dimension < 0). En physique quantique, ces termes représenteront des interactions *non renormalisables*, comme on verra plus tard. Pour l'instant, acceptons qu'il y a des bonnes raisons de les supprimer.

- Le cas spécial $\mu = 0$, $\lambda = 0$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\,, \tag{2.25}$$

donne une équation de mouvement linéaire, *l'équation de Klein-Gordon*,

$$\boxed{\left(\Box + m^2\right)\phi = 0\,.} \tag{2.26}$$

Elle décrit un champ scalaire réel *libre*. Des solutions sont données par des superpositions d'ondes planes,

$$\phi(x) = \sum_p a(p)\,e^{ip_\mu x^\mu}\,, \qquad p^2 = m^2\,. \tag{2.27}$$

En fait, vu que l'équation de Klein-Gordon est linéaire, toute superposition de solutions donnera une nouvelle solution. Deux paquets d'ondes venant de $t \to -\infty$ pourront alors se croiser et continuer vers $t \to +\infty$, sans que l'un influence l'autre : il n'y a pas de diffusion dans une théorie de champs libres.

L'interprétation du paramètre m^2 est la suivante : vu que, dans les ondes planes, p est la quadri-impulsion, alors selon la relation relativiste habituelle $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$, et donc le paramètre m correspond à une *masse*.

- L'équation de mouvement au cas général n'est plus linéaire :

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = -\frac{\mu}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{6}\phi^3\,. \tag{2.28}$$

Le membre de droite se compose de termes non-linéaires ou termes d'*interaction*. Si $\mu \neq 0$ et/ou $\lambda \neq 0$, il n'est plus possible d'écrire des solutions exactes de l'équation de mouvement autre que $\phi = 0$. En plus, il n'y a plus de principe de superposition : des paquets d'onde qui étaient asymptotiquement séparés dans le passé à $t \to -\infty$ vont se propager et s'influencer les uns les autres à cause de l'auto-interaction du champ scalaire. Cette théorie incluera alors des processus de *diffusion*.

3. Avec $\hbar = c = 1$ il n'y a qu'une seule unité, celle de la masse : [masse] = [énergie] = [impulsion] = [temps^{-1}] = [distance^{-1}]. L'action est sans dimension, le lagrangien est de dimension [masse]^4 (ou 4 en bref), donc $[\phi] = 1$ est une conséquence de $[\partial/\partial x^\mu] = 1$.

2.3 Le théorème de Noether

Dans une théorie de N champs classiques Φ_i, $i = 1 \dots N$, pas forcément scalaires, on considère une transformation continue dépendant d'un paramètre réel α :

$$\Phi_i(x) \;\to\; \Phi_i'(x) = \Phi_i(x) + \alpha\,\delta\Phi_i(x) + \mathcal{O}(|\alpha|^2) \tag{2.29}$$

Si l'action reste inchangée,

$$S[\Phi_i] = S[\Phi_i'] \tag{2.30}$$

la transformation est une *symétrie* de la théorie. L'invariance de S implique que le lagrangien $\mathcal{L}$ changera au maximum par un terme de surface qui ne contribue pas à S, c.-à-d. par une divergence totale d'une certaine fonction. On appellera cette fonction $\hat{J}^\mu$. (Bien entendu, elle peut aussi être nulle, selon la forme du lagrangien et de la transformation de symétrie.) Un développement limité au premier ordre en α donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;&\to\; \mathcal{L} + \alpha\partial_\mu \hat{J}^\mu(x) \\
&= \mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i}(\alpha\,\delta\Phi_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)}\partial_\mu(\alpha\,\delta\Phi_i) \\
&= \mathcal{L} + \alpha\,\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)}\delta\Phi_i\right) + \alpha\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)}\right)}_{=0}\delta\Phi_i
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Pour rappel, ici une somme double sur $\mu = 0, 1, 2, 3$ et $i = 1 \dots N$ est sous-entendue. En comparant la première et la dernière ligne, on trouve

$$\partial_\mu \hat{J}^\mu = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)}\delta\Phi_i\right) \tag{2.32}$$

et alors

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu(x) = 0} \tag{2.33}$$

avec

$$\boxed{J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)}\delta\Phi_i - \hat{J}^\mu\,.} \tag{2.34}$$

On a établi le *théorème de Noether* : L'existence d'une symétrie continue $\Phi_i \to \Phi_i'$ implique l'existence d'un courant conservé $J^\mu(x)$, le *courant de Noether*.

Plus précisément, J^μ est une *densité* de courant, et la loi de conservation associée est la suivante. Vu que J^μ satisfait l'équation de continuité $\partial_\mu J^\mu = 0$, il existe une *charge conservée* Q. Pour construire cette dernière, fixons un référentiel et posons $J^\mu = (\rho, \vec{\jmath})$. L'équation de continuité devient

$$0 = \partial_\mu J^\mu = \dot{\rho} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}, \tag{2.35}$$

alors, en intégrant sur l'espace,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int_{\text{espace}}\rho}_{\equiv Q} = \int_{\text{espace}}\vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} = \int_{\text{infini spatial}}\vec{\jmath}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0\,. \tag{2.36}$$

La quantité Q vérifie alors $\dot{Q} = 0$, elle est conservée en temps.

Exemple : un champ scalaire libre sans masse

Cet exemple est presque trivial, mais il peut cependant servir pour illustrer le théorème de Noether. On regarde le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\,. \tag{2.37}$$

On identifie facilement une symétrie continue qui porte $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha$ avec α une constante, $\partial_\mu \alpha = 0$. La variation du lagrangien est nulle, $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$, alors $\hat{J}^\mu = 0$ et le courant conservé se construit avec la variation du champ ϕ seulement. On a $\delta\phi = 1$, alors $J^\mu(x) = \partial^\mu \phi(x)$. La conservation de ce "courant de dilatation" est équivalente à l'équation de mouvement, qui est l'équation de Klein-Gordon sans masse ou bien l'équation des ondes, $\Box\phi = 0$.

Exemple plus intéressant : symétries de translation $\subset$ symétrie de Poincaré

Ce deuxième exemple est un peu plus compliqué, mais beaucoup plus intéressant. On regarde les symétries d'espace-temps $x^\mu \to x^\mu - a^\mu$; il s'agît des quatre symétries de translation de l'espace-temps qui dépendent alors de quatre paramètres, regroupés dans le quadrivecteur a^μ.

Concrètement, regardons un champ scalaire réel ϕ sans spécifier le lagrangien (mais en fait, la construction peut se généraliser au cas de plusieurs champs, scalaires ou autres). Pour obtenir la variation de ϕ, on développe

$$\phi(x) \to \phi(x+a) = \phi(x) + (\partial_\mu \phi) a^\mu + \mathcal{O}(||a||^2)\,. \tag{2.38}$$

La variation du lagrangien est non nulle dans ce cas. Au premier ordre, elle est donnée par

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + (\partial_\mu \mathcal{L}) a^\mu = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu \underbrace{(\delta^\mu_\nu \mathcal{L})}_{\hat{J}^\mu_\nu}\,. \tag{2.39}$$

On a quatre symétries, une par translation ; il convient alors de grouper les quatre courants conservés dans un tenseur T^μ_ν :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \hat{J}^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \equiv T^\mu_\nu\,. \tag{2.40}$$

Les équations de conservation sont

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0\,. \tag{2.41}$$

On appelle T^μ_ν le *tenseur d'énergie-impulsion.*

Comme charges conservées, on peut identifier

$$\int \mathrm{d}^3x\, T^{00} \equiv H\,, \tag{2.42}$$

$$\int \mathrm{d}^3x\, T^{0i} \equiv P^i\,, \quad i = 1,2,3\,. \tag{2.43}$$

H s'appelle le *hamiltonien* ou l'*énergie.* Les P^i s'appellent les *quantités de mouvement* ou *impulsions.*

Chapitre 3

Quantification canonique du champ scalaire libre

3.1 Développement du champ en modes de Fourier

On considère un champ scalaire réel libre,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\,. \tag{3.1}$$

Après une transformation de Fourier des coordonnées spatiales,

$$\phi(t,x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tilde{\phi}(t,\vec{k})\,, \tag{3.2}$$

l'équation de Klein-Gordon $(\Box + m^2)\phi = 0$ devient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{k}|^2 + m^2)\right)\tilde{\phi} = 0\,. \tag{3.3}$$

Un mode de $\vec{k}$ fixe se comporte alors comme un *oscillateur harmonique* avec fréquence angulaire

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \qquad \text{(défini avec la racine positive)}\,. \tag{3.4}$$

Rappelons le traitement standard de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique : dans la représentation de Schrödinger de la mécanique quantique, le hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'écrit en fonction des opérateurs de Schrödinger P_S et Q_S, indépendants du temps, comme

$$H = \frac{1}{2m}P_S^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q_S^2\,. \tag{3.5}$$

Il est diagonalisé par une transformation canonique,

$$Q_S = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a + a^\dagger)\,, \qquad P_S = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a - a^\dagger) \tag{3.6}$$

où $[Q_S, P_S] = i$, alors $[a, a^\dagger] = 1$, et donc

$$H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\,. \tag{3.7}$$

Les états stationnaires sont ensuite donnés par l'action répétée de l'opérateur de création $a^\dagger$ sur l'état fondamental :

$$|n\rangle \propto (a^\dagger)^n|0\rangle\,. \tag{3.8}$$

Pour passer à la représentation de Heisenberg, on définit les opérateurs dépendants du temps $Q(t)$ et $P(t)$ comme

$$\begin{aligned} Q(t) &= e^{iHt} Q_S e^{-iHt} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \left(a\, e^{-i\omega t} + a^\dagger\, e^{i\omega t} \right) , \\ P(t) &= e^{iHt} P_S e^{-iHt} = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(a\, e^{-i\omega t} - a^\dagger\, e^{i\omega t} \right) . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Retournons maintenant au champ scalaire. Afin de le quantifier, on souhaite traiter le champ $\phi(t, \vec{x})$ comme l'équivalent de la variable de configuration $Q(t)$. Qu'est-ce que sera l'équivalent de la variable d'impulsion $P(t)$? Par analogie avec $p = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$ en mécanique classique, on définit le *moment conjugué* $\pi(t, \vec{x})$ de $\phi(t, \vec{x})$ par [1]

$$\pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t, \vec{x})} . \tag{3.10}$$

Pour un champ scalaire réel libre, éq. (3.1) donne

$$\pi(t, \vec{x}) = \dot{\phi}(t, \vec{x}) . \tag{3.11}$$

De plus, vu que $H = p\dot{q} - L$ en mécanique classique, on définit la *densité hamiltonienne* $\mathcal{H}$ par

$$\boxed{\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} , \qquad\qquad H = \int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{H} .} \tag{3.12}$$

Pour un champ scalaire libre, on obtient alors

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 . \tag{3.13}$$

Il est facile de vérifier que cette définition reproduit le hamiltonien de l'éq. (2.42).

En vu de l'observation que les modes de Fourier spatiales de ϕ sont des oscillateurs harmoniques, définissons des fonctions $a(\vec{k})$ et $b(\vec{k})$ par analogie avec éq. (3.9) :

$$\tilde{\phi}(t, \vec{k}) = \frac{1}{f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k}) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} + b(\vec{k}) e^{i\omega_{\vec{k}} t} \right) , \tag{3.14}$$

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3\, f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k}) e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b(\vec{k}) e^{i(\omega_{\vec{k}} t + \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \tag{3.15}$$

avec $\omega_{\vec{k}}$ comme dans éq. (3.4). Ici la normalisation des coefficients de Fourier, paramétrée par la fonction réelle f, est laissée libre pour l'instant ; on y retournera sous peu. Soulignons encore que, avec éq. (3.15), ϕ est une solution de l'équation de Klein-Gordon classique car $\omega_{\vec{k}}^2 - \vec{k}^2 = m^2$.

ϕ est réel, alors

$$\begin{aligned} \phi = \phi^* &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 f(|\vec{k}|)} \left(a^*(\vec{k}) e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b^*(\vec{k}) e^{-i(\omega_{\vec{k}} t + \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 f(|\vec{k}|)} \left(a^*(-\vec{k}) e^{i(\omega_{\vec{k}} t + \vec{k}\cdot\vec{x})} + b^*(-\vec{k}) e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

En comparant avec éq. (3.15), on trouve

$$b^*(-\vec{k}) = a(\vec{k}) \tag{3.17}$$

1. Il n'y a aucune relation avec le nombre π, évidemment.

et donc

$$\begin{aligned}\phi(t,\vec{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k})e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + a^*(-\vec{k})e^{i(\omega_{\vec{k}}t+\vec{k}\cdot\vec{x})}\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k})e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + a^*(\vec{k})e^{i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^*(\vec{k})e^{ikx}\right)\Big|_{k^0=\omega_{\vec{k}}} .\end{aligned} \tag{3.18}$$

Pour rappel, $k = (k^0, \vec{k})$ et $x = (t, \vec{x})$ sont des quadrivecteurs et que la notation kx signifie le produit scalaire de Lorentz, $kx \equiv k_\mu x^\mu$. Dans la deuxième ligne d'éq. (3.18), on a changé la variable d'intégration $\vec{k} \to -\vec{k}$ pour le deuxième terme.

Maintenant on va s'occuper de la normalisation : il convient de choisir la fonction $f(|\vec{k}|)$ de manière que la mesure $\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 f(|\vec{k}|)}$ est invariante par les transformations de Lorentz propres orthochrones, malgré l'intégration sur d^3k qui dépend évidemment du référentiel. Pour ce faire, on part de l'observation que l'expression

$$\int \mathrm{d}^4k\, \delta(k^2 - m^2)\Theta(k^0)$$

est manifestement invariante, car on intègre sur tout l'espace-temps (des impulsions) et l'intégrande ne dépend que de l'invariante de Lorentz k^2 et du signe de k^0 ; et ce dernier est préservé par les transformations orthochrones si k est un quadrivecteur de genre temps, ce qui est garanti par la fonction delta. Or

$$\int \mathrm{d}^4k\, \delta(k^2 - m^2)\Theta(k^0) = \int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}k^0 \delta(\underbrace{k^2 - m^2}_{=(k^0)^2-\omega_{\vec{k}}^2})\Theta(k^0) = \int \mathrm{d}^3k\, \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} , \tag{3.19}$$

où on a utilisé la règle habituelle pour les changements de variable dans la fonction delta,

$$\delta(g(x)) = \sum_{\{y\,|\,g(y)=0\}} \frac{1}{|g'(y)|}\delta(x-y) . \tag{3.20}$$

On conclut que, si $f(|\vec{k}|) \propto \omega_{\vec{k}}$, alors $\frac{\mathrm{d}^3k}{f(|\vec{k}|)}$ est invariant. La convention que l'on adoptera pour la normalisation est

$$f(|\vec{k}|) = 2\omega_{\vec{k}} . \tag{3.21}$$

Définissons une notation courte pour la *mesure d'intégration invariante* :

$$\widetilde{\mathrm{d}k} \equiv \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} . \tag{3.22}$$

Avec cette notation, éq. (3.18) s'écrit

$$\boxed{\phi(x) = \int \widetilde{\mathrm{d}k} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^*(\vec{k})e^{ikx}\right)\Big|_{k^0=\omega_{\vec{k}}} .} \tag{3.23}$$

La condition de *couche de masse* $k^0 = \omega_{\vec{k}} = +\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ peut aussi s'écrire de façon manifestement covariante :

$$k^2 = m^2 , \qquad k^0 > 0 . \tag{3.24}$$

La relation entre ϕ et les coefficients de Fourier a et a^* peut être inversée ($\to$ exercices) :

$$a(\vec{k}) = i \int \mathrm{d}^3x e^{ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\, \phi(x) , \qquad \text{où } f \overset{\leftrightarrow}{\partial}\, g \equiv f(\partial g) - (\partial f)g . \tag{3.25}$$

Notons que le membre de droite ici semble dépendre du temps, mais en fait un calcul de deux lignes montre que cette dépendance se supprime grace à l'équation de Klein-Gordon.

Pour le moment conjugué, on trouve l'expression

$$\pi(t,\vec{x}) = \dot{\phi}(t,\vec{x}) = \int \widetilde{\mathrm{d}k}(-i\omega_{\vec{k}}) \left(a(\vec{k})e^{-ikx} - a^*(\vec{k})e^{ikx} \right) . \tag{3.26}$$

Jusqu'à présent, toute la discussion a eu lieu au niveau des champs classiques ; pour construire une théorie quantique, il faudra maintenant promouvoir ces champs en *opérateurs*.

3.2 Relations de commutation canoniques

Selon le principe de correspondance, les crochets de Poisson entre les quantités classiques (des fonctions sur l'espace de phase) doivent se traduire aux commutateurs des opérateurs équivalents en théorie quantique. Cela donne lieu aux relations de commutation canoniques $[Q_i(t), Q_j(t)] = [P_i(t), P_j(t)] = 0$ et $[Q_i(t), P_j(t)] = i\delta_{ij}$.

Par analogie avec ces dernières, on postule les *relations de commutation canoniques à temps égaux* pour les champs quantiques et ses moments conjugués :

$$\boxed{\begin{aligned} &[\phi(t,\vec{x}),\, \phi(t,\vec{x}\,')] = 0\,, \\ &[\pi(t,\vec{x}),\, \pi(t,\vec{x}\,')] = 0\,, \\ &[\phi(t,\vec{x}),\, \pi(t,\vec{x}\,')] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}\,')\,. \end{aligned}} \tag{3.27}$$

On peut montrer ($\rightarrow$ exercice) que les relations équivalentes au niveau de a et $a^\dagger$ sont

$$\boxed{\begin{aligned} [a(\vec{k}), a(\vec{k}\,')] &= 0\,, \\ [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}\,')] &= 0\,, \\ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] &= 2\omega_{\vec{k}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\,. \end{aligned}} \tag{3.28}$$

Ici on a remplacé le conjugué complexe a^* de la fonction classique a par le conjugué hermitien $a^\dagger$ de l'opérateur a.

Ces relations définissent ce que l'on appelle la *quantification canonique* du champ scalaire réel libre.

Maintenant on va montrer que

$$H = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \omega_{\vec{k}}\, a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + E_0 \tag{3.29}$$

avec E_0 une constante. (Bien sûr, cette forme du hamiltonien évoque l'expression habituelle pour un ensemble d'oscillateurs en mécanique quantique, $H = \sum_i \omega_i(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2})$.)

Pour rappel, la densité hamiltonienne est (en fonction des champs qui doivent se comprendre maintenant comme des champs quantiques à valeur opérateur)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}\int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \widetilde{\mathrm{d}k'} \left(-\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \left(a(\vec{k}')e^{-ik'x} - a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'x} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \widetilde{\mathrm{d}k'} \left(-\vec{k}\cdot\vec{k}' \left(a(\vec{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \left(a(\vec{k}')e^{-ik'x} - a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'x} \right) \right) \\ &\quad + \frac{m^2}{2}\int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \widetilde{\mathrm{d}k'} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \left(a(\vec{k}')e^{-ik'x} + a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'x} \right) . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Le hamiltonien est l'intégrale spatiale sur la densité hamiltonienne. On utilise la représentation de la fonction delta par l'exponentielle, $\int \mathrm{d}^3x\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{q})$, et on écrit $\omega \equiv \omega_{\vec{k}}$ et $\omega' \equiv \omega_{\vec{k}'}$:

$$\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H} \\
&= \frac{1}{2}\int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \widetilde{\mathrm{d}k'}(2\pi)^3 \Bigg(\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \left(\omega\omega' + \vec{k}\cdot\vec{k}' + m^2\right) \\
&\qquad\qquad \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}')e^{-i(\omega-\omega')t} + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')e^{i(\omega-\omega')t}\right) \\
&\qquad + \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') \left(-\omega\omega' - \vec{k}\cdot\vec{k}' + m^2\right) \\
&\qquad\qquad \left(a(\vec{k})a(\vec{k}')e^{i(\omega+\omega')t} + a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')e^{-i(\omega+\omega')t}\right)\Bigg) \qquad (3.31) \\
&= \frac{1}{2}\int \widetilde{\mathrm{d}k}\frac{1}{2\omega}\underbrace{\left(\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2\right)}_{2\omega^2}\left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int \widetilde{\mathrm{d}k}\frac{1}{2\omega}\underbrace{\left(-\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2\right)}_{0}\left(a(\vec{k})a(-\vec{k})e^{2i\omega t} + a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(-\vec{k})e^{-2i\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \omega \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})\right) .
\end{aligned}$$

Finalement, on peut échanger l'ordre des a et $a^\dagger$ en prenant compte des relations de commutation éq. (3.28) :

$$\boxed{H = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \omega\, a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \underbrace{\int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \omega^2\, (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)}_{E_0} .} \qquad (3.32)$$

En effet, le hamiltonien prend la forme attendue, mais il implique une constante E_0 *divergente*. La raison est que $\delta^{(3)}(0)$ est infini, et même si on le remplaçait par une constante finie, son intégrale sur $\widetilde{\mathrm{d}k}$ serait toujours divergente. E_0 est, en fait, donné par la somme de toutes les énergies du point zéro d'une infinité continue d'oscillateurs. On va regarder l'origine de cette divergence dans la prochaine section dans plus de détail ; pour l'instant, remarquons que, dans le cadre de notre théorie, l'ajout d'une constante à l'énergie n'a pas de conséquence sur les observables physiques, car seulement les *différences* d'énergies sont observables. Il est alors possible de redéfinir (ou *renormaliser*) le zéro de l'énergie de manière que $E_0 \to 0$, ou bien $E_0 \to$ n'importe quelle valeur finie.

3.3 L'espace de Fock

On connait maintenant l'algèbre d'opérateurs qui définissent notre théorie quantique, mais on n'a pas encore étudié les états sur lesquels ces opérateurs agissent. L'espace de Hilbert des états quantiques en théorie des champs s'appelle l'*espace de Fock*. Par analogie avec l'oscillateur harmonique en mécanique quantique, on peut établir quelques propriétés importantes :

- Le hamiltonien est défini positif (apres soustraction de E_0), c.-à-d. $\langle\psi|H - E_0|\psi\rangle \geq 0$ pour tous les états $|\psi\rangle$. Preuve : $\langle\psi|H - E_0|\psi\rangle = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\ \omega_{\vec{k}}\|a(\vec{k})|\psi\rangle\|^2$, ce qui est manifestement défini positif.
- Il existe un état $|0\rangle$ (le *vide*) qui est annihilé par tous les $a(\vec{q})$, $a(\vec{q})|0\rangle = 0\ \forall\ \vec{q}$. Pour le démontrer, on peut raisonner encore comme en mécanique quantique : on suppose que le contraire soit le cas, alors en partant d'un état propre de H et en appliquant $a(\vec{q})$ de façon répétée, on pourrait arriver à un autre état propre dont l'énergie serait négative. Mais on vient de montrer que les énergies sont positives, alors tout état doit être annulé par $a(\vec{q})^n$ pour n suffisamment grand.

- L'*énergie du vide* E_0 est une constante divergente. Sa divergence est due à deux causes bien distinctes :
  1. L'énergie a été calculée dans un volume infini. Le facteur divergent $\delta^{(3)}(0)$ peut être interprété comme le volume de l'espace (infini), $V_{\mathbb{R}^3}$; pour motiver cette interprétation, utilisons formellement la représentation exponentielle de la fonction delta :
  $$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}) \Rightarrow \text{“}V_{\mathbb{R}^3}\text{”} = \int \mathrm{d}^3x = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,.$$
  Il s'agit ici d'une divergence dite *infrarouge*, car elle résulte d'une somme sur des longueurs d'onde infiniment grandes. On pourrait “régulariser” cette divergence en définissant la théorie dans un volume fini, ou on pourrait ne regarder que des quantités physiques finies (dans l'infrarouge) comme la *densité d'énergie* du vide, $\epsilon_0 = \frac{E_0}{V_{\mathbb{R}^3}}$.
  2. Cependant, ϵ_0 diverge toujours dans l'*ultraviolet* :
  $$\epsilon_0 = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{|\vec{k}|^2+m^2} = \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^\Lambda \mathrm{d}|\vec{k}|\;|\vec{k}|^2\sqrt{|\vec{k}|^2+m^2} \to \infty\,.$$
  La divergence résiduelle résulte d'une somme sur des nombres d'onde infiniment grands, ou des longueurs d'onde infiniment courtes, d'où la désignation “divergence ultraviolette”. À très courtes distances, la théorie devrait être remplacé par une théorie plus fondamentale. Concernant, en particulier, l'énergie du vide : on a raisonné que celle-ci n'est pas observable en théorie quantique des champs, puisque seulement les différences d'énergies le sont. En revanche, elle devient importante pour la *gravité*, car en relativité générale, c'est l'énergie qui détermine la géométrie de l'espace-temps. Alors, au-dessous de l'échelle de longueur de la *gravité quantique* $\ell_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}$ m, on s'attend que la théorie quantique des champs devra être remplacée par une structure plus fondamentale, comme par exemple la théorie des supercordes.
- Les opérateurs de champ agissent sur les états de l'espace de Fock de manière suivante :
  - L'action de $a^\dagger(\vec{k})$ sur le vide crée un état propre d'énergie-impulsion $|k\rangle$,
  $$\boxed{|k\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle}\,. \tag{3.33}$$
  On montre facilement que la valeur propre correspondante du hamiltonien est $\omega_{\vec{k}}$ et que celle de l'opérateur d'impulsion est $\vec{k}$. $a^\dagger$ s'appelle donc l'*opérateur de création*. L'impulsion de cet “état à une particule” $|k\rangle$ étant bien définie, le principe d'incertitude implique que sa localisation spatiale est pourtant maximalement incertaine.
  - Les *opérateurs d'annihilation* $a(\vec{k})$ annihilent le vide, $a(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall\,\vec{k}$, et
  $$\boxed{a(\vec{k})|k\rangle \propto |0\rangle}\,. \tag{3.34}$$
  - L'ensemble des états propres du hamiltonien libre est donné par l'ensemble des états à n particules, obtenus par l'action successive de n opérateurs de création $a^\dagger$ sur le vide.
  - Avec nos conventions relativistes de la normalisation des a et $a^\dagger$, la normalisation des états à une particule est
  $$\begin{aligned}\langle k|k'\rangle &= \langle 0|\;\underbrace{a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')}_{[a(\vec{k}),a^\dagger(\vec{k}')]+a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k})}\;|0\rangle \\ &= \langle 0|(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')|0\rangle + \langle 0|a^\dagger(\vec{k}')\underbrace{a(\vec{k})|0\rangle}_{0} \\ &= (2\pi)^3\,2\omega_{\vec{k}}\,\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\,.\end{aligned} \tag{3.35}$$
  - L'action de l'opérateur $\phi(x)$ crée un état $|x\rangle$ localisé à x, $|x\rangle = \phi(x)|0\rangle$. Son impulsion est maximalement incertaine selon le principe d'incertitude.
  - Le produit scalaire entre $|k\rangle$ et $|x\rangle$ est $\langle k|x\rangle = e^{ikx}$.
  - Le produit scalaire $\langle x|y\rangle$ entre deux états $|x\rangle$ et $|y\rangle$ localisés à differents points dans l'espace-temps peut s'interpréter comme l'*amplitude de probabilité* d'évoluer de $|y\rangle$ à $|x\rangle$. On l'étudiera dans la section suivante.

3.4 Propagateurs

Causalité

Qu'est-ce que l'amplitude de propagation de y à x ? C'est-à-dire, si une configuration de champs est bien localisée à l'endroit $\vec{y}$ au temps y^0, quel sera l'amplitude de probabilité qu'elle sera, ou était, localisée à $\vec{x}$ à un temps différent x^0 ? Regardons l'amplitude de transition entre ces deux états quantiques, que l'on appellera $D(x-y)$ (car elle ne peut dépendre que de la différence $x-y$ dans une théorie invariante de Poincaré) :

$$\begin{aligned} D(x-y) \equiv \langle x|y\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\ &= \int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \widetilde{\mathrm{d}k'} \langle 0| \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right)\left(a(\vec{k'})e^{-ik'y} + a^\dagger(\vec{k'})e^{ik'y}\right)|0\rangle \\ &= \int \widetilde{\mathrm{d}k}\, \widetilde{\mathrm{d}k'} \langle 0| e^{-ikx} \underbrace{a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k'})}_{a^\dagger(\vec{k'})a(\vec{k}) - [a^\dagger(\vec{k'}), a(\vec{k})]} e^{ik'y}|0\rangle \\ &= \int \widetilde{\mathrm{d}k}\, e^{-ik(x-y)}\,. \end{aligned} \tag{3.36}$$

L'expression de $D(x-y)$ pourrait paraître suspecte pour plusieurs raisons. La convergence de l'intégrale n'est pas évidente ; mais $D(x-y)$ pourra toujours être regardée comme une distribution. Plus gravement, est-ce que ce résultat n'est pas en contradiction avec la causalité de la théorie, vue que $D(x-y)$ est non nul même pour $(x-y)^2 < 0$?

Cette objection est invalidée par l'argument suivant. En mécanique quantique, deux mesures peuvent s'influencer seulement si le *commutateur* des opérateurs correspondants est différent de zéro. La quantité pertinente pour la causalité n'est donc pas $D(x-y)$ mais plutôt le commutateur des opérateurs $\phi(x)$ et $\phi(y)$. Or

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] = \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle &= D(x-y) - D(y-x) \\ &= 0 \qquad \text{si } (x-y)^2 < 0 \qquad (\rightarrow \text{exercice}). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Dit de manière informelle, la probabilité de propager de x à y *s'annule* avec la probabilité de propager de y à x, si l'intervalle lorentzien entre x et y est du genre espace.

Cet argument a une généralisation intéressante pour le cas d'un champ scalaire *complexe* :

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = 0 \qquad \text{si } (x-y)^2 < 0\,. \tag{3.38}$$

Ainsi, la probabilité d'une *particule* (créée par ϕ) de propager de x à y s'annule avec probabilité d'une *antiparticule* (créée par $\phi^\dagger$) de propager de y à x, d'où (probablement) la métaphore populaire que les antiparticules "se déplacent dans le temps à l'envers".

Propagateur de Feynman

Une quantité qui va s'avérer importante pour la théorie des perturbations est le *propagateur de Feynman*, défini par

$$\boxed{D_F(x-y) \equiv \langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x)\phi(y)|0\rangle}\,. \tag{3.39}$$

Ici le symbole T est défini d'agir sur un produit d'opérateurs de champ comme

$$\boxed{\mathrm{T}\,(\phi(x)\phi(y)) \equiv \begin{cases} \phi(x)\phi(y) & x^0 \geq y^0 \\ \phi(y)\phi(x) & y^0 \geq x^0 \end{cases}} \tag{3.40}$$

Le T indique alors qu'il faut prendre le produit des opérateurs en *ordre chronologique*. La définition de T se généralise de façon évidente aux produits de plus que deux opérateurs dépendants du temps.

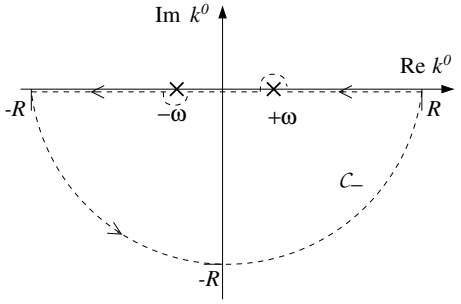
Une expression explicite pour $D_F(x-y)$ est

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \Theta(x^0-y^0)D(x-y) + \Theta(y^0-x^0)D(y-x) \\ &= \Theta(x^0-y^0)\int \widetilde{\mathrm{d}k}\, e^{-ik(x-y)} + \Theta(y^0-x^0)\int \widetilde{\mathrm{d}k}\, e^{ik(x-y)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\left(\Theta(x^0-y^0)e^{-i\omega(x^0-y^0)} + \Theta(y^0-x^0)e^{i\omega(x^0-y^0)}\right) . \end{aligned} \tag{3.41}$$

On va maintenant dériver une expression manifestement covariante pour $D_F(x-y)$ qui nous sera utile plus tard. L'identité cruciale est

$$\begin{aligned} \Theta(x^0-y^0)\frac{1}{2\omega}e^{-i\omega(x^0-y^0)} &= \Theta(x^0-y^0)\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_-} \mathrm{d}k^0\, \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0-\omega)(k^0+\omega)} \\ &= \Theta(x^0-y^0)\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k^0\, \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2-\omega^2+i\epsilon} . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ici $\mathcal{C}_-$ est une courbe dans le plan complexe définie comme suit, dans la limite $R \to \infty$:



La variable d'intégration k^0 est donc un nombre complexe, et l'intégrale de contour de la première ligne de (3.42) est évaluée par le théorème des résidus (voir annexe A pour un rappel). La première égalité s'obtient avec le résidu de la fonction $f(k^0) = \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0-\omega)(k^0+\omega)}$ à $k^0 = +\omega$:

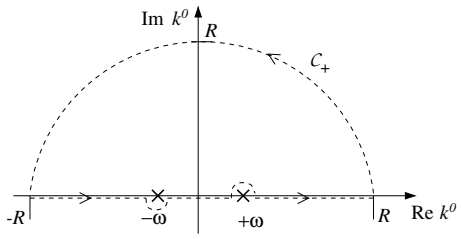
$$\mathrm{res}\,(f,\omega) = \frac{e^{-i\omega(x^0-y^0)}}{2\omega} . \tag{3.43}$$

Le deuxième pôle à $k^0 = -\omega$ n'est pas inclu dans la courbe $\mathcal{C}_-$ et ne contribue alors pas à l'intégrale. Pour obtenir la deuxième égalité de (3.42), on note que $x^0 - y^0$ est positif grace à la fonction Θ, alors l'intégrande décroît exponentiellement pour $|k^0| \to \infty$ si $\mathrm{Im}\, k^0 < 0$. Quand on intègre le long de la courbe $\mathcal{C}_-$, l'arc à $|k^0| \to \infty$ ne contribue alors pas à l'intégrale ; le seul apport provient de l'axe réelle. Le "$+i\epsilon$" au dénominateur est simplement un moyen mnémotechnique pour rappeller que l'intégration sur k^0 est définie par le contournement du pôle à $-\omega$ par dessous et du pôle à $+\omega$ par dessus.

De même,

$$\begin{aligned} \Theta(y^0-x^0)\frac{1}{2\omega}e^{i\omega(x^0-y^0)} &= -\Theta(y^0-x^0)\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_+} \mathrm{d}k^0\, \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0-\omega)(k^0+\omega)} \\ &= \Theta(y^0-x^0)\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k^0\, \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2-\omega^2+i\epsilon} . \end{aligned} \tag{3.44}$$

Le raisonnement pour arriver à cette expression est essentiellement le même, mais maintenant la courbe $\mathcal{C}_+$ doit être fermée dans le demi-plan supérieur puisque x^0-y^0 est négatif, donc l'intégrande décroit exponentiellement pour $\mathrm{Im}\, k^0 > 0$. Elle inclut alors le pôle à $k^0 = -\omega$ au lieu de celui à $k^0 = +\omega$.



Si on insère éqs. (3.42) et (3.44) dans éq. (3.41), on obtient

$$D_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^0}{2\pi}\, i\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2-\omega^2+i\epsilon} \underbrace{\big(\Theta(x^0-y^0)+\Theta(y^0-x^0)\big)}_{=1} . \tag{3.45}$$

Enfin on utilise que $(k^0)^2-\omega^2 = (k^0)^2-|\vec{k}|^2-m^2 = k^2-m^2$ pour obtenir

$$\boxed{D_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} e^{-ik(x-y)} .} \tag{3.46}$$

Encore, le $i\epsilon$ sert à rappeler qu'on a défini l'intégrale sur k^0 par une courbe d'intégration qui contourne les pôles comme dans les deux graphiques ci-dessus. Sans cette précision, l'intégrale serait ambigüe. En fait, d'autres préscriptions pour contourner les pôles donnent lieu a d'autres objets aussi dits propagateurs (notamment le *propagateur avancé* et le *propagateur retardé* $\rightarrow$ exercices).

On peut facilement montrer ($\rightarrow$ exercices) que $iD_F(x-y)$ est une *fonction de Green* pour l'opérateur de Klein-Gordon,

$$\boxed{(\Box + m^2) D_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y) .} \tag{3.47}$$

Pour rappel, si G est une fonction de Green pour l'opérateur différentiel linéaire D, $D_x G(x,y) = \delta(x-y)$, alors l'équation différentielle $D_x f = J$ a comme solution $f(x) = \int \mathrm{d}y\, J(y) G(x,y)$. Il y a des fonctions de Green différentes pour des conditions aux limites différentes.

Chapitre 4

La formule de réduction de LSZ

4.1 La théorie libre vs. la théorie avec interactions

Résumons les propriétés caractéristiques de la théorie d'un champ scalaire réel libre qu'on a étudié jusqu'à présent :

- Le lagrangien est quadratique en ϕ, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2$.
- Par conséquent, l'équation de mouvement est linéaire, $(\Box + m_0^2)\phi = 0$. Elle donne alors lieu au principe de superposition ; en particulier, il n'y a pas de diffusion.
- La théorie est exactement soluble. Les états propres du hamiltonien sont les états à n particules, obtenus par l'action de n opérateurs de création sur le vide.
- La masse, ou l'énergie au repos, du premier état excité est m_0.
- Les opérateurs de création et d'annihilation $a^\dagger(\vec{k})$ et $a(\vec{k})$ sont construits par décomposition du champ en modes de Fourier. Ils ne dépendent pas du temps. L'action de $a^\dagger$ sur le vide crée un état à une particule bien normalisé :

$$a^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |k\rangle\,, \qquad \langle k'|k\rangle = 2\omega(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\,.$$

Maintenant, on va regarder une théorie d'un champ scalaire réel avec interactions :

- Le lagrangien que l'on va considérer est de la forme $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 - \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)$, avec $\mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)$ un polynôme de degré ≥ 3.
- L'équation de mouvement sera donc non linéaire, $(\Box + m_0^2)\phi = -\mathcal{V}'_{\text{int}}(\phi)$. Plus géneralement, pour une théorie de plus qu'un seul type de champ, elle sera de la forme $(\Box + m_0^2)\phi = J$, avec J une fonction non linéaire de ϕ et des autres champs. Les termes non linéaires donnent lieu aux processus de *diffusion*.
- Ces théories sont généralement non solubles. On y trouve des états à n particules, mais aussi des états liés, des résonances instables etc.
- L'énergie au repos m du premier niveau excité sera, en général, *différent* de m_0. On ne peut alors pas identifier la masse de la particule m avec le paramètre m_0, la racine du coefficient du terme $-\phi^2/2$ dans le lagrangien.
- On peut toujours définir des opérateurs a et $a^\dagger$ par éq. (3.25). Cependant, les opérateurs ainsi définis *ne seront plus indépendants du temps*. En plus, le résultat de l'action de $a^\dagger(\vec{k})$ sur le vide ne sera plus simplement un état à une particule normalisé d'impulsion $\vec{k}$, mais une superposition d'états,

$$a^\dagger(\vec{k},t)|0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \ldots \tag{4.1}$$

  A priori $a^\dagger(\vec{k},t)|0\rangle$ peut en fait être une combinaison linéaire de *tous les états* du spectre.

4.2 La formule de réduction de LSZ

Pour décrire des processus de diffusion des particules, on a besoin d'un formalisme permettant de calculer les amplitudes quantiques de transition entre un état "initial" $|i\rangle$ (connu à un certain

temps) et tout possible état "final" $|f\rangle$ (observé à un temps plus tard). L'objectif de cette section du cours sera de dériver une formule générale pour la quantité

$$\langle f|i\rangle$$

dans une théorie avec interactions, à partir des principes premiers.

Par exemple, dans un collisionneur de particules, $|i\rangle$ pourrait être un état à deux protons avec une énergie de centre de masse de 14 TeV et $|f\rangle$ pourrait être un état contenant un boson de Higgs ainsi qu'un ensemble de quarks et gluons à basse énergie. Ou $|i\rangle$ pourrait être un état à deux particules de matière sombre dans le halo galactique et $|f\rangle$ pourrait contenir des particules du modèle standard, produites par l'annihilation de la matière sombre. [1] De l'amplitude $\langle f|i\rangle$, on déduira la probabilité de transition $|\langle f|i\rangle|^2$, et ultérieurement des observables physiques comme la section efficace de production des bosons de Higgs au LHC, ou bien le flux des rayons gamma provenant de l'annihilation des particules de matière sombre.

Dans le chapitre 7, on va détailler comment on passe des amplitudes de transition aux sections efficaces et aux taux de désintégration. Mais ce passage n'implique que la cinématique des particules relativistes et est donc indépendant de la théorie quantique des champs au sens strict. La TQC, quant à elle, permet de décrire la *dynamique* du processus, c'est-à-dire de calculer $\langle f|i\rangle$. Dans le présent chapitre, on va se concentrer sur ce calcul.

Processus de diffusion idéalisé

Dans une situation idéalisée, l'état initial contiendra des particules bien séparées aux impulsions précisément connues au temps $t \to -\infty$. De même, dans l'état final se trouveront des particules bien séparées avec des impulsions précisément mesurées au temps $t \to \infty$. [2] Les particules (ou plutôt les paquets d'onde, si on affirme de connaitre précisément les impulsions) étant bien isolées les unes des autres, elles ne peuvent pas s'influencer aux temps $t \to \pm\infty$, où elles peuvent donc être traitées comme particules *libres*, sans interactions. Cette assertion, même si plausible intuitivement, reste heuristique à notre niveau de la discussion ; il est possible de la formaliser et de l'élever au statut d'un axiome fondamental (le "principe de décomposition des clusters").

Pour le calcul des amplitudes de transition dans une théorie avec interactions, on va donc traiter ces dernières comme si elles n'étaient présentes qu'aux temps intermédiaires, sans concerner les états asymptotiques. Le cas spécial d'un processus idéalisé de diffusion $2 \to 2$ (deux particules dans l'état initial, deux dans l'état final) est esquissé dans Fig. 4.1.

En particulier, pour une théorie d'un champ scalaire réel avec interactions, on regarde un état initial générique $|i\rangle$ donné par

$$|i\rangle = |k_1, k_2, \ldots, k_n; \text{in}\rangle \tag{4.2}$$

contenant n particules libres avec impulsions $k_1, \ldots k_n$. Il peut s'écrire

$$|k_1, k_2, \ldots, k_n; \text{in}\rangle = a^\dagger_{\text{in}}(\vec{k}_1) \ldots a^\dagger_{\text{in}}(\vec{k}_n)|0\rangle \tag{4.3}$$

où les $a^\dagger_{\text{in}}$ sont des opérateurs de création des champs libres. De même pour l'état final :

$$|f\rangle = |k'_1, k'_2, \ldots, k'_m; \text{out}\rangle = a^\dagger_{\text{out}}(\vec{k}'_1) \ldots a^\dagger_{\text{out}}(\vec{k}'_m)|0\rangle \tag{4.4}$$

Quelle est la rélation entre les opérateurs de création libres $a^\dagger_{\text{in/out}}$ et le champ interagissant ϕ ? On rappelle que l'opérateur de création général peut être défini par (cf. éq. (3.25))

$$a^\dagger(\vec{k}, t) = -i \int \mathrm{d}^3x e^{-ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \phi(x)\,, \qquad \text{où } f \overset{\leftrightarrow}{\partial} g \equiv f(\partial g) - (\partial f)g\,. \tag{4.5}$$

1. On ne connaît pas encore la nature de la matière sombre, mais supposons qu'un tel processus puisse avoir lieu.

2. Bien sûr, selon le principe d'incertitude et à cause de la résolution finie de tout appareil de mesure, la précision n'est jamais infinie en pratique. L'intervalle de temps entre la préparation de l'état initial et la mesure de l'état final ne l'est pas non plus.

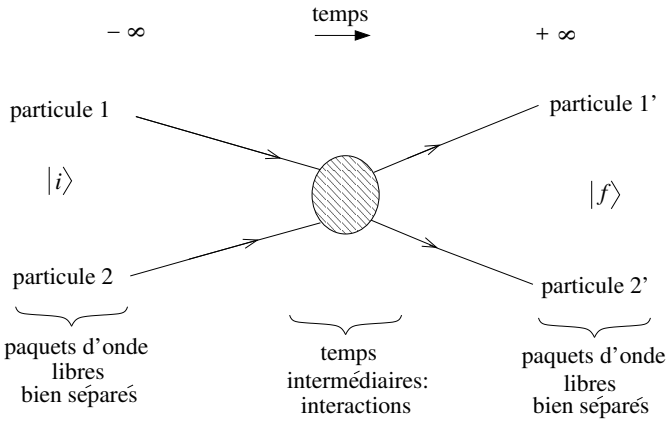


FIGURE 4.1 – Un processus de diffusion idéalisé $2 \to 2$.

.

Contrairement au cas d'une théorie libre ($\to$ exerices), $a^\dagger$ dépend du temps quand il y a des interactions. Il semble évident de poser $a^\dagger_{\rm out}(\vec{k}) = \lim_{t\to\infty} a^\dagger(\vec{k},t)$ et $a^\dagger_{\rm in}(\vec{k}) = \lim_{t\to-\infty} a^\dagger(\vec{k},t)$; pourtant on a vu dans éq. (4.1) que, dans une théorie avec interactions, $a^\dagger(\vec{k},t)$ ne crée pas simplement un état à une particule d'impulsion $\vec{k}$ mais une superposition d'états. Il ne se comporte alors pas comme un opérateur de création des particules libres.

Redéfinitions du champ

Heureusement il se trouve qu'il ne manque pas beaucoup pour pouvoir identifier $a^\dagger_{\rm out/in}(\vec{k}) \sim a^\dagger(\vec{k},\pm\infty)$, au moins "au sens faible" des éléments de matrice ; une redéfinition simple du champ ϕ suffit. En détail, considérons l'état créé par l'action de $a^\dagger$ sur le vide aux temps asymptotiques. Cet état doit avoir les mêmes produits scalaires avec tout autre état qu'un état à une particule bien normalisé. Il faut donc que

$$\langle 0|a^\dagger(\vec{k},\pm\infty)|0\rangle = 0\,, \tag{4.6}$$

$$\langle p|a^\dagger(\vec{k},\pm\infty)|0\rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p})\,, \tag{4.7}$$

$$\langle \lambda_p|a^\dagger(\vec{k},\pm\infty)|0\rangle = 0\,, \tag{4.8}$$

où $|p\rangle$ est un état à une particule bien normalisé d'impulsion p et $|\lambda_p\rangle$ est un état à plusieurs particules ou un état lié d'impulsion totale p.

Regardons d'abord éq. (4.6) qui peut s'écrire

$$0 = -i \lim_{t\to\pm\infty} \int \mathrm{d}^3x\; e^{-ikx} \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \langle 0|\phi(x)|0\rangle\,. \tag{4.9}$$

Évidemment, cette condition sera satisfaite si $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$. Rappelons maintenant l'équation de Heisenberg qui décrit l'évolution temporelle des opérateurs :

$$\phi(t,\vec{x}) = e^{iHt}\phi(0,\vec{x})e^{-iHt}\,. \tag{4.10}$$

Sa généralisation relativiste est

$$\phi(x) = e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx} \tag{4.11}$$

où les opérateurs d'impulsion (les générateurs des translations en espace-temps) sont donnés par $P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} T^{0\mu}$, voir section 2.3. Donc

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \langle 0|e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|0\rangle \equiv v \qquad \text{(const.)} \tag{4.12}$$

où on a utilisé que le vide est invariant par translations. Pour s'assurer que $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$, ce qui implique la condition (4.6), il suffit donc de redéfinir le champ ϕ par l'ajout d'une constante appropriée, $\phi(x) \to \phi(x) - v$.

Regardons ensuite la condition (4.7), qui demande que l'état $a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$ soit bien normalisé sur les états à une particule. Cette condition sera satisfaite si

$$\langle p|\phi(x)|0\rangle = e^{ipx}\,. \tag{4.13}$$

Avec éq.(4.11), on trouve, en général,

$$\langle p|\phi(x)|0\rangle = \langle p|e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}|0\rangle = e^{ipx}\langle p|\phi(0)|0\rangle = e^{ipx}Z \tag{4.14}$$

où $Z \equiv \langle p|\phi(0)|0\rangle$ est une invariante de Lorentz (car Z peut dépendre seulement de $p^2 = m^2$). La théorie libre vérifie bien la relation souhaitée $Z = 1$:

$$\begin{aligned} Z = \langle p|\phi(0)|0\rangle &= \langle p| \int \widetilde{\mathrm{d}k} \left(a(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k})\right)|0\rangle = \int \widetilde{\mathrm{d}k}\ \langle p|k\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{k}}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{p}) = 1\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

En revanche, pour une théorie avec interactions, il faut encore changer la normalisation du champ par un facteur $\sqrt{Z}$ pour qu'il vérifie la condition (4.7). Cette redéfinition implique un changement de la normalisation de tous les termes du lagrangien : la "*renormalisation de la fonction d'onde*".

Finalement, quant à la condition (4.8), il se trouve qu'elle est satisfaite sans qu'on doive encore redéfinir ϕ. Elle peut être démontrée avec l'aide de la méthode de la phase stationnaire ($\rightarrow$ exercices).

On conclut que, après des redéfinitions du champ $\phi(x)$ par des constantes additives et multiplicatives appropriées, les conditions 4.6-(4.8) sont bien vérifiées et donc

$$\lim_{t\,\to\,\pm\infty} a^\dagger(\vec{k},t)|0\rangle \quad \text{se comporte comme état à une particule bien normalisé.} \tag{4.16}$$

Dérivation de la formule LSZ

Après toutes ces remarques préliminaires, commençons maintenant le calcul de l'amplitude de transition $\langle f|i\rangle$,

$$\langle f|i\rangle = \langle k'_1, k'_2, \ldots, k'_m; \mathrm{out}|k_1, k_2, \ldots, k_n; \mathrm{in}\rangle\,. \tag{4.17}$$

Selon la discussion ci-dessus, avec les redéfinitions nécessaires sous-entendues, elle peut s'écrire comme

$$\langle f|i\rangle = \langle 0|a(\vec{k}'_1,\infty)\ldots a(\vec{k}'_m,\infty)a^\dagger(\vec{k}_1,-\infty)\ldots a^\dagger(\vec{k}_n,-\infty)|0\rangle\,. \tag{4.18}$$

Il convient de la réécrire avec l'aide du symbole T (on rappelle que ce dernier est défini de façon que les produits d'opérateurs à sa droite sont à prendre en ordre chronologique) :

$$\begin{aligned} \langle f|i\rangle &= \langle 0|\,\mathrm{T}\, a(\vec{k}'_1,\infty)\ldots a(\vec{k}'_m,\infty)a^\dagger(\vec{k}_1,-\infty)\ldots a^\dagger(\vec{k}_n,-\infty)|0\rangle \\ &= \langle 0|\,\mathrm{T}\big(a(\vec{k}'_1,\infty) - a(\vec{k}'_1,-\infty)\big)\ldots\big(a(\vec{k}'_m,\infty) - a(\vec{k}'_m,-\infty)\big) \\ &\qquad \big(a^\dagger(\vec{k}_1,-\infty) - a^\dagger(\vec{k}_1,\infty)\big)\ldots\big(a^\dagger(\vec{k}_n,-\infty) - a^\dagger(\vec{k}_n,\infty)\big)|0\rangle \end{aligned} \tag{4.19}$$

La première égalité est une conséquence du fait que les opérateurs dans éq. (4.18) sont déjà en ordre chronologique, alors préfixer le symbole T ne change rien. Dans la deuxième égalité, on a soustrait de chaque opérateur d'annihilation ou de création à $\pm\infty$ son pendant à $\mp\infty$. Ces termes supplémentaires ne changent pas l'élément de matrice, car tous les opérateurs d'annihilation qu'on vient d'ajouter se trouvent à droite du produit d'opérateurs sous le symbole T, où ils annihilent le vide ; similairement, tous les opérateurs de création supplémentaires se trouvent à gauche en ordre chronologique, où $\langle 0|a^\dagger(\vec{k}_i,\infty) = 0$. Il faut pourtant supposer que les $\vec{k}_i$ soient tous différents des $\vec{k}'_j$, ou, autrement dit, que toutes les particules participent au processus de diffusion ; aucune des particules n'entre et sort avec l'impulsion inchangée. Si, en revanche, quelques-unes parmi les impulsions initiales sont égales aux impulsions finales, cela donne lieu aux ambiguïtes d'ordre, car $[a(\infty), a^\dagger(\infty)] \neq 0$ et similairement à $t = -\infty$. Ce cas spécial de "diffusion vers l'avant" nécessite un traitement plus soigneux que l'on ne détaillera pas.

Regardons maintenant un des termes en parenthèses dans éq. (4.19) :

$$\begin{aligned}
&a^\dagger(\vec{k},\infty) - a^\dagger(\vec{k},-\infty) \\
&\quad = -i\left(\lim_{x^0\to\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\left(e^{-ikx}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\phi(x)\right) - \lim_{x^0\to-\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\left(e^{-ikx}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\phi(x)\right)\right) \\
&\quad = -i\int \mathrm{d}^4x\,\partial_0\left(e^{-ikx}\overset{\leftrightarrow}{\partial_0}\phi(x)\right) \qquad \text{(théorème fondamental de l'analyse)} \\
&\quad = -i\int \mathrm{d}^4x\,e^{-ikx}\left(-ik^0\partial_0 + \partial_0^2 + (k^0)^2 + ik^0\partial_0\right)\phi(x) \\
&\quad = -i\int \mathrm{d}^4x\,e^{-ikx}(\partial_0^2 + |\vec{k}|^2 + m^2)\phi(x) \qquad \text{(avec } m^2 = k^2 = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2\text{)} \\
&\quad = -i\int \mathrm{d}^4x\,e^{-ikx}(\Box + m^2)\phi(x) \qquad \text{(IPP)}\,.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Notons que, dans une théorie libre, $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$ et donc $a^\dagger(\vec{k},\infty) = a^\dagger(\vec{k},-\infty)$, ce qui reflète le fait que $a^\dagger$ ne dépend pas du temps. Avec interactions, ce n'est plus le cas et alors $a^\dagger(\vec{k},\infty) - a^\dagger(\vec{k},-\infty)$ est différent de zéro. Le conjugué d'éq. (4.20) donne

$$a(\vec{k},+\infty) - a(\vec{k},-\infty) = i\int \mathrm{d}^4x\,e^{ikx}(\Box + m^2)\phi(x)\,. \tag{4.21}$$

On substitue les éqs. (4.20) et (4.21) dans éq. (4.19) pour obtenir la *formule de réduction de Lehmann-Symanzik-Zimmermann* :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\langle f|i\rangle = i^{n+m}\int \mathrm{d}^4x_1\,\ldots\mathrm{d}^4x_n\,\mathrm{d}^4x'_1\,\ldots\mathrm{d}^4x'_m\,e^{-ik_1x_1-ik_2x_2-\ldots-ik_nx_n+ik'_1x'_1+ik'_2x'_2+\ldots+ik'_mx'_m} \\
&\quad(\Box_1+m^2)\ldots(\Box_n+m^2)(\Box_{1'}+m^2)\ldots(\Box_{m'}+m^2)\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\phi(x'_1)\ldots\phi(x'_m)|0\rangle\,.
\end{aligned}} \tag{4.22}$$

On a ainsi obtenu une relation entre l'amplitude de transition $\langle f|i\rangle$ et la *fonction de correlation en ordre chronologique* $\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\ldots\phi(x'_m)|0\rangle$. Par exemple, pour la diffusion $2 \to 2$ on obtient

$$\begin{aligned}
\langle f|i\rangle = i^4\int &\mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x'_1\,\mathrm{d}^4x'_2\,e^{-ik_1x_1-ik_2x_2+ik'_1x'_1+ik'_2x'_2} \\
&(\Box_1+m^2)(\Box_2+m^2)(\Box_{1'}+m^2)(\Box_{2'}+m^2)\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x'_1)\phi(x'_2)|0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

La formule de LSZ prend une allure légèrement moins compliquée dans l'espace des impulsions :

$$\boxed{\langle f|i\rangle = (-i)^{n+m}\prod_{i=1}^{n}(k_i^2-m^2)\prod_{j=1}^{m}(k_j'^2-m^2)\,G(k_1,k_2,\ldots,k_n,-k'_1,-k'_2,\ldots,-k'_m)} \tag{4.24}$$

où G est la transformée de Fourier de la fonction de correlation,

$$\begin{aligned}
&G(k_1,\ldots,k_n,-k'_1,\ldots,-k'_m) \\
&\quad = \int\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}^4x_i\prod_{j=1}^{m}\mathrm{d}^4x'_j\,e^{-i\sum_{i=1}^n k_ix_i + i\sum_{j=1}^m k'_jx'_j}\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\phi(x'_1)\ldots\phi(x'_m)|0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

On termine avec quelques remarques sur la dérivation, l'interprétation et l'utilité de la formule de LSZ :

- Pour arriver à éq. (4.22), on a échangé l'ordre du sybole T et des opérateurs différentiels $\Box$. Strictement dit, cet échange n'est pas permis ; pour compenser il faudrait ajouter des termes dits *termes de contact* qu'on a supprimé ici, parce qu'ils ne contribuent en fait pas à $\langle f|i\rangle$.
- Les manipulations qui nous ont amenés à la formule de LSZ sont mieux justifiées si on traite les particules entrantes et sortantes comme paquets d'onde de largeur fini et si on ne prend la limite de largeur zéro qu'à la fin du calcul. Ici les expressions intégrales doivent se comprende au sens des distributions.

- Sans la redéfinition des champs $\phi \to \phi/\sqrt{Z}$, on aurait obtenu une formule équivalente avec des facteurs explicites de $\sqrt{Z}$; cette convention alternative est assez courante dans la littérature.
- La formule de LSZ se généralise de façon évidente aux cas des théories avec plusieurs espèces de champ scalaire, dont les masses peuvent être toutes différentes. Des variantes de la formule pour des champs quantiques non scalaires peuvent également être dérivées.
- Dans éq. (4.24) les particules sont sur couche de masse : $k_i^2 = m^2$, alors $k_i^2 - m^2 = 0$, où m est la masse physique de la particule dans la théorie avec interactions. Cela implique que l'amplitude $\langle f|i\rangle$ est zéro, sauf si la transformée de Fourier de la fonction de correlation $G(k_1, \ldots, -k'_m)$ a un pôle à $k_i^2 = m^2$ (et à $k_j'^2 = m^2$ également). Dans ce cas, les préfacteurs $k^2 - m^2$ vont supprimer les denominateurs $k^2 - m^2$ et le résultat peut être non nul. L'amplitude $\langle f|i\rangle$ est le résidu à ce pôle.
- Une grande partie du reste de ce cours va concerner le calcul des fonctions de correlation $\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\ldots\phi(x'_n)|0\rangle$ (ou bien $G(k_1, \ldots, k'_m)$). La formule de LSZ permet ensuite de faire le lien avec les observables physiques.
- Ce calcul peut s'aborder par deux chemins différents (mais ultérieurement équivalents) : on peut passer soit par la *représentation d'interaction* dans le cadre du formalisme canonique ($\to$ exercices), soit par la *quantification par l'intégrale de chemin* ($\to$ chapître suivant). Dans ce cours on mettra l'accent sur cette dernière approche, vu qu'elle est mieux adaptée à la quantification des champs de jauge, ce qui sera un de nos objectifs du dernier chapitre.

Chapitre 5

Quantification par l'intégrale de chemin

5.1 Les intégrales de chemin en mécanique quantique

Pour rappel, dans la représentation de Heisenberg de la mécanique quantique, les opérateurs dépendent du temps alors que les états quantiques d'un système sont indépendants du temps, contrairement à la représentation de Schrödinger. Supposons qu'un système quantique soit dans l'état $|q_i, t = 0\rangle \equiv |q_i\rangle$, défini comme état propre de l'opérateur de position $Q(t)$ au temps $t = 0$ avec valeur propre q_i. On s'intéresse au recouvrement entre l'état $|q_i\rangle$ et l'état $|q_f, T\rangle$, un état propre de $Q(T) = e^{iHT}Q(0)e^{-iHT}$ avec valeur propre q_f. Ce dernier peut s'écrire

$$|q_f, T\rangle = e^{+iHT}|q_f\rangle\,, \tag{5.1}$$

une expression qui ressemble, au signe de l'exposant près, à celle de l'évolution temporelle d'un état de Schrödinger. Mais il ne faut pas confondre les deux : $|q_f, T\rangle$ et $|q_f\rangle$ sont des états de Heisenberg. Leur "dépendance du temps" provient du fait qu'ils sont définis, respectivement, comme états propres des opérateurs $Q(T)$ et $Q(0)$; par contre $|q_f, T\rangle$ et $|q_f\rangle$ ne sont pas conduits l'un à l'autre par l'évolution temporelle du système.

Pour calculer $\langle q_f, T|q_i\rangle$, on écrit alors les deux états en fonction d'états propres de $Q(0)$ comme

$$\langle q_f, T|q_i\rangle = \langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle\,, \tag{5.2}$$

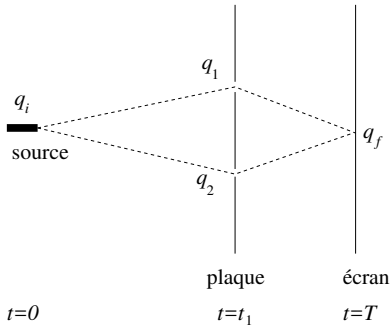
ce qui met en évidence qu'il faut simplement calculer les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution e^{-iHT} dans la base des $\{|q\rangle\}$. Bien sûr, en mécanique quantique cela revient à une procédure assez standard : on diagonalise le hamiltonien dans l'espace des positions pour obtenir les fonctions d'onde des états stationnaires $\psi_n(q)$ avec énergies E_n et on calcule

$$\langle q_f, T|q_i\rangle = \sum_n \psi_n^*(q_i)e^{-iE_nT}\psi_n(q_f)\,. \tag{5.3}$$

Maintenant on va discuter un autre formalisme, plus compliqué mais très instructif, pour le calcul de ces éléments de matrice. Son intérêt sera ultérieurement dans sa généralisation, qui va nous amener à une méthode pour le calcul des fonctions de correlation en théorie quantique des champs.

Rappelons d'abord une des expériences quintessenciées de la mécanique quantique : l'expérience des *fentes de Young*. Une source localisée à q_i produit un faisceau de particules qui, après un intervalle de temps T, arrivent à un détecteur ou écran, où leurs positions sont de nouveau mesurées. Entre la source et l'écran, il y a une plaque impénétrable percée par des fentes.

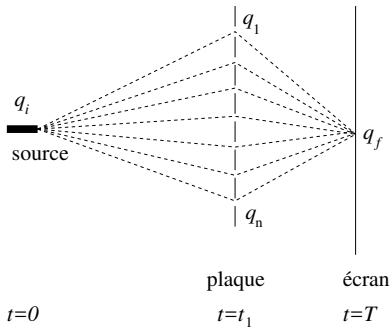
Pour deux fentes, on peut illustrer la configuration ainsi :



En mécanique quantique, le calcul de l'amplitude de probabilité pour une particule d'arriver à q_f nécessite de prendre une superposition cohérente des amplitudes de passer par q_1 et q_2 au temps intermédiaire t_1. On a donc

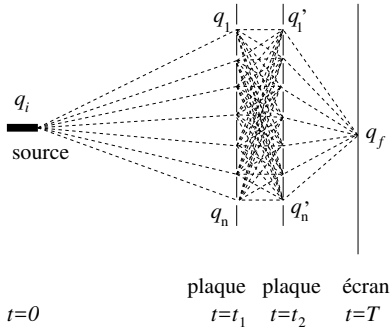
$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle = \langle q_f|e^{-iH(T-t_1)}|q_1\rangle\langle q_1|e^{-iHt_1}|q_i\rangle + \langle q_f|e^{-iH(T-t_1)}|q_2\rangle\langle q_2|e^{-iHt_1}|q_i\rangle\,. \tag{5.4}$$

Pour la généralisation au cas de n fentes, l'amplitude est la superposition cohérente des n amplitudes correspondantes :



$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle q_f|e^{-iH(T-t_1)}|q_k\rangle\langle q_k|e^{-iHt_1}|q_i\rangle\,. \tag{5.5}$$

On peut aussi imaginer d'avoir plus qu'une plaque. Par exemple, pour deux plaques avec n fentes chacune,



on trouve pour l'amplitude de passer de $q = q_i$ au temps 0, par l'intermédiaire de $q = q_m$ au temps t_1 et $q = q'_k$ au temps t_2, à $q = q_f$ au temps $t = T$:

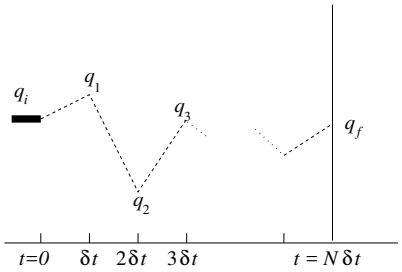
$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle = \sum_{mk}\langle q_f|e^{-iH(T-t_2)}|q'_k\rangle\langle q'_k|e^{-iH(t_2-t_1)}|q_m\rangle\langle q_m|e^{-iHt_1}|q_i\rangle\,. \tag{5.6}$$

Qu'est-ce que l'on aurait pour un nombre infini de plaques avec un nombre infini de fentes ? Dans ce cas il n'y a plus d'obstacle, mais on peut toujours appliquer le principe de la superposition

cohérente des amplitudes de probabilité pour écrire l'amplitude $\langle q_f, T|q_i\rangle$ comme

$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle = \sum_{\substack{\text{tous les chemins}\\ \text{possibles entre}\\ q_f \text{ et } q_i}} \text{(amplitude de suivre le chemin)}\,. \tag{5.7}$$

Pour être plus concret, imaginons le temps entre $t=0$ et $t=T$ comme discrétisé en N intervalles. Un chemin entre q_i et q_f parcourira les positions intermédiaires q_k à $t = k\,\delta t$ (où $\delta t = T/N$) :



Maintenant on laisse tendre $N \to \infty$ et $\delta t \to 0$ et on prend la somme ou, dans la limite du continu, l'intégrale sur les q intermédiaires pour obtenir

$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} (\mathrm{d}q_j)\; \langle q_f|e^{-iH\frac{T}{N}}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-iH\frac{T}{N}}|q_{N-2}\rangle \cdots \langle q_1|e^{-iH\frac{T}{N}}|q_i\rangle\,. \tag{5.8}$$

Cas spécial : pour que cette équation devienne plus instructive, regardons d'abord le cas du hamiltonien libre, $H = \frac{P^2}{2m}$. On note les relations

$$\int \mathrm{d}q\; |q\rangle\langle q| = 1\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\, |p\rangle\langle p| = 1\,, \qquad \langle q|p\rangle = e^{ipq} \tag{5.9}$$

pour des états propres $|q\rangle$ de l'opérateur de position $Q(0)$ avec valeur propre q, et $|p\rangle$ de l'opérateur d'impulsion $P(0)$ avec valeur propre p.

Regardons le pas entre q_j et q_{j+1} :

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}|\exp\left(-i\,\delta t\,\frac{P^2}{2m}\right)|q_j\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\langle q_{j+1}|\exp\left(-i\,\delta t\frac{P^2}{2m}\right)|p\rangle\langle p|q_j\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\exp\left(-i\,\delta t\frac{p^2}{2m}\right)\exp\left(ip(q_{j+1}-q_j)\right)\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Cette intégrale est une intégrale de Gauss (ou plutôt de Fresnel, l'exposant étant purement imaginaire) ; on a ($\to$ exercices)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp\left(\frac{1}{2}iax^2 + ibx\right) = \left(\frac{2\pi i}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-i\frac{b^2}{2a}\right) \tag{5.11}$$

d'où

$$\langle q_{j+1}|\exp\left(-i\,\delta t\,\frac{P^2}{2m}\right)|q_j\rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\,\delta t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\,\delta t\,m}{2}\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t}\right)^2\right)\,. \tag{5.12}$$

Si on définit q_0 et q_N par $q_0 \equiv q_i$ et $q_N \equiv q_f$, éq. (5.8) devient alors

$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\,\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N-1}\int \mathrm{d}q_k \exp\left(i\,\delta t\,\frac{m}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t}\right)^2\right)\,. \tag{5.13}$$

Dans la limite $N \to \infty$ et $\delta t = N/T \to 0$, on peut remplacer

$$\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t}\right)^2 \to \dot{q}^2\,, \qquad \delta t\sum_j \to \int_0^T \mathrm{d}t\,. \tag{5.14}$$

De plus, il convient de définir la mesure de l'*intégrale de chemin* formellement par

$$\int \mathcal{D}q \equiv \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\,\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} \int \mathrm{d}q_k \,. \tag{5.15}$$

On obtient ainsi une expression compacte pour l'amplitude de transition entre l'état $q = q_i$ au temps $t = 0$ et l'état $q = q_f$ au temps $t = T$:

$$\langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle = \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q \;\exp\left(i\int_0^T \mathrm{d}t\;\frac{1}{2}m\dot{q}^2\right) . \tag{5.16}$$

Alors, pour calculer l'élément de matrice de e^{-iHT} entre deux états propres de position avec valeurs propres q_i et q_f, il faut intégrer sur tous les chemins possibles $q(t)$ avec $q(0) = q_i$ et $q(T) = q_f$ et pondérer l'intégrale avec $e^{i\int E_{\mathrm{cin}}(t)\,\mathrm{d}t}$, où $E_{\mathrm{cin}}(t)$ est l'énergie cinétique de la particule le long du chemin.

Cas plus général : l'expression d'éq. (5.16) se généralise au cas d'un *hamiltonien séparable* donné comme la somme de l'énergie cinétique habituelle et d'un potentiel qui ne dépend que de q,

$$H(P,Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q)\,. \tag{5.17}$$

(Si, en revanche, le hamiltonien contient des puissances supérieures en P, l'intégrale sur p ne sera plus gaussienne. S'il contient des termes mixtes impliquant des produits entre P et Q, son pendant classique n'est plus défini sans ambiguïté car P et Q ne commutent pas.) En regardant encore le pas entre q_j et q_{j+1}, on a, selon la formule de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$\begin{aligned}
&\langle q_{j+1}|\exp\left(-i\,\delta t\left(\frac{P^2}{2m}+V(Q)\right)\right)|q_j\rangle \\
&= \langle q_{j+1}|\exp\left(-i\,\delta t\frac{P^2}{2m}\right)\exp\left(-i\,\delta t\,V(Q)\right)\exp\Bigg(\underbrace{\frac{\delta t^2}{4m}[P^2,V(Q)]+\mathcal{O}(\delta t^3)}_{\text{négligeable lorsque } \delta t\to 0}\Bigg)|q_j\rangle \\
&= \int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\langle q_{j+1}|\exp\left(-i\,\delta t\frac{P^2}{2m}\right)|p\rangle\langle p|\exp\left(-i\,\delta t\,V(Q)\right)|q_j\rangle + \mathcal{O}(\delta t^2) \\
&= \int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\exp\left(-i\,\delta t\frac{p^2}{2m}+i(q_{j+1}-q_j)p\right)\exp\left(-i\,\delta t\,V(q_j)\right)+\mathcal{O}(\delta t^2) \\
&\overset{\text{int. gaussienne}}{=} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\,\delta t}}\exp\left(i\,\delta t\left(\frac{m}{2}\frac{(q_{j+1}-q_j)^2}{\delta t^2}-V(q_j)\right)\right)+\mathcal{O}(\delta t^2)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Les termes impliquant les commutateurs sont alors d'ordre supérieur en δt. Dans la limite $\delta t \to 0$, les termes en parenthèses deviennent $\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) = L$ (le lagrangien classique). Comme pour le cas libre, cf. eq. (5.13), le produit des $N-1$ exponentielles est l'exponentielle de la somme, et la somme devient une intégrale dans la limite $\delta t \to 0$. Or, $\int_0^T \mathrm{d}t\,L(q,\dot{q}) = S[q]$ est l'action classique. Le résultat peut donc s'écrire

$$\boxed{\langle q_f|e^{-iHT}|q_i\rangle = \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q\;\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q]\right) .} \tag{5.19}$$

On intègre sur tous les chemins possibles $q(t)$ qui satisfont les conditions au bord $q(0) = q_i$ et $q(T) = q_f$ avec un poids $e^{iS[q]}$, où $S[q]$ est l'action classique de la particule le long du chemin.

Notons que cette préscription, quoique très compacte et élégante, est purement formelle à notre niveau de discussion. Il n'est pas du tout clair comment une mesure sur l'espace de "tous les

chemins entre q_i et q_f" pourrait être définie, si l'intégrale converge dans un certain sens, ou comment exactement il faut prendre la limite du continuum $\delta t \to 0$.

Utilité du formalisme : Ignorons pour l'instant ces problèmes conceptuels en supposant qu'il existe un moyen pour rigoureusement définir l'intégrale de chemin. On peut alors l'utiliser comme outil pour le calcul des éléments de matrice de certains produits d'opérateurs. Par exemple, insérons l'opérateur $Q(t_1)$ entre les états $|q_i\rangle$ et $\langle q_f, T|$, où t_1 est un temps intermédiaire, $0 \leq t_1 \leq T$:

$$\begin{aligned}
&\langle q_f,\, t=T|Q(t=t_1)|q_i,\, t=0\rangle \\
&= \langle q_f|e^{-iH(T-t_1)}Q(0)e^{-iHt_1}|q_i\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty}\int\prod_j \mathrm{d}q_j \langle q_f|e^{-iH\,\delta t}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-iH\,\delta t}|q_{N-2}\rangle\cdots \\
&\qquad\qquad \cdots\langle q_{k+1}|e^{-iH\,\delta t}\underbrace{Q(0)|q_k\rangle}_{q_k|q_k\rangle}\langle q_k|e^{-iH\,\delta t}|q_{k-1}\rangle\cdots\langle q_1|e^{-iH\,\delta t}|q_i\rangle \qquad (\text{avec } t_1 = k\,\delta t) \\
&= \lim_{N\to\infty}\int\prod_j \mathrm{d}q_j\; q_k\langle q_f|e^{-iH\,\delta t}|q_{N-1}\rangle\cdots\langle q_1|e^{-iH\,\delta t}|q_i\rangle \\
&= \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f}\mathcal{D}q\; q(t_1)e^{iS[q]}\,.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

De même, pour une insertion de deux opérateurs,

$$\begin{aligned}
&\int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f}\mathcal{D}q\; q(t_1)q(t_2)e^{iS[q]} \\
&= \begin{cases} \langle q_f, T|Q(t_1)Q(t_2)|q_i\rangle & \text{si } T>t_1>t_2>0 \\ \langle q_f, T|Q(t_2)Q(t_1)|q_i\rangle & \text{si } T>t_2>t_1>0 \end{cases} \\
&= \langle q_f, T|\,\mathrm{T}\,Q(t_1)Q(t_2)|q_i\rangle
\end{aligned} \tag{5.21}$$

ou pour n opérateurs :

$$\boxed{\int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f}\mathcal{D}q\; q(t_1)\ldots q(t_n)e^{iS[q]} = \langle q_f, T|\,\mathrm{T}\,Q(t_1)\ldots Q(t_n)|q_i, 0\rangle\,.} \tag{5.22}$$

L'intégrale de chemin avec des facteurs $q(t_j)$ dans l'intégrande calcule alors les insertions des produits d'opérateurs $Q(t_j)$ entre $|q_i\rangle$ et $\langle q_f, T|$ *en ordre chronologique*. Soulignons que le membre de gauche d'éq. (5.22) *n'implique que des quantités classiques* qui commutent, tandis que le membre de droite contient des opérateurs quantiques.

5.2 Fonctionnelle génératrice

Soit $J(t)$ une fonction vérifiant $\lim_{t\to\pm\infty} J(t) = 0$ dite fonction de *source*. On définit l'action en présence de la source $J(t)$ comme une fonctionnelle de $q(t)$ et de $J(t)$:

$$S_J[q] \equiv S[q, J] \equiv \int_0^T \mathrm{d}t \left(L\left(q(t), \dot{q}(t)\right) + J(t)q(t) \right). \tag{5.23}$$

L'utilité de cette définition est que la dérivée fonctionnelle [1] de S_J par rapport à J donne q :

$$\frac{\delta S_J}{\delta J(t)} = q(t)\,, \tag{5.24}$$

1. Voir l'annexe pour un rappel de sa définition.

et alors

$$\frac{\delta}{\delta J(t)} \exp\left(iS_J[q]\right) = \left(\frac{\partial}{\partial S_J} \exp(iS_J)\right) \frac{\delta S_J}{\delta J(t)} = iq(t) \exp\left(iS_J[q]\right) . \tag{5.25}$$

En prenant l'intégrale de chemin sur tous les q, on obtient l'identité

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(t)} \int \mathcal{D}q \; e^{iS_J[q]} \bigg|_{J=0} = \int \mathcal{D}q \; q(t) e^{iS[q]} \tag{5.26}$$

ou plus généralement

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(t_1)} \cdots \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(t_n)} \int\limits_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q \; e^{iS_J[q]} \bigg|_{J=0} \\ &\quad = \int\limits_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q \; q(t_1) \dots q(t_n) \, e^{iS[q]} \\ &\quad = \langle q_f, t = T | \, \mathrm{T}\, Q(t_1) \dots Q(t_n) | q_i, t = 0 \rangle \end{aligned}} \tag{5.27}$$

Ici la deuxième égalité correspondant à éq. (5.22). Si on connait une expression pour l'intégrale de chemin comme fonctionnelle de la source $\int \mathcal{D}q \, e^{iS_J[q]}$, on peut alors obtenir les éléments de matrice des produits d'opérateurs $Q(t_j)$ en ordre chronologique par les dérivées fonctionnelles par rapport aux $J(t_j)$.

5.3 Les intégrales de chemin en théorie quantique des champs

En théorie quantique des champs, on est intéressé par les fonctions de correlation

$$\langle 0 | \, \mathrm{T}\, \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$$

qui figurent dans l'expression des amplitudes de transition $\langle f | i \rangle$ selon la formule de LSZ, éq. (4.22). Il s'agît tout à fait des éléments de matrice des produits d'opérateurs (de champ) en ordre chronologique. Cependant, il faut les évaluer non pas entre deux états propres de position à $t = 0$ et $t = T$, mais plutôt dans le vide aux temps asymptotiques $|0, t \to -\infty\rangle$ et $\langle 0, t \to +\infty|$.

On va donc procéder à généraliser le formalisme de la section précédente à une théorie quantique des champs relativiste en quatre dimensions d'espace-temps. On regarde un champ scalaire réel avec des auto-interactions, paramétrés par un potentiel d'interaction $\mathcal{V}_{\mathrm{int}}$. Une source $J(x)$ est un champ non dymanique qui ne satisfait aucune équation de mouvement mais qui est traité comme donné externement. Elle vérifie $\lim_{t \to \pm\infty} J(t, \vec{x}) = 0$), voire même $J(t, \vec{x}) = 0$ pour $t \leq t_a$ et $t \geq t_b$: le champ de source est non nul que sur un intervalle fini (t_a, t_b) en temps. L'action en présence de la source est

$$S_J[\phi] = \int \mathrm{d}^4 x \, \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \mathcal{V}_{\mathrm{int}}(\phi) + J\phi \right) \tag{5.28}$$

et l'intégrale de chemin s'écrit

$$\langle \phi_f, t' | \phi_i, t \rangle_J = \int\limits_{\phi(t,\vec{x}) = \phi_i(\vec{x})}^{\phi(t',\vec{x}) = \phi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\phi \; e^{iS_J[\phi]} . \tag{5.29}$$

Le domaine d'intégration est l'ensemble de tous les chemins continus dans l'espace de configuration de ϕ qui vérifient les conditions aux bords. Comme avant, on va ignorer le problème mathématique de la définition rigoureuse de cette intégrale ; on supposera qu'elle existe et vérifie les propriétés habituelles d'une intégrale dans un nombre fini de dimensions.

L'expression de l'intégrale de chemin ci-dessus dépend évidemment du choix de la fonction $\phi_i(\vec{x})$ qui donne l'état initial au temps t et de la fonction $\phi_f(\vec{x})$ qui donne l'état final au temps t'. On va choisir des états de référence $|\phi_i, t\rangle$ et $|\phi_f, t'\rangle$ tels que leur récouvrement avec l'état fondamental aux temps asymptotiques est non nul, $\lim_{t'\to\infty}\langle\phi_f, t'|0\rangle \neq 0$ et $\lim_{t\to-\infty}\langle 0|\phi_i, t\rangle \neq 0$. Le lien entre l'intégrale de chemin d'éq. (5.29) et la fonction de correlation s'établit ensuite avec l'aide d'une observation cruciale : lorsque $t \to -\infty$ et $t' \to +\infty$, seulement les projections de $|\phi_{i,f}, \pm\infty\rangle$ sur le vide contribuent à l'intégrale de chemin.

Pour prouver cette affirmation, il faut procéder avec prudence en raison de la dépendance temporelle de l'hamiltonien, causée par la source externe $J(t, \vec{x})$. Tant que $J = 0$, pour $t \leq t_a$ et $t \geq t_b$, le hamiltonien est conservé ; on le désigne par H_0 et ses valeurs propres par E_n et on définit le zéro d'énergie par $E_0 = 0$. En revanche, pour $t_a < t < t_b$, le hamiltonien H n'est pas conservé et ses valeurs propres changeront en fonction de J (et donc en fonction de t). On insère deux ensembles complets d'états propres de H_0 dans l'expression de l'intègral de chemin, au passé et au futur distant où $J = 0$ encore :

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \int_{\phi(-T,\vec{x})=\phi_i(\vec{x})}^{\phi(+T,\vec{x})=\phi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\phi \, \exp\left(i\int_{-T}^{T} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x(\mathcal{L} + J\phi)\right) \\ = \lim_{T\to\infty} \langle\phi_f, T|\phi_i, -T\rangle_J \\ = \lim_{T\to\infty} \sum_{mn} \langle\phi_f, T|n, t_b\rangle_J \, \langle n, t_b|m, t_a\rangle_J \, \langle m, t_a|\phi_i, -T\rangle_J \, .\end{aligned} \tag{5.30}$$

Vu que la source s'annule pour $t \geq t_b$ et pour $t \leq t_a$, on a $|n, t_b\rangle = e^{iH_0(t_b-T)}|n, T\rangle$ et $|m, t_a\rangle = e^{iH_0(t_a-(-T))}|m, -T\rangle$, alors

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} \langle\phi_f, T|\phi_i, -T\rangle_J \\ &= \lim_{T\to\infty} \sum_{mn} \langle\phi_f, T|e^{-iH_0(T-t_b)}|n, T\rangle_J \, \langle n, t_b|m, t_a\rangle_J \, \langle m, -T|e^{-iH_0(T+t_a)}|\phi_i, -T\rangle_J \\ &= \lim_{T\to\infty} \sum_{mn} e^{-i(E_n+E_m)T+iE_nt_b-iE_mt_a} \langle\phi_f, T|n, T\rangle \, \langle n, t_b|m, t_a\rangle_J \, \langle m, -T|\phi_i, -T\rangle \, .\end{aligned} \tag{5.31}$$

Ici on a supprimé l'indice J sur $\langle\phi_f, T|n, T\rangle$ et $\langle m, -T|\phi_i, -T\rangle$ car la source s'annule aux temps asymptotiques.

Afin de définir l'intégrale de chemin, on donne à T une partie imaginaire $-i\epsilon T$, puis on pose $\epsilon \to 0$ *après* l'intégration (cf. la préscription analogue pour les intégrales de dimension fini avec des exposants imaginaires → exercices). Mais alors la somme double sur m et n se réduit à la contribution de l'état fondamental :

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \langle\phi_f, T|\phi_i, -T\rangle_J &= e^0 \langle\phi_f, T|0, T\rangle\langle 0, t_b|0, t_a\rangle_J\langle 0, -T|\phi_i, -T\rangle \\ &= \langle\phi_f, \infty|0, \infty\rangle\langle 0, \infty|0, -\infty\rangle_J\langle 0, -\infty|\phi_i, -\infty\rangle \, .\end{aligned} \tag{5.32}$$

La raison est que toutes les contributions à la somme de la dernière ligne de éq. (5.31) décroissent exponentiellement lorsque $|T| \to \infty$, sauf celle de l'état fondamental avec $E_0 = 0$. Dans la dernière ligne, on a utilisé que l'état fondamental ne change pas entre $t = -\infty$ et $t = t_a$ et entre $t = t_b$ et $t = +\infty$. On obtient l'expression de l'*amplitude de persistance du vide* en présence de la source J :

$$\boxed{\langle 0, \infty|0, -\infty\rangle_J = \frac{1}{N} \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left(i\int_{-T}^{T} \mathrm{d}^4x \, (\mathcal{L} + J\phi)\right) \equiv \frac{1}{N} Z[J]} \tag{5.33}$$

Ici $N = \langle\phi_f, \infty|0\rangle\langle 0|\phi_i, -\infty\rangle$ est une constante de normalisation indépendante de J ; pour que, en absence de source, $\langle 0|0\rangle = 1$, il faut que $N = Z[0]$. Si $J(x)$ est une source physique, $Z[J]/Z[0]$ donne alors l'amplitude de probabilité que, pour un système quantique qui était dans l'état fondamental dans le passé (à $T \to -\infty$, où $J = 0$) se trouvera de nouveau dans l'état fondamental dans le futur (à $T \to +\infty$, où encore $J = 0$). Voir les exercices pour un exemple en mécanique quantique.

Mais souvent on regardera la source comme une quantité auxiliaire seulement. Dans ce cas c'est la manière dont Z dépend de J qui nous donne des informations sur les fonctions de correlation, sans que la valeur de J aie une signification physique. En fait $Z[J]$ est la *fonctionnelle génératrice* des fonctions de correlation à n points, dans le sens que ces dernières sont données par les dérivées de Z à $J = 0$:

$$\boxed{\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}Z[J]\bigg|_{J=0}.} \tag{5.34}$$

Cf. la physique statistique, où la moyenne thermique d'une observable est donnée par la dérivée de la fonction de partition (la fonction génératrice), par exemple

$$\langle H\rangle \propto \frac{\partial}{\partial\beta}Z\,, \qquad Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H}\,. \tag{5.35}$$

Exemple : Fonctionnelle génératrice de la théorie libre

L'action d'un champ scalaire libre en présence d'une source J est

$$\begin{aligned}
iS_J &= i\int \mathrm{d}^4x\,\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi\right)\\
&\overset{\text{IPP}}{=} -\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\left(\phi(\Box + m^2)\phi - 2J\phi\right)\\
&\overset{\text{Fourier}}{=} \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}e^{i(p+q)x}\left(\tilde\phi(p)(q^2-m^2)\tilde\phi(q) + 2\tilde J(p)\tilde\phi(q)\right)\\
&= \frac{i}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\left(\tilde\phi(p)(p^2-m^2)\tilde\phi(-p) + 2\tilde J(p)\tilde\phi(-p)\right)\\
&= \frac{i}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\left(\left(\tilde\phi(p) + \frac{1}{p^2-m^2}\tilde J(p)\right)(p^2-m^2)\left(\tilde\phi(-p) + \frac{1}{p^2-m^2}\tilde J(-p)\right)\right.\\
&\qquad\left. - \tilde J(p)\frac{1}{p^2-m^2}\tilde J(-p)\right)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Maintenant faisons un changement de variable $\tilde\phi'(p) \equiv \tilde\phi(p) + \frac{1}{p^2-m^2}\tilde J(p)$. Notons que la mesure ne change pas, $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$, car le changement de variable revient à un ajout d'une "constante", ou plutôt d'un terme fonctionnellement indépendant de ϕ. On retrouve alors la même intégrale de chemin que pour $J = 0$ à un facteur près, et c'est ce dernier qui contient toute la dépendance de J :

$$Z[J] = \exp\left(-\frac{i}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\tilde J(p)\tilde J(-p)}{p^2-m^2}\right)\,Z[0]\,. \tag{5.37}$$

A priori l'intégrale sur p^0 est ambigüe à cause des pôles à $p^0 = \pm\sqrt{|\vec p|^2 + m^2} \equiv \pm\omega_{\vec p}$. Or, pour définir l'intégration de chemin dans $Z[J]$, nous avions remplacé $t \to t(1-i\epsilon)$. En espace de Fourier, ce remplacement correspond à $p^0 \to p^0(1+i\epsilon)$, ce qui est la prescription de Feynman, évitant le pôle à $-\omega_{\vec p}$ au-dessous et celui à $+\omega_{\vec p}$ au-dessus. Alors en fait on a

$$Z[J] = \exp\left(-\frac{i}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\tilde J(p)\tilde J(-p)}{p^2-m^2+i\epsilon}\right)\,Z[0]\,. \tag{5.38}$$

Après inversion de la transformation de Fourier, on obtient enfin la *fonctionnelle génératrice pour un champ scalaire libre* :

$$\boxed{Z[J] = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\int\mathrm{d}^4y\,J(x)D_F(x-y)J(y)\right)\,Z[0]} \tag{5.39}$$

avec l'expression de D_F donnée comme avant (voir éq. (3.46)),

$$D_F(x-y) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)}\,. \tag{5.40}$$

Fonctions de correlation d'un champ scalaire libre

Ensuite on va utiliser ce résultat pour retrouver la fonction de correlation à deux points dans la théorie libre. On sait déjà, d'après le formalisme de la quantification canonique, que le résultat doit être le propagateur de Feynman. Selon éq. (5.34), il faut prendre la dérivée seconde de la fonctionnelle génératrice pour trouver la fonction à deux points :

$$\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z\bigg|_{J=0} = D_F(x_1-x_2)\,. \tag{5.41}$$

On a donc retrouvé l'ancien résultat du chapitre 3.4, comme on pouvait s'attendre : la fonction à deux points de la théorie libre est le propagateur de Feynman.

Les fonctions de correlation de plus que deux champs sont zéro ou se réduisent aux produits symétrisés de propagateurs de Feynman. Par exemple, avec éqs. (5.34) et (5.39), on trouve pour la fonction à trois points

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle \\ &\quad= \left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y\, J(x)\, D_F(x-y)\, J(y)\right)\bigg|_{J=0} \\ &\quad= 0\,.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Le résultat s'annule car l'exponentielle est paire en J, sa dérivée troisième est alors impaire et s'annule à $J=0$. Le même raisonnement s'applique pour toutes les autres fonctions à $n=(2m+1)$ points :

$$\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_{2m+1})|0\rangle = 0\,. \tag{5.43}$$

En conclusion, toutes les fonctions de correlation impliquant un nombre impair de champs sont zéro dans la théorie libre.

Pour calculer la fonction à quatre points, développons l'exponentielle dans la fonctionnelle génératrice. La seule contribution vient des termes avec exactement quatre facteurs de J (car, si on prend la dérivée quatrième fonctionnelle, les termes avec moins que quatre facteurs de J s'annulent ; et les termes avec plus que quatre facteurs s'annuleront à $J=0$). On trouve ainsi

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle \\ &\quad= D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)\,.\end{aligned} \tag{5.44}$$

Similairement, on peut déduire un résultat géneral pour la fonction à $(2n)$ points dans la théorie libre. Il est connu sous le nom du *théorème de Wick* :

$$\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_{2n})|0\rangle = \sum_{\text{appariements}} D_F(x_{i_1}-x_{i_2})\cdots D_F(x_{i_{2n-1}}-x_{i_{2n}})\,. \tag{5.45}$$

Il n'est pas difficile d'obtenir les (mêmes) fonctions de correlation de la théorie libre par le formalisme alternatif de la quantification canonique. On ne détaillera pas la procédure ici, mais elle se trouve dans quasiment tous les livres sur la TQC.

Convergence et prolongement analytique

On termine avec quelques remarques, toujours plutôt heuristiques, sur la convergence des intégrales de chemin. On les a introduites avec un poids exponentiel $e^{iS[\phi]}$ dont l'exposant est purement imaginaire. Pour les définir, il a donc fallu donner une petite partie imaginaire au paramètre t, de manière équivalente que pour la définition d'une intégrale de Gauss avec un exposant purement imaginaire (ou intégrale de Fresnel) dans un nombre fini de dimensions. Explicitement : on sépare les parties positives et négatives de S,

$$S = S_{\text{pos}} + S_{\text{neg}}\,, \qquad S_{\text{pos}} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,\frac{\dot\phi^2}{2}\,, \quad S_{\text{neg}} = -\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,\left(\frac{(\vec\nabla\phi)^2}{2} + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)\right) \tag{5.46}$$

(en supposant que $\mathcal{V}_{\text{int}}$ possède une borne inférieure, et sera donc positif au moins après ajout d'une constante). Avec $t \to t(1-i\epsilon)$, on a $\mathrm{d}t \to (1-i\epsilon)\,\mathrm{d}t$ et $\dot\phi^2 \to (1-i\epsilon)^{-2}\dot\phi^2$, et donc au premier ordre en ϵ

$$iS_{\text{pos}} \to (i-\epsilon)S_{\text{pos}}\,, \qquad iS_{\text{neg}} \to (i+\epsilon)S_{\text{neg}}\,. \tag{5.47}$$

Par conséquent, $\mathrm{Re}(iS)$ est exponentiellement décroissant lorsque $||\phi|| \to \infty$ (cf. exercices pour les intégrales gaussiennes en dimension finie) et on peut s'attendre que l'intégrale converge.

Pas à pas, la procédure que l'on suit pour évaluer ces intégrales est :

1. on intègre dans le plan de t complexe avec la courbe d'intégration légérement penchée par rapport à l'axe réelle, $t \to t(1-i\epsilon)$, pour obtenir une décroissance exponentielle de l'intégrande à l'infini,
2. on évalue l'intégrale sur t et, en fonction de celle-ci, l'intégrale de chemin
3. on laisse tendre $\epsilon \to 0$ (mais en pratique, rien ne dépendra de la valeur précise de ϵ).

En fait, le paramètre ϵ ne doit pas forcément être infinitésimal ; on obtient le même résultat avec une déformation plutôt conséquente du chemin d'intégration :

1. on intègre dans le plan de t complexe avec la courbe d'intégration tournée par 90° par rapport à l'axe réelle, $t \to \tau \equiv -it$, $\partial_t \to \partial_\tau = i\partial_t$, $\mathrm{d}t \to \mathrm{d}\tau = -i\,\mathrm{d}t$
2. on évalue l'intégrale et l'intégrale de chemin,
3. on inverse la rotation si nécessaire.

Cette dernière procédure s'appelle une *rotation de Wick*. Elle donne le résultat correct, pourvu que, lors de la rotation de la courbe d'intégration dans le plan complexe, on ne *croise pas pas de pôles* de l'intégrande.

Un exemple qui nous intéressera plus tard est l'intégrale suivante, calculée avec une rotation de Wick :

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(p^2-\Delta^2+i\epsilon)^n} \overset{p^0\to ip^0}{\to} i\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(-(p^0)^2-\vec p^{\,2}-\Delta^2)^n} \\
&\quad = \frac{i}{(2\pi)^4}(-1)^n\int_0^\infty \mathrm{d}|p|\,\frac{2\pi^2|p|^3}{(|p|^2+\Delta^2)^n} \\
&\quad = (-1)^n\frac{i}{16\pi^2}\,\frac{1}{(n-1)(n-2)}\Delta^{4-2n} \qquad (n>2)\,.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Dans l'intégrale de chemin, la rotation de Wick $t \to \tau$ donne lieu à ce qu'on appelle l'*intégrale de chemin euclidéenne*

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_E[\phi]}\,, \qquad S_E = \int \mathrm{d}^4x_E\,\left(\frac{1}{2}(\partial_\tau\phi)^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{m^2}{2}\phi^2+\mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)\right)\,.$$

L'intégrale de chemin euclidéenne est *mieux définie* (car l'exposant est réel, donc l'intégrande est exponentiellement décroissante lorsque $\|\phi\| \to \infty$) et souvent *plus facile à évaluer* : on peut se servir de l'approximation du point col ($\to$ exercices) ou des méthodes numériques comme de la TQC sur réseau. En plus, la rotation de Wick fait le lien entre des notions importantes liés en physique quantique et en physique statistique :

physique quantique	physique statistique
intégrale de chemin	intégrale de chemin euclidéenne
équation de Schrödinger $i\partial_t\psi = -\frac{1}{2m}\Delta\psi$	équation de diffusion $\partial_t u = D\,\Delta u$
opérateur d'évolution e^{iHt}	facteur de Boltzmann $e^{-\beta H}$
fluctuation quantique	fluctuation thermique
fonctionnelle génératrice Z	fonction de partition Z
potentiel effectif	énergie libre

Chapitre 6

Théorie des perturbations et diagrammes de Feynman

6.1 Fonctionnelle génératrice et diagrammes de Feynman

Dans ce chapitre on étudiera la *théorie* ϕ^4, un simple exemple d'une théorie avec interactions. Il s'agit d'une théorie d'un champ scalaire réel avec le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}(m^2 + \delta_{m^2}) Z \phi^2 - \frac{\lambda + \delta_\lambda}{24} Z^2 \phi^4 \,. \tag{6.1}$$

Le dernier terme est le terme d'interaction. Cette façon de paramétrer $\mathcal{L}$ prend en compte le fait que, dans une théorie avec interactions, il n'y a pas de relation simple entre les coefficients des différents termes du lagrangien et les observables physiques. Par exemple, le carré de la masse de la particule m^2 n'est pas le coefficient du terme quadratique en ϕ. De plus, si on définit le "couplage physique" λ par une certaine section efficace de diffusion, voir plus tard, ce λ ne correspond pas au coefficient du terme quartique, sauf au premier ordre en théorie des perturbations. Enfin, pour que $a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$ soit bien normalisé sur des états à une particule, il faut prendre $Z \neq 1$ en présence des interactions, comme on a vu lors de la dérivation de la formule LSZ.

Les paramètres Z, δ_m^2 et δ_λ sont donc déterminés implicitement par les conditions que m soit la masse physique de la particule, λ soit le couplage physique et $a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$ soit bien normalisé. Dans la limite d'une théorie sans interactions $\lambda \to 0$, on aura $Z \to 1$, $\delta_{m^2} \to 0$, et $\delta_\lambda \to 0$. En fait on trouvera que $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$, $\delta_{m^2} = \mathcal{O}(\lambda)$ et $\delta_\lambda = \mathcal{O}(\lambda^2)$.

Cependant, pour l'instant on va poser $Z = 1$, $\delta_{m^2} = 0$, $\delta_\lambda = 0$ afin d'alléger la notation :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi) \,, \qquad \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi) = \frac{\lambda}{24} \phi^4 \,. \tag{6.2}$$

Par conséquent, dans le reste de cette section, m et λ *ne correspondront pas à la masse et au couplage physique* et le champ ϕ *ne sera pas correctement normalisé*. On va revisiter ce point dans section 6.3. Notre objectif sera de construire les fonctions à n points sous forme de série entière en λ, par analogie avec le formalisme de la théorie des perturbations en mécanique quantique.

On rappelle l'expression de la fonctionnelle génératrice :

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int (\mathcal{L} + J\phi) \right) . \tag{6.3}$$

Observons encore que

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} e^{i \int J\phi} = \phi e^{i \int J\phi} \tag{6.4}$$

et plus généralement, pour une fonction ou fonctionnelle f quelconque dont l'action sur des opérateurs différentiels est définie par sa série de Taylor,

$$f\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right) e^{i\int J\phi} = f(\phi) e^{i\int J\phi}\,. \tag{6.5}$$

La théorie ϕ^4 doit son nom au terme dans le lagrangien $\mathcal{V}_{\text{int}}(\phi) = \frac{\lambda}{24}\phi^4$ dit *potentiel d'interaction*. Selon l'identité ci-dessus, on peut remplacer le $\phi(x)$ dans $\mathcal{V}_{\text{int}}$ par l'opérateur différentiel $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}$ dans le produit avec $e^{i\int J\phi}$, alors on a

$$\exp\left(-i\int \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)\right)\exp\left(i\int J\phi\right) = \exp\left(-i\int \mathcal{V}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right)\exp\left(i\int J\phi\right) \tag{6.6}$$

ou bien, après multiplication avec l'exponentielle de l'action libre et intégration de chemin sur ϕ,

$$Z[J] = \exp\left(-i\int \mathcal{V}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right)\underbrace{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i\int\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi\right)\right)}_{Z_0[J]}, \tag{6.7}$$

où $Z_0[J]$ est la fonctionnelle génératrice de la théorie libre sans interactions. En résumé :

$$\boxed{Z[J] = \exp\left(-i\int \mathcal{V}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right) Z_0[J]\,.} \tag{6.8}$$

Rappelons maintenant que $Z_0[J]$ est donné par éq. (5.39),

$$Z_0[J] = Z_0[0]\exp\left(-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\, J(x)D_F(x-y)J(y)\right)\,. \tag{6.9}$$

On insère l'expression de $\mathcal{V}_{\text{int}}$ et on substitue les séries de Taylor des exponentielles :

$$Z[J] = Z_0[0]\sum_{V=0}^{\infty}\frac{1}{V!}\left(-\frac{i\lambda}{24}\int \mathrm{d}^4z\frac{\delta^4}{\delta J(z)^4}\right)^V \sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P!}\left(-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\, J(x)D_F(x-y)J(y)\right)^P\,. \tag{6.10}$$

Cette expression pour la fonctionnelle génératrice semble compliquée, mais il se trouve qu'il y a une simple manière de représenter chacun des termes dans le développement de la somme double par un diagramme, ce qui facilite largement son évaluation.

Regardons un terme générique T dans le développement d'éq. (6.10),

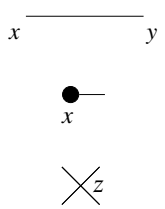
$$\frac{Z[J]}{Z_0[0]} = \ldots + \underbrace{\frac{1}{V!\times 24\times P!\times 2^P}\left(-i\lambda\int \mathrm{d}^4z\frac{\delta^4}{\delta J(z)^4}\right)^V\left(\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,(iJ(x))D_F(x-y)(iJ(y))\right)^P}_{\equiv T} + \ldots \tag{6.11}$$

Notons qu'il contient P facteurs de D_F et $4V$ dérivées $\delta/\delta J$, et que chaque D_F est associé à deux facteurs de J. Après application des $4V$ dérivées, il y restent donc $E = 2P - 4V$ facteurs de J. Le terme T pourra alors contribuer à la fonction de correlation à E points (car celle-ci est obtenue en prenant encore E dérivées fonctionnelles de Z par rapport à J, avant de poser $J = 0$).

Les différentes façons de répartir les dérivées $\delta/\delta J$ entre les sources J peuvent être encodées par des graphes appelés *diagrammes de Feynman*. On écrit

$$T = \sum_{\text{topologies}}\frac{D}{S(D)} \tag{6.12}$$

où le *facteur de symétrie* $S(D)$ est un nombre entier et le diagramme de Feynman D représente l'intégrale d'un produit de facteurs D_F, iJ et $-i\lambda$. Il se compose des éléments graphiques



propagateur $D_F(x-y)$ (P au total)

source externe $\int \mathrm{d}^4x\, iJ(x)$ (E au total)

vertex $-i\lambda \int \mathrm{d}^4z$ (V au total)

Pour explication : chaque extrémité d'une ligne (représentant un propagateur de Feynman) doit être attachée soit à un point noir (représentant un facteur de $J(x)$ qui n'a pas été supprimé par un des $\delta/\delta J(z)$) soit à un vertex (représentant un facteur de J qui a été supprimé par une des dérivées, auquel cas il y a trois autres $J(z)$ du même z qui ont également été supprimés, et alors trois autres extrémités de propagateurs attachés au même vertex).

Exemples :

$E=0 \quad V=1$

$E=2 \quad V=0$

$E=2 \quad V=1$

$E=2 \quad V=2$

$E=4 \quad V=0$

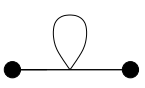
$E=4 \quad V=1$

$E=4 \quad V=2$ + diagrammes déconnexes

Pour obtenir le facteur de symétrie $S(D)$ par lequel il faut pondérer le diagramme d'une topologie donnée, il faut compter le nombre de façons équivalentes de repartir les dérivées $\delta/\delta J$ entre les sources J dans T. Il se trouve que le facteur combinatoire résultant va supprimer le dénominateur $V!\times 24\times P!\times 2^P$ dans l'expression de T, voir éq. (6.11), sauf pour un entier $S(D)$ qui est déterminé par la symétrie du diagramme. Plus précisement, il est donné par le nombre de possibles permutations des extremités de propagateur équivalentes, des propagateurs équivalents, des vertices équivalents ou d'une combinaison d'entre eux qui ne changent pas la topologie du diagramme.

Exemples :

Le diagramme



$$= \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4z\, iJ(x)\, D_F(x-z)\, (-i\lambda)\, D_F(z-z)\, D_F(z-y)\, iJ(y)$$

a $S=2\times 2=4$: échanger les deux extremités du propagateur interne donne le même diagramme. De même pour un échange simultané des deux propagateurs externes (connectés aux sources) et des deux sources. Explicitement, ici $V=1$, $E=2$ et $P=3$, alors $V!\times 24\times P!\times 2^P = 1152$, mais un calcul direct montre que $\left(-i\lambda\int \mathrm{d}^4z \frac{\delta^4}{\delta J(z)^4}\right)\left(\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, (iJ(x))D_F(x-y)(iJ(y))\right)^3$ ne contient

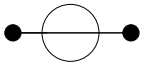
que 288-fois l'expression du diagramme. Ce calcul confirme donc que $S = 1152/288 = 4$.

Le diagramme



a $S = 8 : 2$ (échanger les extremités du propagateur à gauche) $\times 2$ (échanger les extremités du propagateur à droite) $\times 2$ (échanger le propagateur à gauche avec celui à droite).

Le diagramme



a $S = 2 \times 3! = 12$ dont 3! pour une permutation des propagateurs internes et 2 pour échanger à la fois toutes les extrémités des propagateurs internes, les sources et les propagateurs externes.

La conclusion finale est que $Z[J]$ peut s'écrire comme une somme de diagrammes de Feynman, chacun pondéré avec son facteur de symétrie S :

$$\boxed{Z[J] = Z_0[0] \sum_{\text{topologies}} (\text{diagramme } D) \;/\; (\text{facteur de symétrie } S(D))\,.} \tag{6.13}$$

Diagrammes connexes

Un diagramme D s'appelle *connexe* si on peut relier tout point du diagramme à tout autre par un chemin continu. Un diagramme D général est le produit de sous-diagrammes connexes. Pour déterminer le facteur de symétrie de D, on écrit C_I pour l'expression du I-ème sous-diagramme connexe divisé par son propre facteur symétrie ; on a donc

$$\frac{D}{S(D)} = \frac{1}{S_D} \prod_I (C_I)^{n_I} \tag{6.14}$$

où S_D est la partie du facteur de symétrie de D qui n'a pas encore été pris en compte dans les C_I. Il est donné par

$$S_D = \prod_I n_I! \tag{6.15}$$

(venant des permutations des sous-diagrammes connexes de la même topologie). Donc

$$Z[J] = \sum_{\{n_I\}} \frac{D}{S(D)} = \sum_{\{n_I\}} \prod_I \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I} = \prod_I \sum_{n_I=0}^{\infty} \frac{(C_I)^{n_I}}{n_I!} = \prod_I \exp(C_I) = \exp\left(\sum_I C_I\right)\,. \tag{6.16}$$

En conclusion, $Z[J]$ est donné par la somme de tous les diagrammes pondérés, mais cette dernière est encore donnée par l'*exponentielle* de la somme des diagrammes *connexes* pondérés.

Notons maintenant que les fonctions de correlation ne dépendent que de $Z[J]/Z[0]$, et donc la normalisation de $Z[J]$ peut être choisie librement. Pour la suite, on adoptera la normalisation

$$Z[0] = 1 \tag{6.17}$$

en posant

$$Z[J] = e^{iW[J]} \tag{6.18}$$

où

$$iW[J] = \sum_{\substack{\text{diagrammes} \\ \text{connexes,} \\ E \neq 0}} C_I\,. \tag{6.19}$$

Avec cette normalisation, les *diagrammes de vide* où $E = 0$ sont exclus de la somme, alors $W[0] = 0$. Z est la fonctionnelle génératrice des fonctions de correlation ; $iW = \log Z$ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de correlation dites *connexes*.

6.2 Les règles de Feynman pour la théorie ϕ^4

Pour le calcul des fonctions de correlation à n points $\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle$, on note que l'action de la dérivée fonctionnelle

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_k)}$$

sur un diagramme de Feynman *supprime un facteur iJ* et *associe à l'extrémité du propagateur où J était attaché le point x_k*.

Fonction à un point

Dans la dérivation de la formule de LSZ, on avait demandé que le champ (potentiellement après une rédéfinition) vérifie la condition

$$\langle 0|\phi(x_1)|0\rangle \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{6.20}$$

Ici la fonction à un point peut se calculer comme

$$\langle 0|\phi(x_1)|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}Z[J]\bigg|_{J=0}\,. \tag{6.21}$$

La seule contribution à la fonction à un point pourrait venir des diagrammes avec $E=1$, mais il n'y en a pas dans $Z[J]$ pour la théorie ϕ^4. Donc en fait

$$\langle 0|\phi(x_1)|0\rangle = 0 \tag{6.22}$$

est déjà vérifié sans que aucune rédéfinition soit nécessaire ; il s'agît d'une conséquence du fait que le lagrangien est pair en ϕ, et donc symétrique par $\phi \to -\phi$. (On remarque que, si cette symétrie est *spontanément brisée* à cause d'un paramètre de masse $m^2 < 0$, cette conclusion n'est plus valide.)

Fonction à deux points

Essayons de calculer la fonction à deux points. On a

$$\begin{aligned}
\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle &= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}Z[J]\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}iW[J]\bigg|_{J=0} + \underbrace{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}iW[J]}_{=0}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}iW[J]\bigg|_{J=0} \\
&= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\,iW[J]\bigg|_{J=0} \\
&= \sum \left(\begin{smallmatrix}\text{diagrammes connexes avec } E{=}2\text{, sources}\\ \text{enlevées et avec ses extrémités à } x_1 \text{ et } x_2\end{smallmatrix}\right)\,.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

À l'ordre λ^0,

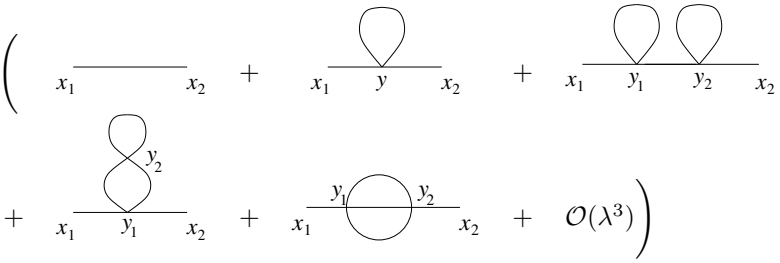
$$\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \quad x_1\overline{\qquad}x_2 \quad + \quad x_2\overline{\qquad}x_1 \quad + \mathcal{O}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}D_F(x_1-x_2) + \frac{1}{2}D_F(x_2-x_1) + \mathcal{O}(\lambda) \\
&= D_F(x_1-x_2) + \mathcal{O}(\lambda)\,.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Les facteurs $\frac{1}{2}$ proviennent des facteurs de symétrie qu'on a intégrè ici dans la définition du diagramme de Feynman. Le résultat au "0-ème" ordre est donc celui pour un champ scalaire libre (comme attendu, car dans la limite $\lambda \to 0$ il faut retrouver la théorie libre).

Pour les corrections jusqu'à $\mathcal{O}(\lambda^2)$, on trouve

$\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle =$ 2 (



)

$$
\begin{aligned}
&= D_F(x_1-x_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4y\, D_F(x_1-y)(-i\lambda)D_F(y-y)D_F(y-x_2) \\
&\quad + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4y_1\,\mathrm{d}^4y_2\, D_F(x_1-y_1)(-i\lambda)D_F(y_1-y_1)D_F(y_1-y_2)(-i\lambda)D_F(y_2-y_2)D_F(y_2-x_2) \\
&\quad + \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4y_1\,\mathrm{d}^4y_2\, D_F(x_1-y_1)(-i\lambda)D_F(y_1-y_2)(-i\lambda)D_F(y_2-y_2)D_F(y_2-y_1)D_F(y_1-x_2) \\
&\quad + \frac{1}{6}\int \mathrm{d}^4y_1\,\mathrm{d}^4y_2\, D_F(x_1-y_1)(-i\lambda)D_F(y_1-y_2)D_F(y_1-y_2)D_F(y_1-y_2)(-i\lambda)D_F(y_2-x_2) \\
&\quad + \mathcal{O}(\lambda^3)
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

Dans la première ligne, le facteur 2 devant la parenthèse vient de $x_1 \leftrightarrow x_2$. Les facteurs devant les intégrales viennent des facteurs de symétrie résiduels. On retournera sous peu vers l'évaluation de cette expression, mais regardons d'abord le cas général :

Fonction à n points

On peut traiter des diagrammes générales dans la même façon. Chaque vertex apporte un facteur $(-i\lambda)\int \mathrm{d}y$, chaque propagateur un facteur D_F. En résumé, on obtient les *régles de Feynman dans l'espace des positions* pour retraduire les diagrammes en expressions algébriques :

1. Pour chaque point externe,  $= 1$
2. Pour chaque propagateur, $= D_F(x-y)$
3. Pour chaque vertex,  $= (-i\lambda)\int \mathrm{d}^4z$
4. Diviser par le facteur de symétrie.

Les calculs sont souvent plus simples dans l'espace des impulsions. On rappelle l'expression de D_F et sa transformée de Fourier :

$$
D_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)} \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\,. \tag{6.26}
$$

Alors, dans l'espace des impulsions, chaque propagateur est associé à une impulsion p. Pour un vertex avec des impulsions entrantes $p_{1,2,3,4}$, on a

$$
(-i\lambda)\int \mathrm{d}^4z\, e^{-ip_1z}e^{-ip_2z}e^{-ip_3z}e^{-ip_4z} = (-i\lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3+p_4) \tag{6.27}
$$

et donc *l'impulsion est conservée à chaque vertex*. On obtient ainsi les *régles de Feynman dans l'espace des impulsions*

1. Pour chaque point externe,  $= e^{-ipx}$

2. Pour chaque propagateur, $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
3. Pour chaque vertex,  $= (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$
4. Intégrer toutes les impulsions.
5. Diviser par le facteur de symétrie.

ou plus pratiquement

3. Pour chaque vertex,  $= -i\lambda$

4.a Imposer la conservation des impulsions à chaque vertex.

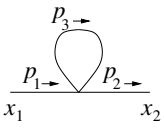
4.b Intégrer toutes les impulsions pas encore déterminées.

5. Diviser par le facteur de symétrie.

Dans la litterature, les diagrammes de Feynman que l'on rencontre le plus souvent ont déjà les *sources supprimées*, c.-à-d. un diagramme ne représente pas à un terme dans la fonctionnelle génératrice comme les diagrammes de section 6.1, mais plutôt un terme dans la fonction de correlation comme ceux de section 6.2. Les facteurs de symétrie sont définis de manière correspondante : comme on a vu ci-dessus, si on remplace des sources externes (indiscernables) par des points d'espace-temps x_k distincts, le facteur de symétrie est réduit.

Tentative d'exemple : La correction $\mathcal{O}(\lambda)$ à la fonction à deux points

On va maintenant essayer d'appliquer les règles de Feynman au calcul du diagramme



$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_1 x} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2) \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_2 x_2} \\
&= -\frac{\lambda}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x_1 - x_2)} \frac{1}{(p_1^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \int \frac{\mathrm{d}^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon}
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

Pour évaluer l'intégrale de p_3, on effectue une rotation de Wick et on transforme aux coordonnées sphériques :

$$
\int \frac{\mathrm{d}^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{8\pi} \int_0^\infty \frac{|p|^3}{|p|^2 + m^2} d|p| \,. \tag{6.29}
$$

Mais cette intégrale n'existe pas comme intégrale impropre (la primitive diverge comme $\sim |p|^2$ lorsque $|p| \to \infty$, *divergence quadratique*) ! Il paraît que la correction à la fonction à deux points à l'ordre λ est en fait infinie. On est tombé sur une complication importante, omniprésente dans la théorie des perturbations : avant d'obtenir des résultats physiquement raisonnables, il faut *renormaliser* la théorie, voir ci-dessous dans section 6.3.

Résumé provisoire : Calcul des observables en théorie de perturbations

Pour calculer la section efficace pour un processus $n \to m$:

1. On calcule et on additionne tous les diagrammes de Feynman avec $n + m$ pattes externes jusqu'à un ordre fixe en λ pour obtenir la fonction à $n+m$ points $\langle 0| \,\mathrm{T}\, \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+m}) |0\rangle$.

(Si quelques-uns des diagrammes divergent, il faut d'abord renormaliser la théorie, voir section 6.3.)

2. On choisit les paramètres libres du lagrangien de la sorte que les prérequis pour notre dérivation de la formule de LSZ sont remplis. Cette étape est étroitement liée avec la renormalisation, voir section 6.3 également.
3. Ainsi on obtient l'amplitude de transition $\langle f|i\rangle$ par la formule LSZ. Pour plus de détails, voir chapitre 7.
4. Enfin on obtient la section efficace en prenant compte des facteurs cinématiques, voir aussi chapitre 7.

6.3 Un premier regard à la renormalisation

Un propriété générale de toute théorie quantique des champs raisonnable est que la fonction à deux points admet une *représentation spectrale* (pour une discussion approfondie, voir p.ex. le livre de Weinberg) :

$$\int \mathrm{d}^4x\ \langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x)\phi(0)|0\rangle e^{ipx} = \frac{iZ}{p^2-m^2} + (\text{termes réguliers à } p^2=m^2)\,. \tag{6.30}$$

Ici m est l'énergie au repos du premier état excité, soit la masse de la particule. Autrement dit, la transformée de Fourier de la fonction à deux points possède un pole simple à $p^2 = m^2$. Par exemple, dans la théorie libre,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2\,, \tag{6.31}$$

l'expression du propagateur de Feynman dans l'espace des impulsions est

$$\int \mathrm{d}^4x\ \langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x)\phi(0)|0\rangle e^{ipx} = \frac{i}{p^2-m_0^2} \tag{6.32}$$

ce qui est bien de la forme d'éq. (6.30), avec $m = m_0$, $Z = 1$ et les "termes réguliers" zéro. Plus généralement, $Z = |\langle 1_0|\phi(0)|0\rangle|^2$ s'appelle la *constante de renormalisation de la fonction d'onde* ; elle est donnée par le résidu au pôle au facteur i près ($\langle 1_0|$ étant un état à une particule au repos).

Rappelons qu'on avait dérivé la formule de LSZ Eq. (4.22) pour des états incidents et émergents avec $p^2 = m^2$ ("sur couche de masse") et $Z = 1$, tel que $\langle k|\phi(x)|0\rangle = e^{ikx}$. Or, pour la théorie ϕ^4,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 - \frac{\lambda_0}{24}\phi^4\,, \tag{6.33}$$

on trouve $Z \neq 1$ et $m \neq m_0$; en plus λ_0 ne peut pas être identifié avec le couplage physique λ. Si on souhaite tout de même écrire le lagrangien en fonction des quantités physiques m et λ et d'un champ scalaire qui est normalisé comme un champ libre, il faut compenser la différence par des termes supplémentaires.

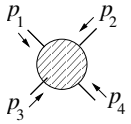
Explicitement, après les redéfinitions

$$\phi \to \frac{\phi}{\sqrt{Z}} \equiv \phi_r\,, \quad m_0^2 \equiv \frac{1}{Z}(m^2+\delta_{m^2})\,, \quad \lambda_0 \equiv \frac{1}{Z^2}(\lambda+\delta_\lambda) \tag{6.34}$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{Z}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}Z\,m_0^2\,\phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{24}Z^2\phi_r^4 \\
&= \frac{Z}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m^2\,\phi_r^2 - \frac{\lambda}{24}\phi_r^4 - \frac{1}{2}\delta_{m^2}\phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{24}\phi_r^4 \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m^2\,\phi_r^2 - \frac{\lambda}{24}\phi_r^4 \\
&\qquad + \frac{1}{2}\delta_Z\,\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}\delta_{m^2}\phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{24}\phi_r^4
\end{aligned} \tag{6.35}$$

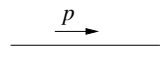
où $\delta_Z \equiv Z - 1$. Ici les *contre-termes* δ_Z, δ_{m^2}, δ_λ doivent être choisis tel que le pôle du propagateur est à $p^2 = m^2$ avec résidu i et tel que le couplage λ est le couplage physique. [1] Ce dernier est défini par l'amplitude de transition à quatre points dans la limite cinématique où toutes les particules incidentes/émergentes sont au repos :



$\to \; -i\lambda \qquad (p_i \to (m, \vec{0}))\,.$

Il semble évident de regarder les contre-termes dans la dernière ligne d'éq. (6.35) comme des termes supplémentaires qu'on aurait ajouté au lagrangien d'origine, mais ce n'est pas l'interprétation correcte. Il s'agît plutôt d'une écriture alternative du même lagrangien en utilisant un paramétrage différent. Les premiers trois termes sont le lagrangien de départ, mais avec le champ ϕ remplacé par un champ ϕ_r de normalisation différente, et avec les paramètres physiques m^2 et λ comme coefficients dans le potentiel. Vu que ce lagrangien n'est pas celui d'origine, il faut encore ajouter la différence sous forme de contre-termes qui, à ce stade, sont définis implicitement.

De l'expression du lagrangien Eq. (6.35), on obtient des nouvelles règles de Feynman avec deux nouveaux vertex à deux et à quatre points pour les contre-termes. Dans l'espace des impulsions, on obtient :

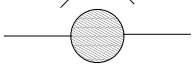
1. Propagateur :  $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

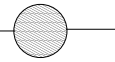
2. Vertex :  $= -i\lambda$
3. Contre-terme à deux points :  $= i(p^2\delta_Z - \delta_{m^2})$

4. Contre-terme de vertex :  $= -i\delta_\lambda$

Tout diagramme de Feynman doit maintenant être construit avec ces nouvelles règles, les *règles de Feynman en théorie des perturbations renormalisée*. Pour plus de détails, notamment sur δ_Z et δ_{m^2}, voir les exercices.

La procédure pour le calcul des amplitudes de transition est alors :

1. Calculer les corrections au propagateur et au vertex à un certain ordre en λ, en utilisant les règles de Feynman modifiées. Le résultat sont deux fonctions de λ, m^2, δ_{m^2}, δ_λ, δ_Z et des impulsions externes.
2. Fixer les valeurs de δ_{m^2}, δ_λ, δ_Z avec les *conditions de renormalisation* :
 $= -i\lambda \qquad$ à $p_i = (m, \vec{0})$
 $= \frac{i}{p^2 - m^2}$ + termes réguliers $\qquad$ (deux conditions : pôle et résidu)
3. Une fois les contre-termes connus, on peut calculer une fonction à n points avec n quelconque pour une configuration cinématique quelconque. Avec la formule de LSZ on en obtient l'expression de l'amplitude.

Problème : Comme on l'avait déjà remarqué en essayant de calculer la fonction à deux points à l'ordre λ, le résultat que l'on trouve aux ordres supérieures pour , et en fait aussi pour , est donné par des intégrales impropres *divergentes* dans l'ultraviolet, c.-à-d. quand les impulsions des particules virtuelles dans la boucle tendent vers l'infini.

1. Cette définition de contre-termes, où *schéma de soustraction*, est le plus utile pour le calcul des amplitudes de diffusion avec la formule de LSZ. Cependant parfois d'autres schèmes de soustraction sont plus convenients même si la relation avec les amplitudes physiques est plus compliquée.

Solution :

1. *Régularisation.* Trouver une façon "intelligente" d'écrire ces intégrales comme

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\text{une fonction qui diverge lorsque } \epsilon \to 0) .$$

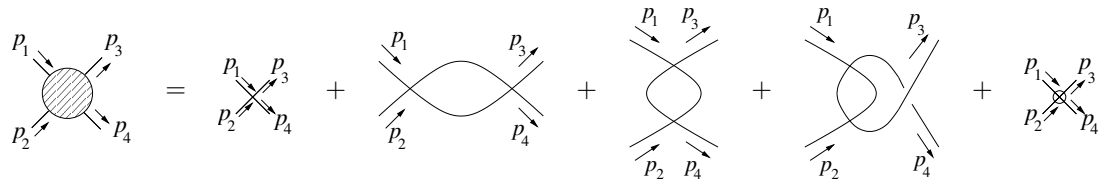
   Il n'y a pas de préscription universelle ni de définition précise de ce qui constitue une régularisation "intelligente". Au moins le régulateur devrait conserver toutes les symétries de la théorie. Idéalement il affectera seulement la physique dans l'ultraviolet, l'objectif de la procédure étant de cacher notre ignorance de la physique microscopique à courtes distances.
2. *Renormalisation.* Absorber les divergences dans les expressions des contre-termes, non observables.
3. Ensuite, toutes les observables physiques ne devraient plus dépendre de ϵ et, en particulier, rester finies lorsque $\epsilon \to 0$.

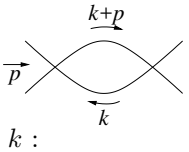
Si cette procédure peut être effectuée, on dit que la théorie est *renormalisable*.

Pour un développement cohérent : on compte le nombre de *boucles* plutôt que les puissances de λ (car ces dernières dépendent du nombre de particules externes n, p.ex. la fonction à deux/quatre/six points au premier ordre est $\mathcal{O}(\lambda^0)/\mathcal{O}(\lambda)/\mathcal{O}(\lambda^2)$). Ainsi, la correction du $(k+1)$-ème ordre en théorie des perturbations à un processus quelconque est donnée par les diagrammes de Feymnan connexes à k boucles. En particulier, le premier ordre correspond aux diagrammes sans boucles dits "diagrammes d'arbre".

Exemple : Renormalisation de la théorie ϕ^4 à une boucle

On va expliciter cette procédure en calculant les contre-termes pour la théorie ϕ^4 au premier ordre au-delà du niveau de l'arbre, c.-à-d. à une boucle. On commence avec la renormalisation du **vertex**. Avec des diagrammes de Feynman *amputés* (sans compter les propagateurs externes, qui sont tracés ici seulement pour indiquer comment les impulsions externes $p_1 \dots p_4$ rentrent dans le diagramme), on a



On calcule d'abord  où $p \equiv p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Selon les règles de Feynman, il faut intégrer l'impulsion k :

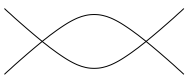
$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} . \tag{6.36}$$

L'*astuce de Feynman* permet de combiner les dénominateurs (voir exercices) :

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2))} = \int \mathrm{d}x \frac{1}{(k^2 + 2x\, kp + x\, p^2 - m^2)^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)\, p^2 - m^2)^2} \tag{6.37}$$

avec $\ell \equiv k + x\, p$ (et donc $\mathrm{d}^4 k = \mathrm{d}^4 \ell$). Puisque l'intégrande ne dépend que de ℓ^2, nous pouvons

transformer l'intégrale en coordonnées sphériques après une rotation de Wick $t \to -it$:



$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)\,p^2 - m^2)^2} \\
&= \frac{i\lambda^2}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4\ell_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta^2(x))^2} \qquad (\text{avec } \Delta^2(x) \equiv m^2 - x(1-x)\,p^2) \\
&\overset{?}{=} \frac{i\lambda^2}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E \frac{\ell_E^3}{(\ell_E^2 + \Delta^2(x))^2} \quad (\text{facteur } 2\pi^2 \text{ de l'intégration angulaire}) \,.
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

Pour $\ell_E^2 \gg \Delta^2$ l'intégrande se comporte comme $1/\ell_E$, donc la primitive $\sim \log(\ell_E)$ diverge lorsque $\ell_E \to \infty$: on a trouvé une *divergence logarithmique* dans l'ultraviolet. Pour traiter cette divergence, il faut *régulariser* et *renormaliser*.

1. *Régularisation.* On utilise la *régularisation dimensionnelle* : les diagrammes sont calculés comme fonctions analytiques du nombre d de dimensions d'espace-temps. Vu que le résultat sera une fonction analytique de d, sauf pour les dimensions où il diverge, il est possible d'analytiquement prolonger cette fonction aux valeurs non entiers de d. Seulement après renormalisation on va ultérieurement prendre la limite $d \to 4$.

Notamment, l'expression

$$\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2}$$

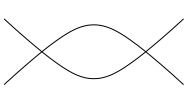
peut etre évalué pour $d \notin \mathbb{N}$ avec l'aide de la fonction Gamma (voir annexe) :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}(\ell_E^2) \frac{(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 \mathrm{d}y\; y^{1-\frac{d}{2}} (1-y)^{\frac{d}{2}-1} \qquad \text{avec } y \equiv \frac{\Delta^2}{\ell_E^2 + \Delta^2} \,.
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

Avec les deux représentations de la fonction Bêta, voir éqns. (A.14) et (A.15), on trouve enfin

$$\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \,. \tag{6.40}$$

La fonction $\Gamma(z)$ a des pôles simples à $z = 0, -1, -2, -3\ldots$, donc $\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$ a des pôles à $d = 4, 6, 8\ldots$, mais l'expression Eq. (6.40) est bien définie pour tout autre d. Puisqu'on s'intéresse au résultat en $d = 4$, on pose $d = 4 - 2\epsilon$. Eq. (6.38) s'écrit alors formellement



$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{i\lambda^2}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(\epsilon) \left(\frac{1}{\Delta^2(x)}\right)^\epsilon \,. \tag{6.41}$$

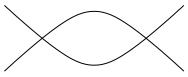
Bien entendu, cette expression diverge toujours dans la limite $\epsilon \to 0$, alors pour l'instant on va garder ϵ non nul. On a

$$(4\pi)^\epsilon = e^{\epsilon \log 4\pi} = 1 + \epsilon \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{6.42}$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{6.43}$$

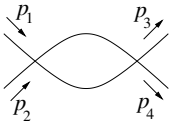
$$\left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^\epsilon = 1 - \epsilon \log \Delta^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{6.44}$$

et donc

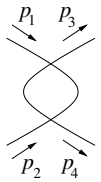


$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\big(1+\epsilon\log(4\pi)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\big)\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E+\mathcal{O}(\epsilon)\right)\big(1-\epsilon\log\Delta^2+\mathcal{O}(\epsilon^2)\big)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\left(\frac{1}{\epsilon}+\log(4\pi)-\gamma_E-\log\Delta^2(x)\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+\log(4\pi)-\gamma_E-\int_0^1 \mathrm{d}x\log(m^2-x(1-x)p^2)\right).
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$

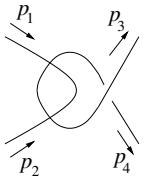
On rappelle qu'on avait posé $p = p_1 + p_2$. Evidemment le résultat sera le même pour les autres deux diagrammes à une boucle si on remplace $p \to p_1 - p_3$ ou $p \to p_1 - p_4$ respectivement :



$$
= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+\log(4\pi)-\gamma_E-\int_0^1 \mathrm{d}x\log(m^2-x(1-x)(p_1+p_2)^2)\right), \tag{6.46}
$$

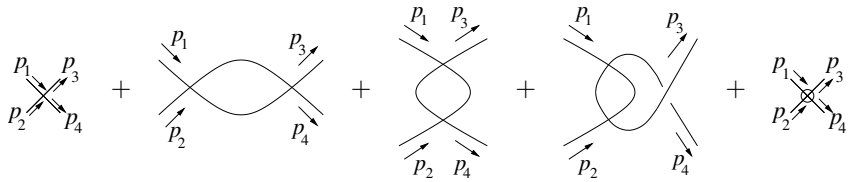


$$
= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+\log(4\pi)-\gamma_E-\int_0^1 \mathrm{d}x\log(m^2-x(1-x)(p_1-p_3)^2)\right), \tag{6.47}
$$



$$
= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+\log(4\pi)-\gamma_E-\int_0^1 \mathrm{d}x\log(m^2-x(1-x)(p_1-p_4)^2)\right). \tag{6.48}
$$

2. *Rénormalisation.* La condition de renormalisation est que, pour $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = (m, \vec{0})$,



(6.49)

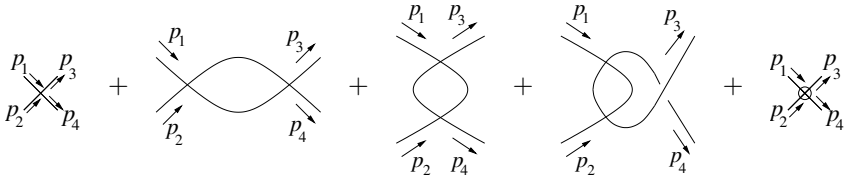
et alors

$$
\begin{aligned}
-i\lambda + &\lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+\log(4\pi)-\gamma_E-\int_0^1 \mathrm{d}x\log(m^2-x(1-x)\,4m^2)\right)\\
&+2\lim_{\epsilon\to 0}\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+\log(4\pi)-\gamma_E-\log m^2)\right)+(-i\delta_\lambda) = -i\lambda\,.
\end{aligned}
\tag{6.50}
$$

Le contre-terme δ_λ doit alors être donné par l'expression (divergente également)

$$
\delta_\lambda = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left(\frac{3}{\epsilon}-3\,\gamma_E+3\,\log(4\pi)-2\log m^2-\int_0^1 \mathrm{d}x\,\log(m^2-4\,x(1-x)\,m^2)\right). \tag{6.51}
$$

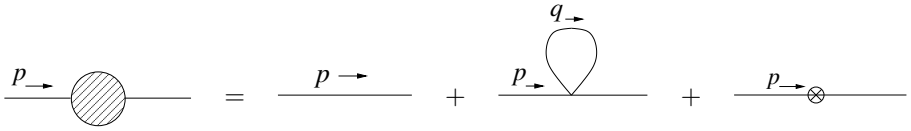
3. *Vertex renormalisé au niveau d'une boucle.* On combine ces résultats pour trouver



$$= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\log \frac{m^2 - x(1-x)(p_1+p_2)^2}{m^2 - 4\,x(1-x)m^2} + \log \frac{m^2 - x(1-x)(p_1-p_3)^2}{m^2} + \log \frac{m^2 - x(1-x)(p_1-p_4)^2}{m^2} \right). \tag{6.52}$$

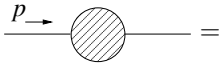
On pourrait évaluer l'intégrale sur x mais le résultat ne deviendra ni plus instructif ni plus simple. À noter que le résultat final ne dépend plus de ϵ et est évidemment fini ; la divergence a été absorbée par le contre-terme (qui n'est pas observable et n'a pas de significance physique, alors le fait qu'il diverge ne devrait pas nous inquiéter). Avec ce contre-terme, on peut en fait calculer les amplitudes de transition pour la diffusion $\phi\phi \to \phi\phi$ au second ordre en λ pour une configuration cinématique p_1, p_2, p_3, p_4 quelconque ; le résultat sera toujours fini.

On termine par la régularisation et renormalisation du **propagateur**. Au niveau d'une boucle,



$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\left(1 + \frac{1}{2}(-i\lambda)\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + i(\delta_Z p^2 - \delta_{m^2})\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\right) \tag{6.53}$$

Les conditions de renormalisation sont que le pôle de cette expression soit à $p^2 = m^2$ avec résidu $iZ = i$:



$$= \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{ (régulier)} \tag{6.54}$$

et donc la partie impliquant les contre-termes peut s'écrire

$$\delta_Z\, p^2 - \delta_{m^2} = \frac{\lambda}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} + (p^2 - m^2)^2\, f(p^2, m^2) \tag{6.55}$$

avec une fonction régulière $f(p^2, m^2)$. En comparant les coefficients de p^4, p^2 et p^0 à gauche et à droite, on s'aperçoit que $f(p^2, m^2) = 0$, que

$$\delta_Z = 0 \tag{6.56}$$

et que

$$\delta_{m^2} = -\frac{\lambda}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}\,. \tag{6.57}$$

Le fait que le contre-terme de renormalisation de la fonction d'onde δ_Z s'annule au niveau d'une boucle est spécifique à la théorie ϕ^4. Dans une théorie quantique des champs plus générale, $\delta_Z \neq 0$ à une boucle, et de même dans la théorie ϕ^4 à partir de deux boucles. Quant à δ_{m^2}, on pourrait en principe se contenter avec la forme d'éq. (6.57). Mais ici on va tout de même évaluer δ_{m^2} en régularisation dimensionnelle, afin d'acquérir plus de familiarité avec cette technique.

1. *Régularisation.* L'intégrale Eq. (6.57) diverge quadratiquement dans $d = 4$ dimensions. Pour $d \neq 4$, une rotation de Wick donne

$$\int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = -i\int \frac{\mathrm{d}^d q_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{q_E^2 + m^2} \tag{6.58}$$

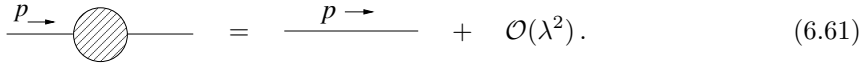
et donc avec $d = 4 - 2\epsilon$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} &= -i \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(-1+\epsilon)(m^2)^{1-\epsilon} \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \lim_{\epsilon \to 0} (1 + \epsilon \log(4\pi)) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 \right) m^2 \left(1 - \epsilon \log m^2\right) \qquad (6.59) \\ &= \frac{i\, m^2}{16\pi^2} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) + 1 - \log m^2 \right) .\end{aligned}$$

2. *Renormalisation.* En suivant le raisonnement ci-dessus, on déduit

$$\delta_{m^2} = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) + 1 - \log m^2 \right) . \qquad (6.60)$$

3. *Propagateur renormalisé.* En résumé, la renormalisation du propagateur à une boucle dans la théorie ϕ^4 n'est pas très intéressante, parce que le seul diagramme à une boucle dépend de p de façon triviale : le contre-terme δ_{m^2} le supprime précisément, tandis que $\delta_Z = 0$. Alors en fait



(6.61)

Remarques :

- On peut montrer : Avec les contre-termes δ_λ, δ_Z, δ_{m^2} ainsi déterminés, les fonctions à n points au niveau d'une boucle pour un n quelconque et avec des impulsions/positions externes quelconques peuvent être calculées sans tomber sur des divergences.
- Il suffit alors de mesurer deux quantités (la masse de la particule et la fonction à quatre points pour des particules au repos) pour calculer *toutes* les observables. En général, une théorie est *renormalisable* s'il faut fixer un nombre *fini* de contre-termes par des conditions de renormalisation pour être prédictive.
- On peut montrer : Une théorie est renormalisable $\Rightarrow$ tous les coefficients des termes dans le lagrangien sont de dimension ≥ 0 (une condition *nécessaire* pour la renormalisabilité en général qui est en fait *nécessaire et suffisante* pour des théories des champs scalaires, potentiellement après une redéfinition des champs).
- Ainsi le terme cinétique $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, le terme de masse $m^2\phi^2$ et le terme d'interaction $\lambda\phi^4$ peuvent figurer dans une théorie renormalisable ($[m^2] = 2$ et $[\lambda] = 0$) ; pareil pour des termes linéaires $f\phi$ ou cubiques $g\phi^3$ ($[f] = 3$ et $[g] = 1$). En revanche, si on inclut des termes comme $\frac{1}{\Lambda_1}\phi\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ ou $\frac{1}{\Lambda_2}\phi^5$, alors la théorie devient non-renormalisable.
- Les divergences ici se sont produites dans la limite des énergies et impulsions de boucle infiniment grandes ("divergences dans l'ultraviolet") à cause de l'extrapolation aux échelles de distance infiniment petites. La renormalisation sert à cacher les détails de la physique UV.
- Il existe une autre classe de divergences, les *divergences dans l'infrarouge*. Ces dernières apparaîtront dans les théories avec des particules sans masse, dans la limite d'énergies et impulsions qui tendent vers zéro. Elles sont traitées de manière assez différente au niveau technique ; on ne détaillera pas la procédure ici.

Chapitre 7

Sections efficaces et taux de desintégration

7.1 Des fonctions de correlation aux éléments de matrice

On rappelle la formule de LSZ du chapitre 4.2 pour la diffusion $2 \to 2$ dans la théorie ϕ^4, afin de définir l'*élément de matrice de transition* $\mathcal{M}_{\text{fi}}$:

$$\begin{aligned}\langle f|i\rangle &= i^4 \int \mathrm{d}^4x_1\, \mathrm{d}^4x_2\, \mathrm{d}^4x_1'\, \mathrm{d}^4x_2'\, e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ip_1'x_1' + ip_2'x_2'} \\ &\qquad (\Box_1 + m^2)(\Box_2 + m^2)(\Box_1' + m^2)(\Box_2' + m^2)\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_1')\phi(x_2')|0\rangle \\ &\equiv i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')\mathcal{M}_{\text{fi}}\end{aligned} \tag{7.1}$$

La fonction delta apparaît parce que l'impulsion totale est conservée. $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ est, en générale, une fonction des impulsions, de la masse et du couplage. Elle contient toutes les informations sur la dynamique du processus de diffusion, alors il n'y a pas besoin de calculer la fonction de correlation si on peut obtenir $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ directement. Pour des processus de diffusion autres que $2 \to 2$, $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ est défini de manière analogue avec une fonction δ qui porte sur toutes les impulsions des particules entrantes et sortantes.

En fait il est possible d'extraire $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ des diagrammes de Feynman, sans passer par les fonctions de correlation et la formule LSZ. En pratique, on préférera alors cette approche directe si l'objectif final est de calculer une section efficace ou un taux de désintégration. Le lien entre $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ et les diagrammes de Feynman dits *amputés* est détaillé dans ce qui suit, avec toujours la diffusion $2 \to 2$ comme exemple.

Au niveau de l'arbre : il n'y a qu'un seul diagramme (les diagrammes non connexes ne contribuent pas, ils correspondent au cas où les particules se manquent), à savoir

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_1')\phi(x_2')|0\rangle &= \\ &= (-i\lambda)\int \mathrm{d}^4y\, D_F(x_1 - y)D_F(x_2 - y)D_F(x_1' - y)D_F(x_2' - y)\,.\end{aligned} \tag{7.2}$$

On utilise que $(\Box + m^2)D_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$ dans la formule LSZ :

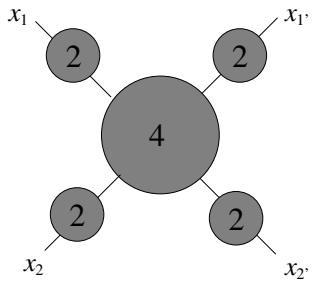
$$\begin{aligned}\langle f|i\rangle = & \int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_1'\,\mathrm{d}^4x_2'\; e^{-ip_1x_1-ip_2x_2+ip_1'x_1'+ip_2'x_2'} \\ & (-i\lambda)\int \mathrm{d}^4y\,(-i)\delta^{(4)}(x_1-y)(-i)\delta^{(4)}(x_2-y)(-i)\delta^{(4)}(x_1'-y)(-i)\delta^{(4)}(x_2'-y) \\ = & -i\lambda\int \mathrm{d}^4y\; e^{-i(p_1+p_2-p_1'-p_2')y} \\ = & -i\lambda\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')\end{aligned} \tag{7.3}$$

et alors on trouve

$$\mathcal{M}_{\mathrm{fi}} = -\lambda\,. \tag{7.4}$$

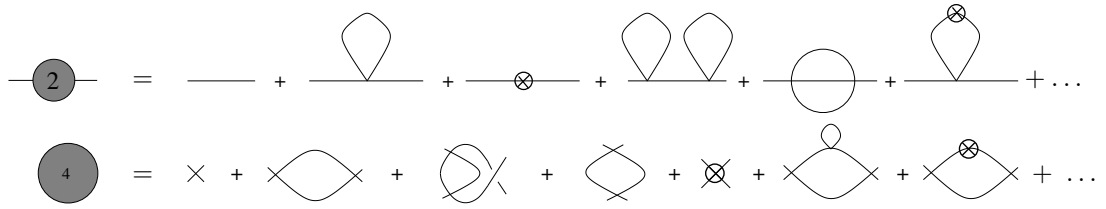
Aux ordres supérieurs : Schématiquement, la fonction à quatre points connexe peut se représenter comme

$\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_1')\phi(x_2')|0\rangle \quad =$



(7.5)

où —(2)— représente la fonction à deux points, y compris toutes les corrections à boucles, et similairement (4) représente le vertex et toutes ses corrections quantiques :

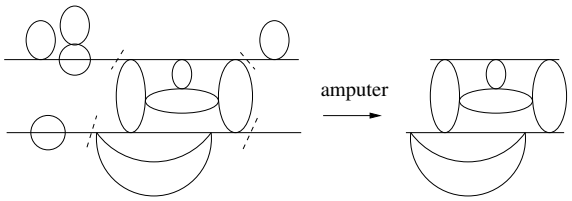


Or on sait que la fonction à deux points renormalisée —(2)— possède un pôle à $p^2 = m^2$ avec résidu i. Alors, en appliquant la formule LSZ, les facteurs $-i(p^2-m^2)$ vont supprimer les pôles correspondantes aux pattes externes $i/(p^2-m^2)$ (dans l'espace de positions, les opérateurs de Klein-Gordon $\Box + m^2$ vont tomber sur les propagateurs externes renormalisés et produire des fonctions delta, comme on a vu explicitement au niveau de l'arbre).

On peut alors directement calculer $\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}$ à partir des diagrammes *amputés* qui correspondent à (4), c'est-à-dire, la somme des diagrammes connexes sans pattes externes, avec impulsions entrantes p_1, p_2, $-p_1'$, $-p_2'$:

$$\boxed{\begin{aligned}&i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')\,\mathcal{M}_{\mathrm{fi}} \\ &= \int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{d}^4x_1'\,\mathrm{d}^4x_2' e^{-ip_1x_1-ip_2x_2+ip_1'x_1'+ip_2'x_2'}\langle 0|\,\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_1')\phi(x_2')|0\rangle_{\text{amputé}}\end{aligned}} \tag{7.6}$$

Ici "patte externe" signifie un propagateur *renormalisé* connecté à un point externe du diagramme, c.-à.-d. —(2)—incluant toutes les corrections à boucles à la fonction à deux points. Ainsi, un diagramme générique est amputé comme, par exemple,



Exemple à une boucle : Avec les *variables de Mandelstam*

$$s = (p_1 + p_2)^2 \tag{7.7}$$
$$t = (p_1 - p_1')^2 \tag{7.8}$$
$$u = (p_1 - p_2')^2 \tag{7.9}$$

on trouve, selon Eq. (6.52),

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\log\frac{m^2 - s\,x(1-x)}{m^2} + (s \leftrightarrow t) + (s \leftrightarrow u)\right) + 2\right). \tag{7.10}$$

La généralisation d'éq. (7.6) aux processus $2 \to n$ est évidente :

- il y aura plus de variables d'impulsion dans la fonction delta et dans l'exponentielle,
- au lieu de la fonction à quatre points, il faut regarder la fonction à $2+n$ points,
- toutes les $2+n$ pattes externes doivent être amputées.

7.2 La diffusion : les processus $2 \to 2$ et $2 \to n$

Dans l'expérience, on ne mesure pas directement les éléments de matrice de transition $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ mais plutôt des *sections efficaces* de diffusion. Introduisons le volume caractéristique V et le temps caractéristique T du processus (dont le résultat final ne dépendra pas, alors ultérieurement on pourra les faire tendre $\to \infty$) et définissons la *section efficace différentielle*

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{T\Phi}\,\mathrm{d}P\,.} \tag{7.11}$$

Ici Φ est le flux incident sur la cible et $\mathrm{d}P$ est la probabilité différentielle pour la diffusion dans une sous-region de l'espace des phases pour l'état final. Pour un processus $2 \to n$ avec impulsions initiales et finales

$$|i\rangle = |p_1\rangle|p_2\rangle\,, \qquad \langle f| = \langle p_1'|\cdots\langle p_n'| \tag{7.12}$$

on a

$$\mathrm{d}P = \frac{|\langle f|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle}\,\mathrm{d}\Pi \qquad\qquad \mathrm{d}\Pi = \prod_{k=1}^{n}\left(V\frac{\mathrm{d}^3p_k'}{(2\pi)^3}\right). \tag{7.13}$$

À cause de notre choix de normalisation pour les états à une particule, l'expression de $|\langle f|i\rangle|^2/(\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle)$ contient des facteurs $\delta^{(3)}(\vec{0})$ et $\delta^{(4)}(0)$ qui sont régularisés par le volume V et temps T :

$$\delta^{(3)}(\vec{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x\, e^{i\vec{x}\cdot\vec{0}} = \frac{V}{(2\pi)^3}, \qquad \delta^{(4)}(0) = \frac{TV}{(2\pi)^4}\,. \tag{7.14}$$

En détail, on a

$$\begin{aligned}
|\langle f|i\rangle|^2 &= \left((2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_1 + p_2 - \sum_k p_k'\Big)\right)^2 |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \\
&= (2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_1 + p_2 - \sum_k p_k'\Big)\ (2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\ |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \\
&= (2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_1 + p_2 - \sum_k p_k'\Big)\ (VT)\ |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2
\end{aligned} \tag{7.15}$$

ainsi que

$$\langle i|i\rangle = \langle p_1|p_1\rangle\langle p_2|p_2\rangle = (2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{p}_1}\, \delta^{(3)}(\vec{0})\; (2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{p}_2}\, \delta^{(3)}(\vec{0}) = 4\, E_1\, E_2\, V^2\,, \tag{7.16}$$

$$\langle f|f\rangle = \prod_k (2\, E'_k\, V)\;. \tag{7.17}$$

Ensemble les éqs. (7.13), (7.15), (7.16) et (7.17) donnent

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P &= \frac{\delta^{(4)}\Big(p_1 + p_2 - \sum_k p'_k\Big)\,(2\pi)^4\, TV}{4\, E_1\, E_2\, V^2\, \prod_k (2\, E'_k\, V)}\, |\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}|^2 \prod_k \left(V \frac{\mathrm{d}^3 p'_k}{(2\pi)^3} \right) \\ &= \frac{T}{V} \frac{1}{4\, E_1\, E_2} \prod_k \left(\widetilde{\mathrm{d}p'_k} \right)\; (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(p_1 + p_2 - \sum_k p'_k\Big)\; |\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}|^2\;. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Ici on a utilisé la définition d'éq. (3.22) pour la mesure de l'espace de phase invariante $\widetilde{\mathrm{d}p'_k}$.

De plus, on peut exprimer le flux Φ dans le référentiel du repos de la particule 1 par la 3-vitesse $\vec{v}_2$ de la particule 2,

$$\Phi = \frac{|\vec{v}_2|}{V}\,. \tag{7.19}$$

Plus généralement, on peut passer de ce référentiel à d'autres référentiels d'intérêt par un boost de Lorentz en direction $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$; notamment, le référentiel du centre de masse, ou bien un référentiel quelconque dans lequel un expérimentateur voit les particules intiales entrer en collision à un angle de 180°. Dans un tel référentiel, on a

$$\Phi = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{V}\,. \tag{7.20}$$

En utilisant les éqs. (7.18) et (7.20) dans l'éq. (7.11), on obtient enfin l'expression de la *section efficace différentielle pour la diffusion* $2 \to n$:

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\, E_1 E_2\, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \prod_{k=1}^{n} \widetilde{\mathrm{d}p'_k}\; (2\pi)^4\, \delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - \sum_{k=1}^{n} p'_k\right)\; |\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}|^2}\,. \tag{7.21}$$

A noter que tous les facteurs de T et V se suppriment dans le résultat final. Cette expression est invariante de Lorentz par des boost en direction $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (mais pas par des transformations de Lorentz générales).

La *section efficace totale* est

$$\sigma = \int \mathrm{d}\sigma\,. \tag{7.22}$$

Si l'état final contient n' particules indiscernables, il faut encore la multiplier par un facteur $\frac{1}{n'!}$ afin de ne pas surdénombrer des configurations équivalentes.

Dans le cas spécial de la diffusion $2 \to 2$, l'expression de la section efficace différentielle peut être simplifiée encore. On choisit le référentiel du centre de masse où $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ $(= \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}')$. Dans ce référentiel,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{d}p'_1}\, \widetilde{\mathrm{d}p'_2} (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) &= \frac{\mathrm{d}^3 p'_1}{(2\pi)^3\, 2E'_1} \frac{\mathrm{d}^3 p'_2}{(2\pi)^3\, 2E'_2} (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \\ = \frac{\mathrm{d}^3 p'_1}{16\pi^2\, E'_1\, E'_2}\, \delta\left(E'_1 + E'_2 - \sqrt{s}\right) &= \frac{|\vec{p}_1{}'|^2\, \mathrm{d}|\vec{p}_1{}'|\, \mathrm{d}\Omega}{16\pi^2\, E'_1 E'_2}\, \delta\left(E'_1 + E'_2 - \sqrt{s}\right) \end{aligned} \tag{7.23}$$

où comme avant $s = (p_1 + p_2)^2$, et E'_1 et E'_2 sont donnés en fonction de $|\vec{p}_1{}'|$ comme

$$E'_1 = \sqrt{{m'_1}^2 + |\vec{p}_1{}'|^2}\,, \qquad E'_2 = \sqrt{{m'_2}^2 + |\vec{p}_1{}'|^2}\,. \tag{7.24}$$

Pour transformer la fonction δ, on rappelle l'identité

$$\int \mathrm{d}x\, \delta(f(x)) = \sum_{x_i\,:\,f(x_i)=0} \frac{1}{|f'(x_i)|}\,. \tag{7.25}$$

Ici l'argument de la fonction δ est

$$E_1' + E_2' - \sqrt{s}\,,$$

ce qui s'annule à

$$|\vec{p}_1{}'| = \sqrt{\frac{(s-(m_1'+m_2')^2)\,(s-(m_1'-m_2')^2)}{4\,s}} \equiv p_{\mathrm{CM}}\,. \tag{7.26}$$

La quantité p_{CM} est le module de la 3-impulsion dans le référentiel du centre de masse pour une des particules finales (n'importe laquelle, car l'impulsion totale est nulle, alors les deux impulsions sont égales et opposées). La dérivée de l'argument de la fonction δ est

$$\frac{\partial}{\partial(|\vec{p}_1{}'|)}\left(E_1'+E_2'-\sqrt{s}\right) = \frac{|\vec{p}_1{}'|}{E_1'} + \frac{|\vec{p}_1{}'|}{E_2'} = \frac{|\vec{p}_1{}'|\,(E_1'+E_2')}{E_1'\,E_2'} \quad \overset{|\vec{p}_1{}'|=p_{\mathrm{CM}}}{=} \quad \frac{p_{\mathrm{CM}}\,\sqrt{s}}{E_1'\,E_2'} \tag{7.27}$$

Si on insère ce résultat dans éq. (7.23), on obtient

$$\widetilde{\mathrm{d}p_1'}\,\widetilde{\mathrm{d}p_2'}(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2') = \frac{p_{\mathrm{CM}}}{16\pi^2\,\sqrt{s}}\,\delta\left(|\vec{p}_1{}'|-p_{\mathrm{CM}}\right)|\,\mathrm{d}|\vec{p}_1{}'|\;\mathrm{d}\Omega \tag{7.28}$$

et alors

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\,\frac{1}{E_1\,E_2\,|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}\,\frac{p_{\mathrm{CM}}}{\sqrt{s}}\,|\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}|^2\,. \tag{7.29}$$

Cette formule est valide généralement, même pour des espèces de particules différentes. Si, de plus, les quatre masses sont identiques, alors les impulsions spatiales dans l'état initial sont de magnitude p_{CM} également et donc on a

$$|\vec{v}_2-\vec{v}_1| = \left|\frac{\vec{p}_2}{E_2}-\frac{\vec{p}_1}{E_1}\right| = \frac{2|\vec{p}_1|}{E_1} = \frac{2\,p_{\mathrm{CM}}}{E_1} \tag{7.30}$$

et $E_1 = E_2 = \sqrt{s}/2$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{|\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}|^2}{64\pi^2\,s}\,. \tag{7.31}$$

Par exemple, pour la diffusion $\phi\phi \to \phi\phi$ dans la théorie ϕ^4 au niveau de l'arbre, on a $|\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}|^2 = \lambda^2$ et deux particules indiscernables dans l'état final, ce qui donne pour la section efficace totale

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{32\pi\,s}\,. \tag{7.32}$$

7.3 La désintégration : les processus $1 \to n$

Strictement dit, le formalisme de LSZ ne peut pas être employé pour décrire les processus de désintegration, car une particule instable ne peut pas exister à $T \to \pm\infty$. Il est tout de même possible de simplement ignorer cette complication et néanmoins arriver au résultat physique correct en généralisant éq. (7.21) : dans le référentiel où la particule initiale est au repos, $\vec{p}_1 = 0$ et $E_1 = m_1$, alors la largeur différentielle est

$$\boxed{\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{2m_1}\prod_{k=1}^{n}\widetilde{\mathrm{d}p_k'}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_1-\sum_k p_k'\right)\,|\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}|^2\,.} \tag{7.33}$$

La largeur totale

$$\Gamma = \int \mathrm{d}\Gamma \tag{7.34}$$

doit encore être multipliée par $1/n'!$ pour tout ensemble de n' particules indiscernables dans l'état final.

Chapitre 8

Fermions

8.1 Le groupe et l'algèbre de Lorentz

Pour rappel, les transformations de Lorentz $x^\mu \to x'^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu$ préservent le produit scalaire lorentzien $kx = k_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$, c.-à-d. $\Lambda g \Lambda^T = g$. L'ensemble des transformations Λ forment le *groupe de Lorentz* $\mathrm{O}(3,1)$, un exemple d'un *groupe de Lie* (un groupe qui est aussi une variété différentielle). La composante connexe de $\mathrm{O}(3,1)$ contenant l'élément d'identité forme un sous-groupe, le groupe des *transformations de Lorentz propres orthochrones* $\mathrm{SO}^\uparrow(3,1)$.

Quelques exemples de transformations propres orthochrones sont donnés par :

les *rotations* par un angle α dans le plan (x^1, x^2),

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\alpha & \sin\alpha & \\ & -\sin\alpha & \cos\alpha & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

ou bien les *boost* avec rapidité η selon x^1,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & & \\ \sinh\eta & \cosh\eta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

avec $\cosh\eta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\sinh\eta = \sqrt{\cosh^2\beta - 1} = \beta\gamma$.

Les éléments de $\mathrm{SO}^\uparrow(3,1)$ peuvent se construire par l'application exponentielle,

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\kappa\lambda} M^{\kappa\lambda}\right) = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\kappa\lambda} M^{\kappa\lambda} + \mathcal{O}\left(||\omega||^2\right) \tag{8.3}$$

Ici $\omega_{\kappa\lambda}$ est une matrice 4×4 réelle antisymétrique contenant les trois angles et les trois rapidités. (Dans une matrice 4×4 antisymétrique, il y a six paramètres indépendants.) Les $M^{\kappa\lambda} = -M^{\lambda\kappa}$ sont des matrices 4×4 avec les éléments

$$(M^{\kappa\lambda})_{\mu\nu} = i\left(\delta^\kappa_\mu \delta^\lambda_\nu - \delta^\kappa_\nu \delta^\lambda_\mu\right) . \tag{8.4}$$

Elles s'appellent les *générateurs* de Lorentz ; encore, en vue de l'antisymétrie des indices $\kappa\lambda$, il n'y a que six générateurs indépendants. Ils vérifient les relations de commutation de l'*algèbre de Lorentz*

$$\boxed{[M^{\kappa\lambda}, M^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\lambda\rho} M^{\kappa\sigma} - g^{\kappa\rho} M^{\lambda\sigma} - g^{\lambda\sigma} M^{\kappa\rho} + g^{\kappa\sigma} M^{\lambda\rho}\right) .} \tag{8.5}$$

L'algèbre de Lorentz est l'espace vectoriel engendré par les générateurs. Il s'agit d'un exemple d'une *algèbre de Lie*, qui est l'espace tangent à l'identité du groupe de Lie associé. Moins formellement, ses éléments sont les "transformations infinitésimales". Pour résumer, l'algèbre de Lie des $\omega_{\kappa\lambda}M^{\kappa\lambda}$, $\mathfrak{so}(3,1)$, génère le groupe de Lie des $\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega M}$, $\mathrm{SO}^{\uparrow}(3,1)$, par l'application exponentielle.

Une *représentation* n-dimensionnelle de $\mathfrak{so}(3,1)$ est un ensemble de 6 matrices $n \times n$ $\{\widetilde{M}^{01}, \widetilde{M}^{02}, \widetilde{M}^{03}, \widetilde{M}^{12}, \widetilde{M}^{13}, \widetilde{M}^{23}\}$ telles que

$$(\widetilde{M}^{\kappa\lambda}) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{M}^{01} & \widetilde{M}^{02} & \widetilde{M}^{03} \\ -\widetilde{M}^{01} & 0 & \widetilde{M}^{12} & \widetilde{M}^{13} \\ -\widetilde{M}^{02} & -\widetilde{M}^{12} & 0 & \widetilde{M}^{23} \\ -\widetilde{M}^{03} & -\widetilde{M}^{13} & -\widetilde{M}^{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

vérifie l'algèbre éq. (8.5).

Exemples :

- $\widetilde{M}^{\kappa\lambda} = M^{\kappa\lambda}$ comme dans éq. (8.4), dite la *représentation vectorielle* (parce qu'elle génère les transformations de Lorentz des vecteurs Λ^{μ}_{ν}).
- $\widetilde{M}^{\kappa\lambda} = 0$, la *représentation triviale* (non fidèle), qui génère seulement l'identité $e^0 = \mathbb{1}$.
- La *représentation de Dirac* : Soient $\gamma^{\mu} = (\gamma^{\mu\alpha}{}_{\beta})$ un ensemble de 4 matrices 4×4 telles que

$$(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})^{\alpha}_{\beta} = 2\, g^{\mu\nu}\delta^{\alpha}_{\beta} \qquad \textit{(algèbre de Clifford)} \tag{8.7}$$

  alors les matrices

$$\widetilde{M}^{\kappa\lambda} = \frac{i}{4}[\gamma^{\kappa}, \gamma^{\lambda}] \equiv \gamma^{\kappa\lambda} \tag{8.8}$$

  forment une représentation 4-dimensionnelle de l'algèbre de Lorentz (preuve : exercices). Cette représentation *n'est pas isomorphe à la représentation vectorielle*. Il se trouve que toutes les représentations des γ sont équivalents (liées par des transformations unitaires). Ici on va utiliser la *représentation de Weyl* de l'algèbre de Clifford,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

  avec les σ^i = les matrices 2×2 de Pauli, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour construire une théorie quantique des champs invariante par des transformations de Lorentz, les champs doivent *se transformer de façon covariante* = prendre ses valeurs dans un espace vectoriel n-dimensionnel qui porte une représentation n-dimensionnelle de $\mathfrak{so}(3,1)$.

Anciens exemples :

- le champ scalaire à une seule composante, qui se transforme par la représentation triviale : $\phi \to \Lambda\phi$ avec $\Lambda = 1$.
- le champ vectoriel à quatre composantes, qui se transforme par la représentation vectorielle : $A^{\mu} \to \Lambda^{\mu}_{\nu}A^{\nu}$ avec Λ la matrice de la transformation de Lorentz, $\Lambda = \exp(-\frac{i}{2}\omega M)$.

8.2 Le champ de Dirac

Nouvel exemple :

- le champ de Dirac (*spineur de Dirac*) à quatre composantes, qui se transforme par la représentation de Dirac :

$$\psi^{\alpha} \to \Lambda^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta}, \qquad \Lambda^{\alpha}_{\beta} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\kappa\lambda}\gamma^{\kappa\lambda}\right)^{\alpha}_{\beta}. \tag{8.10}$$

Les premiers termes du lagrangien qui sont réels et invariants par Lorentz sont (→ exercices) :

$$\boxed{\mathcal{L} = \overline{\psi}_\alpha \left(i(\gamma^\mu)^\alpha_\beta \partial_\mu - m\, \delta^\alpha_\beta \right) \psi^\beta \,.} \tag{8.11}$$

Ici on a défini

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \,. \tag{8.12}$$

Les équations de mouvement (→ exercices) sont l'*équation de Dirac*

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, \psi = 0} \tag{8.13}$$

et sa conjuguée (on a supprimé les indices des spineurs). L'équation de Dirac implique l'équation de Klein-Gordon car

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi \\ &= (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi \\ &= \Big(\frac{1}{2} \underbrace{(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{2\, g^{\mu\nu}} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \Big) \psi \\ &= (\Box + m^2)\psi \end{aligned} \tag{8.14}$$

mais elle est plus restrictive : un objet à quatre composantes qui sont toutes des solutions de l'équation de Klein-Gordon n'est en général pas une solution de l'équation de Dirac, voir ci-dessous.

La représentation de Dirac est *réductible* : Si on pose

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{L1} \\ \psi_{L2} \\ \psi_{R1} \\ \psi_{R2} \end{pmatrix} , \tag{8.15}$$

alors les objets à deux composantes ψ_L et ψ_R ne sont pas melangés par les transformations de Lorentz propres. Ils s'appellent *spineurs de Weyl* (à main gauche, "left-handed", et à main droite, "right-handed"). Pour l'*opérateur de chiralité*

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{8.16}$$

on trouve les vecteurs propres et valeurs propres

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} , \qquad \gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{8.17}$$

γ^5 commute avec les générateurs de Lorentz (→ exercices), ce qui montre que ψ_L et ψ_R se transforment indépendamment. Les représentations de l'algèbre de Lorentz correspondantes s'appellent les *représentations de Weyl à main gauche et à main droite* respectivement ; elles sont irréductibles à leur tour.

Les spineurs de Weyl décrivent des fermions *sans masse*. Pour écrire un terme de masse [1] il en faut toujours deux que l'on peut arranger dans un spineur de Dirac, donc on va désormais utiliser des spineurs de Dirac exclusivement.

Les solutions de l'équation de Dirac

Les solutions de l'équation de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi^\alpha = 0 \tag{8.18}$$

1. Plus précisement, un terme de masse "de Dirac" comme dans éq. (8.11) — pour des spineurs neutres dits "de Majorana", il existe un autre type de terme de masse.

sont les superpositions des ondes planes ; par exemple les ondes planes progressives

$$\psi^\alpha(x) = u^\alpha(\vec{p})e^{-ipx} \quad \text{avec } p^2 = m^2\,, \quad p^0 > 0\,. \tag{8.19}$$

En insérant cette solution dans l'équation de Dirac on trouve la contrainte supplémentaire

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\vec{p}) = 0\,.} \tag{8.20}$$

On va maintenant chercher la solution la plus générale de cette contrainte pour obtenir une solution générale de l'equation de Dirac. Dans le référentiel du repos, $p = (m, \vec{0})$ et

$$0 = (m\gamma^0 - m\mathbb{1})u(\vec{0}) = m \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} u(\vec{0}) \tag{8.21}$$

donc

$$u(\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

avec ξ un spineur à deux composantes quelconque. On choisit la normalisation conventionnelle $\xi^\dagger\xi = 1$ (le coefficient $\sqrt{m}$ est aussi conventionnel, et semble étrange à cause de sa dimension, mais les observables physiques impliqueront toujours des bilineaires des spineurs). Dans une solution de l'équation de Dirac, il y a alors seulement *deux degrés de liberté* indépendants contenus dans le spineur $u(\vec{p})$; on trouvera plus tard qu'ils correspondent aux états de spin de la particule.

Dans un référentiel quelconque, on obtient $u(\vec{p})$ par un boost de Lorentz appliqué à $u(\vec{0})$. Les générateurs des boost de la représentation de Dirac dans la direction des x^i sont les matrices $K^i \equiv \gamma^{0i}$. Avec

$$\hat{p} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \tag{8.23}$$

un vecteur unitaire en direction de l'impulsion et

$$\eta = \sinh^{-1}\frac{|\vec{p}|}{m} = \tanh^{-1}\frac{|\vec{p}|}{p^0} \tag{8.24}$$

la *rapidité* qui paramètre le boost, on a alors pour la transformation de Lorentz

$$\Lambda = e^{-i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}} \tag{8.25}$$

et

$$u(\vec{p}) = e^{-i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}}\sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}. \tag{8.26}$$

On peut décomposer $u(\vec{p})$ en *spineurs de base* en choisissant une base dans l'espace des ξ : avec $\xi_+ = \binom{1}{0}$ et $\xi_- = \binom{0}{1}$ on a

$$\boxed{u_s(\vec{p}) = e^{-i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}}\sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} \qquad (s = +, -)\,.} \tag{8.27}$$

Un autre type de solution de l'équation de Dirac implique des ondes planes regressives

$$\psi = v(\vec{p})e^{+ipx} \quad \text{avec } p^2 = m^2\,, \quad p^0 > 0\,. \tag{8.28}$$

Les mêmes considérations qu'avant donnent la contrainte

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu + m)v(\vec{p}) = 0} \tag{8.29}$$

et les spineurs de base

$$\boxed{v_s(\vec{p}) = e^{-i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}}\sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_s \\ -\xi_s \end{pmatrix} \qquad (s = +, -)\,.} \tag{8.30}$$

Enfin, on va établir quelques identités utiles pour les spineurs de base v_s et u_s ainsi que pour $\bar{u}_s \equiv u_s^\dagger \gamma^0$ et $\bar{v}_s \equiv v_s^\dagger \gamma^0$. Notons que

$$\gamma^0 K^i \gamma^0 = \frac{i}{4}\gamma^0[\gamma^0,\gamma^i]\gamma^0 = \frac{i}{4}\left((\gamma^0)^2\gamma^i\gamma^0 - \gamma^0\gamma^i(\gamma^0)^2\right) = -\frac{i}{4}[\gamma^0,\gamma^i] = -K^i = (K^i)^\dagger \tag{8.31}$$

et donc

$$\gamma^0 K^i = (K^i)^\dagger \gamma^0 \tag{8.32}$$

d'où on déduit

$$\bar{u}(\vec{p}) = u^\dagger(\vec{p})\gamma^0 = \left(e^{-i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}}u(\vec{0})\right)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger(\vec{0})e^{+i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}^\dagger}\gamma^0 = \bar{u}(\vec{0})e^{i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}}. \tag{8.33}$$

Alors les exponentielles se suppriment dans les combinaisons bilinéaires comme $\bar{u}(\vec{p})u(\vec{p})$ et on obtient

$$\bar{u}_r(\vec{p})u_s(\vec{p}) = \bar{u}_r(\vec{0})u_s(\vec{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi_r\\ \xi_r\end{pmatrix}^\dagger \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi_s\\ \xi_s\end{pmatrix} = 2\,m\,\delta_{rs}\,. \tag{8.34}$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\bar{v}_r(\vec{p})v_s(\vec{p}) = -2\,m\,\delta_{rs}\,,\\
&\bar{u}_r(\vec{p})v_s(\vec{p}) = 0\,,\\
&\bar{v}_r(\vec{p})u_s(\vec{p}) = 0\,.
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Plus tard on aura besoin des *sommes de spins* qui s'écrivent, dans le référentiel du repos,

$$\begin{aligned}
\sum_{s=+,-} u_s(\vec{0})\bar{u}_s(\vec{0}) &= m\gamma^0 + m\,,\\
\sum_{s=+,-} v_s(\vec{0})\bar{v}_s(\vec{0}) &= m\gamma^0 - m\,.
\end{aligned} \tag{8.36}$$

Dans un référentiel général on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{s=+,-} u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) &= \not{p} + m\,,\\
\sum_{s=+,-} v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) &= \not{p} - m\,.
\end{aligned} \tag{8.37}$$

Ici on a introduit la notation du *slash de Feynman*, $p_\mu\gamma^\mu \equiv \not{p}$, $\gamma^\mu\partial_\mu \equiv \not{\partial}$ etc.

8.3 La quantification canonique du champ de Dirac libre

Pour quantifier le champ de Dirac, il se trouve qu'on ne peut pas procéder comme on l'avait fait pour le champ scalaire, en promouvant les champs en opérateurs et en imposant des relations de commutation canoniques. Si on suivait ce chemin, soit que l'on perdrait l'unitarité de la théorie (impliquant une violation de la conservation de probabilité), soit que l'on tomberait sur un hamiltonien sans borne inférieure (alors il n'existerait plus d'état fondamental). À la place des relations de commutation, il faut imposer plutôt des *relations de anticommutation*[2] à temps égaux entre ψ et son moment conjugué $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi} = i\psi^\dagger$:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\{\psi^\alpha(t,\vec{x}),\psi^\dagger_\beta(t,\vec{x}')\} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\delta^\alpha_\beta\,,\\
&\{\psi^\alpha(t,\vec{x}),\psi^\beta(t,\vec{x}')\} = 0 = \{\psi^\dagger_\alpha(t,\vec{x}),\psi^\dagger_\beta(t,\vec{x}')\}\,.
\end{aligned}} \tag{8.38}$$

En fait, dans toute théorie quantique des champs relativiste, il est possible d'établir un théorème important connu sous le nom de *théorème spin-statistique*. Il affirme que, afin d'obtenir une théorie

2. L'anticommutateur entre deux opérateurs est défini comme $\{A,B\} \equiv AB + BA$.

bien défini, les champs associés aux représentations de Lorentz de spin demi-entier doivent vérifier des relations de anticommutation, ou bien la statistique de Fermi-Dirac et principe d'exclusion de Pauli. Les particules de ce type s'appellent les *fermions*. En revanche, les champs associés aux représentations de Lorentz de spin entier doivent vérifier des relations de commutation, menant à la statistique de Bose-Einstein. Les particules de ce type s'appellent les *bosons*. Une preuve du théorème spin-statistique se trouve dans les références, mais on ne le démontrera pas ici.

Afin de poursuivre avec la quantification du champ de Dirac, on décompose ce dernier en modes de Fourier :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_s \int \widetilde{\mathrm{d}p} \left(a_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + b_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ipx} \right) , \\ \overline{\psi}(x) &= \sum_s \int \widetilde{\mathrm{d}p} \left(b_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) e^{-ipx} + a_s^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) e^{ipx} \right) .\end{aligned} \tag{8.39}$$

Ici $a^\dagger$, $b^\dagger$, a et b sont des opérateurs de création et d'annihilation ; comme pour le champ scalaire complexe ($\rightarrow$ exercices) il faut distinguer deux types d'excitations, *particules* et *antiparticules*. Des éqs. (8.38) et (8.39), on obtient les règles d'anticommutation

$$\begin{aligned}\{a_s(\vec{p}), a_r^\dagger(\vec{p}')\} &= (2\pi)^3 \, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \, 2\omega_{\vec{p}} \, \delta_{rs} , \\ \{b_s^\dagger(\vec{p}), b_r(\vec{p}')\} &= (2\pi)^3 \, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \, 2\omega_{\vec{p}} \, \delta_{rs} , \\ (\text{autres anticommutateurs}) &= 0 .\end{aligned} \tag{8.40}$$

Le hamiltonien est ($\rightarrow$ exercices)

$$H = \int \mathrm{d}^3x \, \overline{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi = \sum_s \int \widetilde{\mathrm{d}p} \, \omega_{\vec{p}} \left(a_s^\dagger(\vec{p}) a_s(\vec{p}) - b_s(\vec{p}) b_s^\dagger(\vec{p}) \right) \tag{8.41}$$

On note le signe moins par rapport au cas bosonique du champ scalaire complexe. En utilisant les relations d'anticommutation, on trouve une expression manifestement positive :

$$H = \sum_s \int \widetilde{\mathrm{d}p} \, \omega_{\vec{p}} \left(a_s^\dagger(\vec{p}) a_s(\vec{p}) + b_s^\dagger(\vec{p}) b_s(\vec{p}) \right) + E_0 , \tag{8.42}$$

avec E_0 une constante (divergente), représentant l'énergie du vide non observable.

L'action des opérateurs de création et d'annihilation sur l'espace de Fock est similaire qu'avant :

- l'état fondamental ou le vide $|0\rangle$ est annihilé par tous les $a_s(\vec{p})$ et $b_s(\vec{p})$,
- $a_s^\dagger(\vec{p})$ crée un état à une particule de "type a" d'impulsion $\vec{p}$ et de spin s,
- $b_s^\dagger(\vec{p})$ crée un état à une particule de "type b" d'impulsion $\vec{p}$ et de spin s.

On interprète les particules de "type a" comme des fermions et celles du "type b" comme des antifermions. Le fait que s correspond à un spin (un moment cinétique intrinsèque) sera démontré dans la suite.

L'identification $s \leftrightarrow$ spin

Pour rappel, les composantes du moment cinétique sont les générateurs des rotations, c.-à-d. les charges conservées associées à l'invariance par rotations selon le théorème de Noether, voir sec. 2.3. Le groupe des rotations est un sous-groupe des transformations de Lorentz. Une transformation de Lorentz linéarisée dans la représentation de Dirac s'écrit

$$\Lambda = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(||\omega||^2) . \tag{8.43}$$

Spécifiquement, les rotations sont générées par les $\gamma^{\mu\nu}$ avec des indices spatiales,

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}}_{\text{rotation avec axe } x^k} \tag{8.44}$$

Par exemple, pour une rotation par un angle θ autour de l'axe des z :

$$\Lambda = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\theta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|\theta|^2) \tag{8.45}$$

Le champ $\psi(x)$ se transforme par rotations avec la matrice Λ, mais il faut aussi prendre en compte la rotation des composantes spatiales de x :

$$\begin{aligned} \psi(t,x,y,z) \;\to\; & \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\theta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right) \psi(t,\, x+\theta y,\, y-\theta x,\, z) + \mathcal{O}(|\theta|^2) \\ & = \psi(t,x,y,z) - \frac{i}{2}\theta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \psi(t,x,y,z) - \theta(x\partial_y - y\partial_x)\psi(t,x,y,z) + \mathcal{O}(|\theta|^2)\,. \end{aligned} \tag{8.46}$$

La variation du champ est alors

$$\delta\psi = -\left((x\partial_y - y\partial_x + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right)\psi\,. \tag{8.47}$$

Pour une rotation autour d'une axe générale, définie par un vecteur unitaire $\hat{r}$, on obtient

$$\delta\psi = -\left(\vec{x}\wedge\vec{\nabla} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}\right)\cdot\hat{r}\;\psi \tag{8.48}$$

Le courant conservé de Noether est, selon section 2.3,

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi - \hat{J}^\mu\,, \tag{8.49}$$

où $\partial_\mu\hat{J}^\mu$ est la variation du lagrangien ; puisque la rotation n'implique pas le temps, on a $\hat{J}^0 = 0$. Il y a alors trois charges de Noether $\int \mathrm{d}^3x\, J^0$ (une par axe de rotation indépendante). Ensemble elles constituent le *vecteur du moment cinétique* :

$$\vec{\mathcal{J}} = \int \mathrm{d}^3x\; \psi^\dagger\,\vec{\Sigma}\,\psi\,, \qquad \vec{\Sigma} = \underbrace{\vec{x}\wedge(-i\vec{\nabla})}_{\text{“MC orbital”}} + \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}}_{\text{“MC intrinsèque”}} \tag{8.50}$$

On reconnaît l'expression habituelle d'un moment cinétique orbital en mécanique quantique dans le premier terme de $\vec{\Sigma}$. Le deuxième terme est présent même quant la particule est au repos avec impulsion nulle, il correspond donc à un moment cinétique *intrinsèque*.

Calculons la valeur propre de $\mathcal{J}_z$ d'un état à une particule au repos :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_z\, a_s^\dagger(\vec{0})\,|0\rangle &= [\mathcal{J}_z, a_s^\dagger(\vec{0})]\,|0\rangle \qquad\qquad \text{car } \mathcal{J}_z|0\rangle = 0\text{, vide invariant} \\
&= \sum_{r,r'} \int \mathrm{d}^3x \int \widetilde{\mathrm{d}p}\,\widetilde{\mathrm{d}p'} \Big[\big(a_r^\dagger(\vec{p})u_r^\dagger(\vec{p})e^{ipx} + b_r(\vec{p})v_r^\dagger(\vec{p})e^{-ipx}\big)\,\Sigma_z \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(a_{r'}(\vec{p}\,')u_{r'}(\vec{p}\,')e^{-ip'x} + b_{r'}^\dagger(\vec{p}\,')v_{r'}(\vec{p}\,')e^{ip'x}\Big),\ a_s^\dagger(\vec{0})\Big]\,|0\rangle \\
&= \sum_{r,r'} \int \mathrm{d}^3x \int \widetilde{\mathrm{d}p}\,\widetilde{\mathrm{d}p'}\,\big(a_r^\dagger(\vec{p})u_r^\dagger(\vec{p})e^{ipx} + b_r(\vec{p})v_r^\dagger(\vec{p})e^{-ipx}\big)\,\Sigma_z u_{r'}(\vec{p}\,')e^{-ip'x} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \underbrace{\{a_{r'}(\vec{p}\,'), a_s^\dagger(\vec{0})\}}_{2m\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}\,')\delta_{r's}}\,|0\rangle \\
&= \sum_r \int \mathrm{d}^3x \int \widetilde{\mathrm{d}p}\ a_r^\dagger(\vec{p})u_r^\dagger(\vec{p})e^{i\omega_{\vec{p}}x^0 - i\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{-imx^0}\Sigma_z\, u_s(\vec{0})|0\rangle \qquad\qquad \text{car } b_r(\vec{p})|0\rangle = 0 \\
&= \sum_r \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3\,2\omega_{\vec{p}}}\ a_r^\dagger(\vec{p})u_r^\dagger(\vec{p})(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p})e^{i(\omega_{\vec{p}}-m)x^0}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0\\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix} u_s(\vec{0})|0\rangle \\
&= \frac{1}{4m}\sum_r u_r^\dagger(\vec{0})\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0\\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix} u_s(\vec{0})\,a_r^\dagger(\vec{0})|0\rangle \\
&= \sum_{r=+,-}\left(\xi_r^\dagger\frac{\sigma^3}{2}\xi_s\right) a_r^\dagger(\vec{0})\,|0\rangle \\
&= \pm\,\frac{1}{2}a_s^\dagger(\vec{0})|0\rangle \qquad\qquad (s=\pm)\,.
\end{aligned} \tag{8.51}$$

Ici on a utilisé que $[AB,C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B$ et que $\{a^\dagger,a^\dagger\} = \{b,a^\dagger\} = \{b^\dagger,a^\dagger\} = 0$. On a ultérieurement pu remplacer Σ_z par l'opérateur de spin, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0\\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix}$, car l'opérateur différentiel qui correspond au moment cinétique orbital n'agît que sur une constante après évaluation de la fonction delta venant de $\{a_{r'}(\vec{p}\,'), a_s^\dagger(\vec{0})\}$ (comme attendu, le moment cinétique orbital d'une particule au repos s'annule).

On conclut que le fermion créé par $a_\pm^\dagger$ possède un moment cinétique au repos ("spin") de $\pm\frac{1}{2}$. Le même calcul pour les antifermions montre que $b_\pm^\dagger(\vec{0})|0\rangle$ possède le moment cinétique $\mp\frac{1}{2}$.

Le propagateur de Dirac

L'équation de Dirac est linéaire : la théorie de Dirac est une théorie libre. Tout comme dans la théorie d'un champ scalaire, la fonction à deux points du champ libre est un élément important pour ultérieurement développer la théorie des perturbations pour les champs avec interactions.

Calculons donc les fonctions à deux points dans la théorie de Dirac. En utilisant que $b_s|0\rangle = 0$ et $\langle 0|b_s^\dagger = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi^\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)|0\rangle &= \sum_{ss'}\int \widetilde{\mathrm{d}p}\,\widetilde{\mathrm{d}p'}\ e^{ip'y - ipx}u_s(\vec{p})\bar{u}_{s'}(\vec{p}\,')\langle 0|a_s(\vec{p})a_{s'}^\dagger(\vec{p}\,')|0\rangle \\
&= \int \widetilde{\mathrm{d}p}\underbrace{\sum_s u_s(\vec{p})^\alpha\bar{u}_s(\vec{p})_\beta}_{(\not{p}+m)^\alpha_\beta}\,e^{-ip(x-y)} \\
&= \int \widetilde{\mathrm{d}p}\ (\not{p}+m)^\alpha_\beta\,e^{-ip(x-y)}\,.
\end{aligned} \tag{8.52}$$

et de même

$$\langle 0|\overline{\psi}_\beta(y)\psi^\alpha(x)|0\rangle = -\int \widetilde{\mathrm{d}p}\ (\not{p}+m)^\alpha_\beta\,e^{-ip(y-x)}\,. \tag{8.53}$$

Pour se débarasser du signe moins, il convient de l'absorber dans la définition de l'*ordre chronologique pour les champs fermioniques* : le symbole T est défini d'inclure un facteur de (-1) s'il implique un échange d'ordre de deux opérateurs fermioniques,

$$\mathrm{T}\,\psi(x)\overline{\psi}(y) \equiv \begin{cases} \psi(x)\overline{\psi}(y)\,, & x^0 > y^0 \\ -\overline{\psi}(y)\psi(x)\,, & x^0 < y^0 \end{cases} \tag{8.54}$$

Un calcul équivalent à celui du cas bosonique (voir sec. 3.4) donne l'expression

$$\boxed{\langle 0|\,\mathrm{T}\,\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)} \equiv S_F(x-y)\,.} \tag{8.55}$$

Une remarque sur la notation : vu que

$$(\not{p}+m)(\not{p}-m) = \not{p}^2 - m^2\mathbb{1} = (p^2-m^2)\mathbb{1}\,, \tag{8.56}$$

on écrit parfois pour la transformée de Fourier de S_F

$$\widetilde{S}_F = \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon} \tag{8.57}$$

même si, strictement parlant, $\not{p}-m$ est une matrice.

La formule de LSZ pour les champs de Dirac

En analogie avec le champ scalaire, on peut obtenir une formule de réduction de LSZ pour des champs de Dirac avec interactions, mais celle-ci présente quelques complications supplémentaires : il faut distinguer entre les fermions dans l'état initial u, les antifermions dans l'état initial $\bar{v}$, les fermions dans l'état final $\bar{u}$ et les antifermions dans l'état final v. Avec les impulsions entrantes p_i $(i = 1 \ldots m)$ et les impulsions émergentes p'_j $(j = 1 \ldots n)$, et l'opérateur $(-i\overleftarrow{\not\partial} - m)$ défini d'agir vers la gauche, on trouve

$$\begin{aligned} \langle f|i\rangle = \int \mathrm{d}^4x_1 \ldots \mathrm{d}^4x'_n\; & e^{-i(p_1x_1+\ldots+p_mx_m-p'_1x'_1-\ldots-p'_nx'_n)} \\ & (-i)\bar{u}_{r'_1}(\vec{p}\,'_1)(i\overleftarrow{\not\partial}-m)_{x'_1}\ldots i\bar{v}_{s_m}(\vec{p}_m)(i\overleftarrow{\not\partial}-m)_{x_m} \\ & \langle 0|\,\mathrm{T}\,\psi(x_1)\ldots\psi(x'_1)\ldots\overline{\psi}(x_m)\ldots\overline{\psi}(x'_n)|0\rangle \\ & (-i)(-i\overleftarrow{\not\partial}-m)_{x_1}u_{s_1}(\vec{p}_1)\ldots i(-i\overleftarrow{\not\partial}-m)_{x'_n}v_{r'_n}(\vec{p}_n\,')\,. \end{aligned} \tag{8.58}$$

Ici m est la masse physique (le pôle dans le propagateur renormalisé). La condition

$$\langle 0|\psi(x)|0\rangle = 0 \tag{8.59}$$

est en fait assurée par invariance de Lorentz pour les champs spinoriels (contrairement au cas scalaire où elle peut nécessiter une redéfinition du champ, comme on a vu). De même, les conditions

$$\langle p,s,\text{fermion}|\psi(x)|0\rangle = 0 = \langle p,s,\text{antifermion}|\overline{\psi}(x)|0\rangle \tag{8.60}$$

pour tout état à un (anti)fermion avec impulsion p et spin s sont garanties pour des fermions de Dirac par la conservation du nombre fermionique. En revanche, les conditions de normalisation

$$\begin{aligned} \langle p,s,\text{fermion}|\overline{\psi}(x)|0\rangle &= \bar{u}_s(\vec{p})e^{-ipx} \\ \langle p,s,\text{antifermion}|\psi(x)|0\rangle &= v_s(\vec{p})e^{-ipx} \end{aligned} \tag{8.61}$$

devront être assurés par des conditions de renormalisation.

8.4 Les intégrales de chemin pour les fermions

On rappelle que les champs bosoniques vérifient des relations de *commutation*. Ils commutent, en particulier, dans la limite classique $\hbar \to 0$. On avait dérivé les amplitudes de transition dans la théorie quantique par le moyen des intégrales de chemin, qui sont des intégrales sur l'espace de configurations des champs classiques commutants.

Il n'est pas évident comment on peut faire pareil pour les champs fermioniques, vu qu'ils vérifient des relations d'*anticommutation*. Afin de définir l'intégrale de chemin, il faudrait donc des objets qui *anticommutent* dans la limite classique : $\psi\chi = -\chi\psi$. Par conséquent, un champ fermionique classique ne sera pas un champ à valeurs réelles ou complexes, mais à valeurs de *nombres de Grassmann*.

Formellement, une *algèbre de Grassmann* est définie comme algèbre libre associative, réelle ou complexe, générée par l'identité $\mathbb{1}$ et par un ensemble de *générateurs anticommutants* $\{\theta_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, modulo la relation $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$.

Un **exemple** (important en topologie et géométrie différentielle, mais aussi dans le traitement mathématique des théories de jauge classiques) avec un nombre fini de générateurs est l'*algèbre extérieure* sur un espace vectoriel. Si cet espace est l'espace tangent d'une variété de dimension n, elle se compose des formes différentielles (= champs tensoriels antisymétriques). Le produit dans cette algèbre est le produit extérieur $\wedge$ et les générateurs sont les différentielles $\{\mathrm{d}x^i\}$ par rapport à un système de coordonnées locales $\{x^i\}$. Ses éléments sont donc les sommes formelles $\sum_{k=0}^{n} \omega_{i_1\dots i_k}\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, où les ω sont des tenseurs antisymétriques.

Ultérieurement on va considérer un nombre *infini* de générateurs (même des familles $\mathcal{I}$ non dénombrables) : $\theta_i \to \theta(x)$.

Propriétés des nombres de Grassmann :

$$\theta_i^2 = 0 \tag{8.62}$$

$$[\theta_i\theta_j,\, \theta_k] = 0 \tag{8.63}$$

où plus généralement : les produits d'un nombre pair des θ commutent avec tous les éléments de l'algèbre.

Des *fonctions* sont définies par leur développement limité, nécessairement fini :

$$f(\theta) = A + \theta\, B \underbrace{+ \theta^2\, C + \dots}_{=0 \text{ car } \theta^2=0} \tag{8.64}$$

La *dérivée* (de gauche) $\frac{\partial}{\partial\theta}$ est définie sans ambiguïté par deux propriétés :

- linéarité
- $\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta},\, \theta\right\} = 1$ (cf. nombres commutants où on a $\left[\dfrac{\partial}{\partial x},\, x\right] = 1$)

Il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\,(A + \theta B) = B\,. \tag{8.65}$$

L'opérateur d'intégration (impropre) $\int \mathrm{d}\theta$ est définie par les propriétés

- linéarité
- $\displaystyle\int \mathrm{d}\theta\, f(\theta + \eta) = \int \mathrm{d}\theta\, f(\theta)$ (invariance par un changement de variables additif)
- $\displaystyle\int \mathrm{d}\theta\, \theta = 1$ (normalisation)

Il en resulte

$$\int \mathrm{d}\theta\,(A + \theta B) = B \int \mathrm{d}\theta\, \theta = B\,. \tag{8.66}$$

Alors intégration et différentiation sont effectivement la même opération.

La **complexification** de l'algèbre de Grassmann est définie de manière évidente : on traite θ_i et θ_i^* comme variables indépendantes (plutôt que leurs parties réelles et imaginaires). Il faut cependant noter la règle pour le conjugué complexe des produits de nombres de Grassmann, qui implique un changement d'ordre :

$$(\theta_i\theta_j)^* = \theta_j^*\theta_i^* = -\theta_i^*\theta_j^* \,. \tag{8.67}$$

Il est possible (et convenient) de formellement définir des **intégrales gaussiennes**, avec un nombre réel ou complexe a :

$$\int \mathrm{d}\theta^* \,\mathrm{d}\theta\, e^{-\theta^* a\theta} = \int \mathrm{d}\theta^* \,\mathrm{d}\theta\, (1-\theta^* a\theta) = \int \mathrm{d}\theta^* \,\mathrm{d}\theta\, (1+\theta a\theta^*) = \int \mathrm{d}\theta^*\, a\theta^* = a \tag{8.68}$$

Ce résultat est à comparer avec le cas de nombres commutants, où $\int \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z^*}{2\pi} e^{-z^* a z} = \frac{1}{a}$. Pour les intégrales gaussiennes multidimensionnelles, on trouve ($\to$ exercices) :

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{n} \int \mathrm{d}\theta_i^* \,\mathrm{d}\theta_i}_{\equiv \int \mathrm{d}^n\theta^* \,\mathrm{d}^n\theta} e^{-\theta_j^* A_{jk} \theta_k} = \det A \,. \tag{8.69}$$

À comparer avec le cas de nombres commutants, où $\int \frac{\mathrm{d}^n z\,\mathrm{d}^n z^*}{(2\pi)^n} e^{-z^\dagger A z} = \frac{1}{\det A}$. Plus généralement, on a

$$\int \mathrm{d}^n\theta^* \,\mathrm{d}^n\theta\, e^{-\theta^\dagger A\theta + \eta^\dagger\theta + \theta^\dagger\eta} = (\det A)\, e^{\eta^\dagger A^{-1}\eta} \,. \tag{8.70}$$

Notre objectif final est de définir des **intégrales de chemin** pour lesquelles on peut largement suivre les pas du cas bosonique, voir section 5.3. Les champs $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$ et les sources $\eta(x)$, $\bar\eta(x)$ sont des champs de Grassmann. La fonctionnelle génératrice de la théorie libre est

$$Z[\eta,\bar\eta] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\overline{\psi} \int \mathcal{D}\psi\, \exp\left(i \int \mathrm{d}^4x\, \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar\eta\psi + \overline{\psi}\eta \right) \tag{8.71}$$

Après un changement de variable d'intégration, on trouve

$$Z[\eta,\bar\eta] = Z[0,0]\, \exp\left(-\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \bar\eta(x)\, S_F(x-y)\, \eta(y) \right) \tag{8.72}$$

Les fonctions de correlation se calculent en prenant les dérivées fonctionnelles par rapport aux sources (mais il faut bien prendre en compte l'ordre des champs de Grassmann). Par exemple, pour la fonction à deux points de la théorie libre on trouve

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, \mathrm{T}\, \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0\rangle &= \frac{1}{Z[0,0]} \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x_1)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\right) Z[\eta,\bar\eta]\Big|_{\eta=\bar\eta=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta\bar\eta(x_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \exp\left(-\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \bar\eta(x)\, S_F(x-y)\, \eta(y) \right)\Big|_{\eta=\bar\eta=0} \\
&= -\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x_1)} \exp\left(-\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \bar\eta(x)\, S_F(x-y)\, \eta(y) \right)\Big|_{\eta=\bar\eta=0} \\
&= S_F(x_1-x_2)
\end{aligned} \tag{8.73}$$

comme il faut.

8.5 La théorie de Yukawa

En quatre dimensions on ne peut pas écrire une théorie renormalisable avec interactions qui ne contient que des fermions. En fait, la dimension du lagrangien est $4 = [\mathcal{L}] = [i\overline{\psi}\,\partial\!\!\!/\psi]$, alors la dimension du champ ψ est $[\psi] = \frac{3}{2}$ et tout terme d'interaction est de dimension > 4 (par exemple, $[(\overline{\psi}\psi)^2] = 6$), donc non renormalisable.

Une théorie renormalisable avec interactions qui contient des fermions de Dirac doit alors contenir d'autres champs aussi. L'exemple le plus simple est la *théorie de Yukawa* dont les degrés de liberté sont un fermion de Dirac ψ et un scalaire réel ϕ. Le lagrangien est

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{scalaire}} + y\,\phi\overline{\psi}\psi\,. \tag{8.74}$$

Ici le couplage y est sans dimension. La théorie de Yukawa sert comme modèle pour les interactions du boson de Higgs avec les fermions du modèle Standard, aux énergies au-dessous de l'échelle électrofaible.

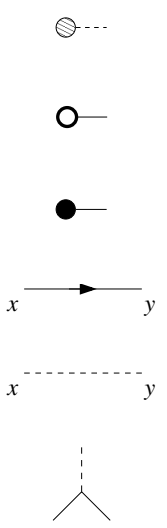
La **fonctionnelle génératrice** est

$$\begin{aligned} &Z[\eta,\bar\eta,J] \\ &= \int \mathcal{D}\overline{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\phi\ \exp\left(i\int \mathrm{d}^4x\ \overline{\psi}(i\,\partial\!\!\!/ - m_\psi)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + y\,\phi\overline{\psi}\psi + \bar\eta\psi + \overline{\psi}\eta + J\phi\right) \\ &= \exp\left(iy\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} i\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\right)\right)\ Z_0[\eta,\bar\eta,J] \end{aligned} \tag{8.75}$$

où on a séparé le terme d'interaction avec le même raisonnement que dans section 6.1, avec Z_0 donné par

$$Z_0[\eta,\bar\eta,J] \propto \exp\left(-\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{d}^4y\,\bar\eta(x)S_F(x-y)\eta(y)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{d}^4y\,J(x)D_F(x-y)J(y)\right). \tag{8.76}$$

Les termes dans le développement de la fonctionnelle génératrice peuvent être représentés par des diagrammes de Feynman qui se composent des élements suivants :



source externe J : $\quad i\int \mathrm{d}^4x\,J(x)$

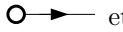
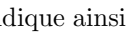
source externe η : $\quad i\int \mathrm{d}^4x\,\eta(x)$

source externe $\bar\eta$: $\quad i\int \mathrm{d}^4x\,\bar\eta(x)$

propagateur de fermion : $\quad S_F(x-y)$

propagateur de scalaire : $\quad D_F(x-y)$

vertex : $\quad \int \mathrm{d}^4x\,\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}$

Les propagateurs des fermions sont *orientés* (ce qui est indiqué par la flèche). Pour les propagateurs attachés aux sources externes, la direction est toujours  et ; aux vertex, il y a toujours une flèche qui entre et une qui sort. La flèche indique ainsi la direction du *flux de nombre fermionique*, conservé à travers le diagramme.

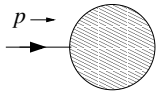
Comme pour le cas scalaire, les facteurs combinatoires se suppriment (aux facteurs de symétrie près) et on peut écrire la fonctionnelle génératrice en fonction des diagrammes comme

$$Z[J,\eta,\bar\eta] = Z_0[0,0,0]\sum_{\text{diagrammes } D}\frac{D}{\text{facteur de symétrie } S(D)}\,. \tag{8.77}$$

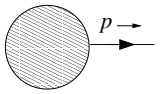
Règles de Feynman pour le calcul des amplitudes

Similairement au cas du champ scalaire, on peut aussi représenter les fonctions de correlation par des sommes des diagrammes de Feynman : les dérivées fonctionnelles par rapport aux sources

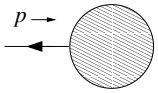
enlèvent les J, η et $\bar{\eta}$ et les extrémités des propagateurs correspondants sont étiquetés par x_i. Dans l'espace d'impulsions, les règles de Feynman sont obtenus par transformation de Fourier. Pour calculer les éléments de matrice, les pattes externes sont supprimées selon la formule LSZ, voir chapitre 7, et il faut donc considérer des diagrammes amputés. Sans démontrer les détails, les règles de Feynman qui en resultent sont :

1.a Fermions incidents : 

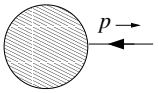
$= u_s(\vec{p})$

1.b Fermions émergents : 

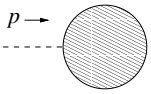
$= \bar{u}_s(\vec{p})$

1.c Antifermions incidents : 

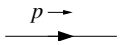
$= \bar{v}_s(\vec{p})$

1.d Antifermions émergents : 

$= v_s(\vec{p})$

1.e Scalaires externes : 

$= 1$

2.a Propagateurs de fermion : 

$= \dfrac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$

2.b Propagateurs de scalaire : 

$= \dfrac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$

3. Vertex : 
$= -iy$

4. Conservation des impulsions à chaque vertex.
5. Intégrer sur toutes les impulsions pas encore déterminées.
6. Diviser par le facteur de symétrie.
7. Déterminer le signe total du diagramme :
   - boucle fermionique $\Rightarrow$ facteur de (-1)
   - deux pattes externes fermioniques échangées $\Rightarrow$ facteur de (-1)

Chapitre 9

L'électrodynamique quantique

9.1 La quantification du champ électromagnétique

On rappelle que le *champ électromagnétique* classique est un tenseur antisymétrique, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, qui est contraint par l'*identité de Bianchi*

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} = 0\,. \tag{9.1}$$

Les équations de mouvement sont

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu\,, \tag{9.2}$$

avec $J = (\rho, \vec{j})$ le courant électromagnétique. Ensemble, les éqs. (9.1) et (9.2) sont les *équations de Maxwell*.

Une solution de la contrainte (9.1) est

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{9.3}$$

avec un vecteur A_μ, le *quadri-potentiel*. On utilise alors A_μ comme variable fondamentale ; les éqs. (9.2) sont les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L} = 0$ avec

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu\,. \tag{9.4}$$

Deux choix de A_μ sont équivalents physiquement (ils donnent le même $F_{\mu\nu}$) s'ils sont liés par une *transformation de jauge*

$$A_\mu(x) \;\to\; A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \tag{9.5}$$

avec $\alpha(x)$ une fonction quelconque. En résolvant la contrainte d'éq. (9.1) par l'introduction d'un champ de jauge, on a alors introduit une redondance dans la déscription de notre théorie. Cette redondance pose des difficultés pour sa quantification.

Un **problème** pour la quantification canonique est que la procédure naïve donne lieu aux contradictions. Le moment conjugué à A_μ est

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F_{\mu 0} \tag{9.6}$$

donc $\Pi_0 = 0$ et on ne peut pas imposer les relations de commutation canoniques

$$[A_0(t,\vec{x}), \Pi_0(t,\vec{x}'] \stackrel{?}{=} (\text{autre que } 0)\,. \tag{9.7}$$

Une possibilité d'éviter ce problème est de "fixer la jauge". Classiquement on imposerait une *condition de jauge* telle que, pour chaque configuration de champs, il existe un A_μ unique qui la

remplit. Exemples : $n^\mu A_\mu = 0$ pour un vecteur n^μ fixe (jauge axiale/du cône lumière/temporelle selon le signe de n^2, non covariante), $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (jauge de Coulomb, non covariante), $\partial_\mu A^\mu = 0$ (jauge de Lorenz, covariante).

Adoptons la jauge de Lorenz, avec laquelle l'équation de mouvement devient

$$\Box A^\mu = J^\mu \,. \tag{9.8}$$

On obtient la même équation de mouvement si on mofidie le lagrangien en ajoutant un terme :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 \tag{9.9}$$

et si on pose $\xi = 1$ ("jauge de Feynman"). Ce lagrangien modifié peut servir comme point de départ pour une quantification canonique du champ électromagnétique. Le moment conjugué est maintenant

$$\Pi_\mu = -\dot{A}_\mu \tag{9.10}$$

et les relations canoniques de commutation sont

$$[A^\mu(t,\vec{x}), \Pi_\nu(t,\vec{x}')] = i\delta^\mu_\nu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \,. \tag{9.11}$$

Si on poursuivait cette approche canonique, on tomberait sur un espace de Hilbert avec une *norme indéfinie*, mais la projection sur la partie avec une norme définie positive donne une théorie cohérente (*formalisme de Gupta-Bleuler*, quantification canonique du champ électromagnétique). Ce formalisme étant plus difficile à généraliser aux théories de jauge non-abéliennes, on va plutôt poursuivre une approche différente, basée sur les intégrales de chemin.

Un **problème** dans le formalisme de la quantification par l'intégrale de chemin est la prise en compte des degrés de liberté non physiques. En détail, si on essaye de définir une intégrale de chemin dans l'espace des configurations des quadripotentiels,

$$Z \stackrel{?}{=} \int \mathcal{D}A \; e^{iS[A]} \,, \tag{9.12}$$

alors on intègre sur des configurations physiquement équivalentes, liées l'une à l'autre par des transformations de jauge. Pour voir cela, regardons l'action classique sans sources en fonction de la transformée de Fourier $\tilde{A}_\mu$:

$$S = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) \left(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right) \tilde{A}_\nu(-k) \,. \tag{9.13}$$

Si on pose, par exemple, $\tilde{A}_\mu(k) = k_\mu \alpha(k)$ (avec $\alpha(k)$ une fonction quelconque : une telle configuration est alors "pure jauge", équivalente à $A_\mu = 0$), chacune de ces configurations contribue à l'intégrale de chemin avec un poids 1 car

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) \left(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right) \tilde{A}_\nu(-k) \Big|_{\tilde{A}_\mu(k) = k_\mu \alpha(k)} &= 0 \\ \Rightarrow \qquad e^{iS[A]} \Big|_{\tilde{A}_\mu(k) = k_\mu \alpha(k)} &= 1 \,. \end{aligned} \tag{9.14}$$

On a alors une infinité continue de configurations de champ de jauge qui contribuent toutes à l'intégrale de chemin, même si elles sont toutes physiquement équivalentes. Une méthode qui permettra de ne compter chaque configuration physique qu'une seule fois, et qui est utilisé surtout dans la quantification des champs de jauge non-abéliens, est l'*astuce de Faddeev-Popov*.

Astuce de Faddeev-Popov :

On considère une fonction $G(A)$ (une *condition de jauge* ; le champ de jauge sera ultérieurement contraint de vérifier $G(A) = 0$) dont on va préciser la forme plus tard. On insère 1 dans l'intégrale de chemin sous la forme

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \; \delta[G(A^{(\alpha)})] \det\left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha}\right) \,. \tag{9.15}$$

Ici $A_\mu^{(\alpha)}$ est obtenu de A_μ par une transformation de jauge,

$$A_\mu^{(\alpha)}(x) \equiv A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)\,. \tag{9.16}$$

Eq. (9.15) est la généralisation fonctionnelle de l'identité

$$1 = \int \mathrm{d}^n y\; \delta^{(n)}(y) = \int \mathrm{d}^n x \det\left(\frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}\right) \delta^{(n)}\left(y(x)\right)\,. \tag{9.17}$$

Soit $\omega(x)$ une fonction fixe ; elle définit alors un exemple d'une condition de jauge par

$$G(A) = \partial_\mu A^\mu - \omega(x)\,. \tag{9.18}$$

Avec ce $G(A)$, on obtient

$$G(A^{(\alpha)}) = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \alpha - \omega \tag{9.19}$$

et alors la dérivée fonctionnelle de G par rapport à α est l'opérateur d'alembertien :

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \Box\,. \tag{9.20}$$

Notons que $\delta G/\delta\alpha$ est *indépendant* de A_μ. (Dans une théorie non-abelienne, ce ne serait pas le cas, et on serait obligé d'introduire des champs non physiques appellés *fantômes* pour traiter la dépendance du champ de jauge.) En insérant éq. (9.15) dans l'intégrale de chemin, on obtient

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{D}A\; e^{iS[A]} &= \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \int \mathcal{D}\alpha\; \delta[G(A^{(\alpha)})] \det\left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right) \\
&= \det\left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A\; e^{iS[A]}\; \delta[G(A^{(\alpha)})] \\
&= \det\left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A^{(\alpha)}\; e^{iS[A^{(\alpha)}]}\; \delta[G(A^{(\alpha)})] \\
&= \det\left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A\; e^{iS[A]}\; \delta[G(A)] \\
&= \det(\Box) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A\; e^{iS[A]}\; \delta[\partial_\mu A^\mu - \omega]
\end{aligned} \tag{9.21}$$

Dans la deuxième ligne on a utilisé que le déterminant est indépendant de α. Dans la troisième ligne on a exploité l'invariance de jauge de l'action et le fait que $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^{(\alpha)}$. Dans la quatrième on a renommé la variable d'intégration. Dans la cinquième on s'est servi des éqs. (9.18) et (9.20). A noter que l'intégrale de chemin a été restreinte aux A_μ qui vérifient une condition de Lorenz généralisée $\partial_\mu A^\mu = \omega$. On a pu faire sortir le déterminant fonctionnel de Jacobi ("déterminant de Faddeev-Popov") de l'intégrale. Notons que les coefficients $\det\Box$ et $\int \mathcal{D}\alpha$ sont formellement infinis, mais il s'agit des facteurs de normalisation globales pas importants.

Pour progresser, il convient de ne pas considérer seulement une fonction ω mais d'intégrer sur tous ω avec une pondération gaussienne (menant à une classe de jauges dites *jauges* R_ξ)

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{D}A\; e^{iS[A]} &= N(\xi) \int \mathcal{D}\omega\; e^{-i\int \mathrm{d}^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}} \det(\Box) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A\; e^{iS[A]}\; \delta[\partial_\mu A^\mu - \omega] \\
&= N(\xi) \det(\Box) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A\; e^{iS[A]} e^{-i\int \mathrm{d}^4x\, \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2} \\
&= N(\xi) \det(\Box) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A\; e^{i\int \mathrm{d}^4x\, (\mathcal{L}+\mathcal{L}_{\mathrm{gf}})}\,.
\end{aligned} \tag{9.22}$$

Ici ξ est une constante, $N(\xi)$ est un facteur de normalisation et le terme de *fixation de jauge* ("gauge-fixing term") est

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gf}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\,. \tag{9.23}$$

L'expression finale contient toujours plusieurs facteurs divergents et mal définis, comme $\det(\Box)$ ou $\int \mathcal{D}\alpha$, mais ils apparaissent *en facteur*. De conséquence, pour le calcul des fonctions de correlation, ces facteurs se suppriment dans la fonctionnelle génératrice normalisée

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \frac{\int \mathcal{D}A\, e^{i\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}+\mathcal{L}_{\mathrm{gf}}+J_\mu A^\mu)}}{\int \mathcal{D}A\, e^{i\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}+\mathcal{L}_{\mathrm{gf}})}} \tag{9.24}$$

À la fin de la procédure, on a effectivement ajouté un terme supplémentaire $\mathcal{L}_{\mathrm{gf}}$ au lagrangien.

Les observables physiques doivent être indépendants du choix de *paramètre de jauge* ξ. Pour des calculs en pratique, le choix

$$\xi = 1 \tag{9.25}$$

est souvent le plus convenient (*jauge de Feynman*). Parfois d'autres choix comme $\xi \to 0$ (jauge de Landau, avec la limite à prendre à la fin du calcul) peuvent convenir selon le problème sous étude.

Propagateur du photon :

Nous pouvons maintenant calculer la fonction à deux points pour le photon en jauge R_ξ générale :

$$\boxed{\begin{aligned}\langle 0|\,\mathrm{T}\,A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle &= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\nu(y)}\frac{Z[J]}{Z[0]}\right)\Big|_{J=0} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)}\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left(g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right).\end{aligned}} \tag{9.26}$$

L'électrodynamique pure, ne contenant que des photons, est une théorie libre, et alors toutes les autres fonctions de correlation sont triviales (déconnexes). On obtient une théorie beaucoup plus intéressante et importante si on couple le photon aux autres champs, par exemple, aux champs de Dirac.

9.2 L'électrodynamique quantique

Rappelons deux résultats qui nous aideront à construire le lagrangien de l'électrodynamique quantique :

- On a vu aux exercices que le lagrangien de Maxwell avec un couplage à un courant, $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$, est invariant de jauge, pourvu que $\partial_\mu J^\mu = 0$.
- Le théorème de Noether (sec. 2.3) dit que, si l'action est invariante sous une symétrie continue, $S[\Phi_i] = S[\Phi_i']$ (où $\Phi_i \to \Phi_i' = \Phi_i + \alpha\delta\Phi_i + \mathcal{O}(||\alpha||^2)$ et $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha\partial_\mu\hat{J}^\mu + \mathcal{O}(||\alpha||^2)$), alors le courant
$$J^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)}\delta\Phi_i - \hat{J}^\mu \tag{9.27}$$
est conservé.

Regardons maintenant

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} = \overline{\psi}(i\,\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{9.28}$$

et la transformation

$$\psi \to e^{ie\alpha}\psi\,, \qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi}e^{-ie\alpha}\,. \tag{9.29}$$

Ici e dans l'exposant est une constante. Pour α constant, le lagrangien est invariant par cette transformation, $\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} \to \mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}}$, et par conséquent $\hat{J} = 0$ et S est invariant aussi. On a $\delta\psi = ie\psi$, $\delta\overline{\psi} = -ie\overline{\psi}$ et le courant de Noether est

$$\boxed{J^\mu = e\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,.} \tag{9.30}$$

On va identifier la constante e avec la *charge électrique élémentaire* et la charge $\int \mathrm{d}^3x\, J^0$ avec la *charge électrique* portée par le champ ψ.

Dans ce contexte, J^μ n'est plus une "source externe" (= un moyen auxiliaire pour calculer les fonctions de correlation qui ne figure plus dans le résultat final) mais une source *physique* : les électrons sont la source du champ électromagnétique, le courant est construit des champs quantifiés.

Tout ensemble :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} &= \overline{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &= \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}} \tag{9.31}$$

où la *dérivée covariante de jauge* est

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu \equiv \gamma^\mu(\partial_\mu + ie\,A_\mu)\,. \tag{9.32}$$

On note que éq. (9.31) est invariant par des rotations de phase *locales* où $\alpha = \alpha(x)$:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) &\to \overline{\psi}(x)e^{-ie\alpha(x)} \\ A_\mu(x) &\to A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x)\end{aligned} \tag{9.33}$$

car

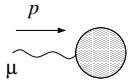
$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} \to \underbrace{\overline{\psi}e^{-ie\alpha}(i\not{\partial} - m)e^{ie\alpha}\psi}_{\overline{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi - e\overline{\psi}(\not{\partial}\alpha)\psi} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\overline{\psi}e^{-ie\alpha}\left(\not{A} - (\not{\partial}\alpha)\right)e^{ie\alpha}\psi = \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}\,. \tag{9.34}$$

Autrement dit, l'invariance du lagrangien de Dirac par des *transformations de jauge* locales nécessite un couplage à un champ de jauge (le photon). Le lagrangien (9.31) qui résulte est celui de l'*électrodynamique quantique*.

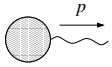
Règles de Feynman pour la QED

Par le même raisonnement que pour le champ scalaire, on obtient les règles de Feynman dans l'espace des impulsions pour l'électrodynamique quantique dans la jauge de Feynman $\xi = 1$:

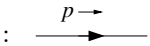
1.a (Anti)fermions externes : voir théorie de Yukawa, section 8.5

1.b Photons incidents : 

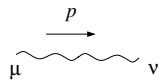
$= \varepsilon_\mu(p)$

1.c Photons émergents : 

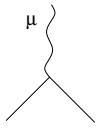
$= \varepsilon^*_\mu(p)$

2.a Propagateur de fermion : 

$= \dfrac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

2.b Propagateur de photon : 

$= \dfrac{-i\,g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$

3. Vertex : 

$= -ie\gamma^\mu$

4. Conservation des impulsions à chaque vertex.
5. Intégrer sur toutes les impulsions pas encore déterminées.
(6. Diviser par le facteur de symétrie — toujours 1 en QED spinorielle.)
7. Déterminer le signe total du diagramme.

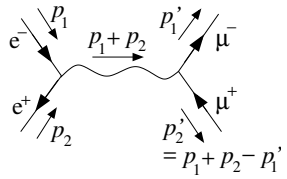
Ici $\varepsilon_\mu(p)$ est le quadrivecteur de *polarisation* du photon, $\varepsilon_\mu(p) = (0, \vec{\varepsilon}(p))$ avec $|\vec{\varepsilon}| = 1$ et $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p} = 0$ (polarisation transverse).

9.3 Processus élémentaires au niveau d'arbre

Ici on va regarder quelques processus de diffusion $2 \to 2$ à l'ordre le plus bas en théorie des perturbations, afin d'illustrer l'application des règles de Feynman.

La diffusion $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Il n'y a qu'un seul diagramme au niveau d'arbre qui contribue à ce processus. Le diagramme amputé est, dans la jauge de Feynman,



$$\begin{aligned} &= \bar{v}_{s_2}(p_2)(-ie\gamma^\mu)u_{s_1}(p_1)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2}\right)\bar{u}_{s_1'}(p_1')(-ie\gamma^\nu)v_{s_2'}(p_2') \\ &= \frac{ie^2}{(p_1+p_2)^2}\left(\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\mu u_{s_1}(p_1)\right)\left(\bar{u}_{s_1'}(p_1')\gamma_\mu v_{s_2'}(p_2')\right) = i\,\mathcal{M}_{\text{fi}}\,. \end{aligned} \tag{9.35}$$

On a

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(v^\dagger\gamma^0)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v \tag{9.36}$$

et donc

$$|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\left(\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\mu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma_\nu v_{s_2}(p_2)\right)\left(\bar{u}_{s_1'}(p_1')\gamma_\mu v_{s_2'}(p_2')\bar{v}_{s_2'}(p_2')\gamma^\nu u_{s_1'}(p_1')\right) \tag{9.37}$$

On va maintenant calculer la section efficace de diffusion. Plus précisement on calculera la section efficace *non polarisée* : on prend la *moyenne* $\frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}$ des spins incidents et la *somme* $\sum_{s_1'}\sum_{s_2'}$ des spins émergents. Avec m et M les masses de l'électron et du muon :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2 s_1' s_2'}|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \\ &\quad= \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2 s_1' s_2'}\bar{v}_{s_2\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}u_{s_1\beta}\bar{u}_{s_1\gamma}\gamma_{\nu\,\gamma\delta}v_{s_2\delta}\bar{u}_{s_1'\alpha}\gamma_{\mu\,\alpha'\beta'}v_{s_2'\beta'}\bar{v}_{s_2'\gamma'}\gamma^\nu_{\gamma'\delta'}u_{s_1'\delta'} \\ &\quad= \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\frac{1}{4}\left(\not{p}_2 - m\right)_{\delta\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\left(\not{p}_1 + m\right)_{\beta\gamma}\gamma_{\nu\,\gamma\delta}\left(\not{p}_1' + M\right)_{\delta'\alpha'}\gamma_{\mu\,\alpha'\beta'}\left(\not{p}_2' - M\right)_{\beta'\gamma'}\gamma^\nu_{\gamma'\delta'} \\ &\quad\approx \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\frac{1}{4}\,\text{tr}\left(\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma_\nu\right)\text{tr}\left((\not{p}_1' + M)\gamma_\mu(\not{p}_2' - M)\gamma^\nu\right) \end{aligned} \tag{9.38}$$

On a utilisé $\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m$ et $\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} - m$. Dans la dernière ligne on a négligé m par rapport à M, ce qui est justifiée par le fait que $M \approx 100$ MeV et $m \approx 0.5$ MeV. Les identités pour les traces des matrices de Dirac

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4\,g^{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4\,(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ \text{tr}(\text{produit d'un nombre impair de } \gamma) &= 0 \end{aligned} \tag{9.39}$$

permettent de simplifier l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2 s_1' s_2'} |\mathcal{M}_{\rm fi}|^2 \\
&\quad = \frac{1}{4}\frac{e^4}{(p_1+p_2)^4}\, 4\,(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} p_1 p_2)\; 4\left(p'_{1\mu} p'_{2\nu} + p'_{1\nu} p_{2\mu'} - g_{\mu\nu}(p'_1 p'_2 + M^2)\right) \\
&\quad = \frac{8\,e^4}{(p_1+p_2)^4}\left((p_1 p_1')(p_2 p_2') + (p_1 p_2')(p_2 p_1') + M^2\, p_1 p_2\right) .
\end{aligned} \tag{9.40}$$

Dans le référentiel du centre de masse on a, toujours en négligeant la masse de l'électron,

$$\begin{aligned}
p_1 &= (E, 0, 0, E) \\
p_2 &= (E, 0, 0, -E) \\
p_1' &= (E, \vec{k}) \\
p_2' &= (E, -\vec{k})
\end{aligned} \tag{9.41}$$

avec $\vec{k}^2 = E^2 - M^2$ et $\vec{k}\cdot\vec{e}_z = |\vec{k}|\cos\theta$. Dans ce référentiel,

$$\begin{aligned}
(p_1+p_2)^2 &= 4\,E^2 \\
p_1 p_2 &= 2\,E^2 \\
p_1 p_1' &= p_2 p_2' = E^2 - E\,|\vec{k}|\cos\theta \\
p_1 p_2' &= p_2 p_1' = E^2 + E\,|\vec{k}|\cos\theta\,.
\end{aligned} \tag{9.42}$$

et alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{\rm spins} |\mathcal{M}_{\rm fi}|^2 &= \frac{8\,e^4}{16\,E^4}\left(E^2(E-|\vec{k}|\cos\theta)^2 + E^2(E+|\vec{k}|\cos\theta)^2 + 2\,M^2E^2\right) \\
&= e^4\left(\left(1+\frac{M^2}{E^2}\right) + \left(1-\frac{M^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right) .
\end{aligned} \tag{9.43}$$

Pour calculer la section efficace avec éq. (7.21), on simplifie d'abord les facteurs cinématiques avec éqs. (9.41) et avec $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2$. On note que

$$\mathrm{d}k\;\delta\left(f(k)\right) = \mathrm{d}k \sum_{k_i\,:\,f(k_i)=0} \frac{1}{|f'(k_i)|}\delta(k-k_i) \tag{9.44}$$

et en particulier

$$\mathrm{d}k\;\delta\left(2E - 2\sqrt{k^2+M^2}\right) = \mathrm{d}k\left(\frac{2\,k}{E}\right)^{-1}\delta\left(k - \sqrt{E^2-M^2}\right) \tag{9.45}$$

ce qui nous permet de poser

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{E_1\,E_2\,|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}\frac{\mathrm{d}^3p_1'}{2\,E_1'(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3p_2'}{2\,E_2'(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta(E_1+E_2-E_1'-E_2')\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_1'-\vec{p}_2') \\
&\quad = \frac{1}{2E^2}\frac{k^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\Omega}{4\,E_1'\,E_2'}\frac{1}{16\pi^2}\delta(2\,E-2\sqrt{k^2+M^2}) \\
&\quad = \frac{1}{2E^2}\frac{k^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\Omega}{4E^2}\frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{2k}{E}\right)^{-1}\delta\left(k-\sqrt{E^2-M^2}\right) \\
&\quad = \frac{1}{256\pi^2}\frac{\sqrt{E^2-M^2}}{E^3}\,\mathrm{d}\Omega \\
&\quad = \frac{1}{256\pi^2}\frac{1}{E^2}\sqrt{1-\frac{M^2}{E^2}}\,\mathrm{d}\Omega\,.
\end{aligned} \tag{9.46}$$

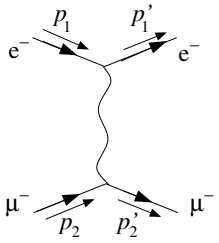
Enfin, selon éqs. (7.21), (9.43) et (9.46),

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{16\,E^2}\sqrt{1-\frac{M^2}{E^2}}\left(\left(1+\frac{M^2}{E^2}\right)+\left(1-\frac{M^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right)} \tag{9.47}$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$. La section efficace totale est enfin donnée par

$$\boxed{\sigma = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}\sqrt{1-\frac{M^2}{E^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{M^2}{E^2}\right).} \tag{9.48}$$

La diffusion $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ (diffusion de Coulomb)



Le seul diagramme qui contribue est le même qu'avant, après une rotation par 90°. Il donnera donc le même résultat pour $\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2$ si on remplace $p_2 \leftrightarrow -p_1'$:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \frac{8\,e^4}{(p_1-p_1')^4}\left((p_1p_2)(p_1'p_2')+(p_1p_2')(p_2p_1')-M^2\,p_1p_1'\right). \tag{9.49}$$

Cela est un exemple de *symétrie de croisement*, une propriété générale des amplitudes de diffusion : on peut remplacer des particules dans l'état initial par des antiparticules dans l'état final dans les éléments de matrice et vice-versa,

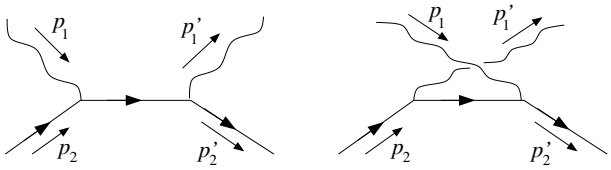
$$\mathcal{M}_{\text{fi}}\left(\phi(p)+\ldots \to \ldots\right) = \mathcal{M}_{\text{fi}}\left(\ldots \to \ldots + \bar{\phi}(-p)\right) \tag{9.50}$$

avec $\bar{\phi}$ = antiparticule de ϕ.

Pour la cinématique de ce processus, voir les exercices.

La diffusion de Compton $e^-\gamma \to e^-\gamma$

Ici on a deux diagrammes qui contribuent au niveau d'arbre :



Sans écrire explicitement les indices de spin, on trouve donc

$$\begin{aligned}
i\,\mathcal{M}_{\text{fi}} &= \bar{u}(p_2')(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(p_1')\frac{i\,(\not{p}_1+\not{p}_2+m)}{(p_1+p_2)^2-m^2}(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(p_1)u(p_2) \\
&\quad + \bar{u}(p_2')(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(p_1)\frac{i\,(\not{p}_2-\not{p}_1'+m)}{(p_2-p_1')^2-m^2}(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(p_1')u(p_2) \\
&= -ie^2\varepsilon_\mu^*(p_1')\varepsilon_\nu(p_1)\bar{u}(p_2')\left(\frac{\gamma^\mu(\not{p}_1+\not{p}_2+m)\gamma^\nu}{(p_1+p_2)^2-m^2}+\frac{\gamma^\nu(\not{p}_2-\not{p}_1'+m)\gamma^\mu}{(p_2-p_1')^2-m^2}\right)u(p_2) \\
&= -ie^2\varepsilon_\mu^*(p_1')\varepsilon_\nu(p_1)\bar{u}(p_2')\left(\frac{\gamma^\mu(\not{p}_1+\not{p}_2+m)\gamma^\nu}{2\,p_1p_2}-\frac{\gamma^\nu(\not{p}_2-\not{p}_1'+m)\gamma^\mu}{2\,p_2p_1'}\right)u(p_2) \\
&= -ie^2\varepsilon_\mu^*(p_1')\varepsilon_\nu(p_1)\bar{u}(p_2')\left(\frac{\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu+2\gamma^\mu p_2^\nu}{2\,p_1p_2}+\frac{\gamma^\nu\not{p}_1'\gamma^\mu-2\gamma^\nu p_2^\mu}{2\,p_2p_1'}\right)u(p_2).
\end{aligned} \tag{9.51}$$

Pour la troisième égalité on a utilisé $p_1^2 = {p_1'}^2 = 0$ et $p_2^2 = m^2$. Pour la quatrième égalité on a utilisé l'algèbre de Clifford et $(\not{p}_2 - m)u(p_2) = 0$.

Pour calculer la section efficace non polarisée, on prend la somme sur les spins et polarisations dans l'état final et la moyenne sur ceux dans l'état initial. La somme des polarisations des photons se simplifie avec l'aide de l'*identité de Ward* (prouvée aux exercices) :

> Si $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ est une amplitude avec un photon extérieur d'impulsion p qui peut donc s'écrire $\mathcal{M}_{\text{fi}} = \mathcal{M}^\mu(p)\varepsilon^*_\mu(p)$, alors $\mathcal{M}^\mu(p)\, p_\mu = 0$.

L'identité de Ward est une manifestation de l'invariance de jauge des amplitudes.

On en déduit

$$\boxed{\sum_{\text{polarisations}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = -g_{\mu\nu}\mathcal{M}^\mu(p)\mathcal{M}^{*\nu}(p)} \tag{9.52}$$

Preuve : on choisit un référentiel avec $\vec{p}$ en direction des z, $(p^\mu) = (p, 0, 0, p)$. Puisque la polarisation du photon est transverse, elle est donnée par une combinaison linéaire de $(\varepsilon_1^\mu) = (0, 1, 0, 0)$ et $(\varepsilon_2^\mu) = (0, 0, 1, 0)$, et

$$\begin{aligned}\sum_\varepsilon |\varepsilon^*_\mu(p)M^\mu(p)|^2 &= |\mathcal{M}^1(p)|^2 + |\mathcal{M}^2(p)|^2 \\ &= |\mathcal{M}^1(p)|^2 + |\mathcal{M}^2(p)|^2 + \underbrace{|\mathcal{M}^3(p)|^2 - |\mathcal{M}^0(p)|^2}_{\text{0 selon l'identité de Ward}} = -g_{\mu\nu}\mathcal{M}^\mu(p)\mathcal{M}^{*\nu}(p)\,.\end{aligned} \tag{9.53}$$

(On note que l'identité de Ward dans ce référentiel est $p\mathcal{M}^0(p) - p\mathcal{M}^3(p) = 0$.)

Conclusion : pour la diffusion de Compton, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\substack{\text{spins,}\\ \text{polarisations}}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\,\mathrm{tr}\Bigg((\not{p}_2' + m)\left(\frac{\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p_2^\nu}{2\,p_1p_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_1' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_2^\mu}{2\,p_2p_1'}\right) \\ &\qquad\qquad (\not{p}_2 + m)\left(\frac{\gamma^\sigma \not{p}_1 \gamma^\rho + 2\gamma^\rho p_2^\sigma}{2\,p_1p_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_1' \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma p_2^\rho}{2\,p_2p_1'}\right)\Bigg) \\ &= 4\,e^4\Bigg(\frac{4m^4 - 2m^2p_2p_2' + 4m^2p_1p_2 - 2m^2p_1p_2' + 2(p_1p_2)(p_1'p_2')}{(2p_1p_2)^2} \\ &\qquad + \frac{4m^4 - 2m^2p_2p_2' - 4m^2p_1'p_2 + 2m^2p_1'p_2' + 2(p_1'p_2)(p_1p_2')}{(2p_1'p_2)^2} \\ &\qquad - \frac{4m^4 + 2m^2p_1p_2 + 2m^2p_1'p_2}{(2p_1p_2)(2p_2p_1')}\Bigg)\,.\end{aligned} \tag{9.54}$$

La deuxième égalité suit d'un long calcul où on utilise les identités pour les matrices de Dirac de façon répétée. Enfin si on pose $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$ on obtient

$$\frac{1}{4}\sum_{\substack{\text{spins,}\\ \text{polarisations}}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = 2e^4\left(\frac{p_2p_1'}{p_2p_1} + \frac{p_2p_1}{p_2p_1'} + 2m^2\left(\frac{1}{p_1p_2} - \frac{1}{p_1'p_2}\right) + m^4\left(\frac{1}{p_1p_2} - \frac{1}{p_1'p_2}\right)^2\right)\,. \tag{9.55}$$

La section efficace est donnée par la *formule de Klein-Nishina* ($\to$ exercices) :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right)\,. \tag{9.56}$$

Ici ω et ω' sont les énergies des photons et θ l'angle entre eux.

L'annihilation électron-positron : $e^- e^+ \to \gamma\gamma$

Ce processus est de nouveau lié par la symétrie de croisement à la diffusion de Compton (on remplace $p_1 \leftrightarrow -p_2'$) :

$$\frac{1}{4} \sum_{\substack{\text{spins,} \\ \text{polarisations}}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = -2e^4 \left(\frac{p_2 p_1'}{p_2 p_2'} + \frac{p_2 p_2'}{p_2 p_1'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_2' p_2} + \frac{1}{p_1' p_2} \right) - m^4 \left(\frac{1}{p_2 p_2'} + \frac{1}{p_1' p_2} \right)^2 \right) . \tag{9.57}$$

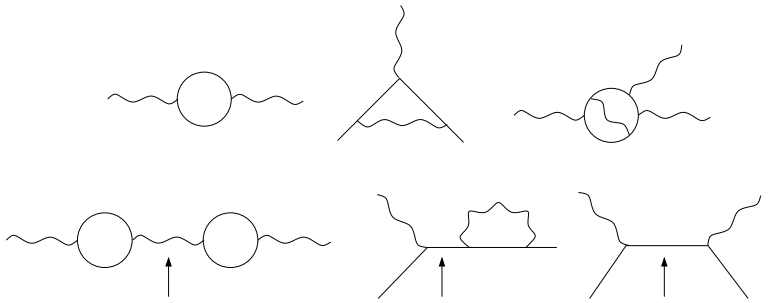
On n'en détaillera pas la cinématique (voir p.ex. le livre de Peskin/Schroeder).

9.4 L'électrodynamique quantique à une boucle

L'objectif de cette section est de renormaliser la QED au niveau d'une boucle. On va terminer avec le calcul des corrections quantiques au moment magnétique de l'électron, une des premières prédictions de la QED renormalisée et un sujet qui est toujours d'actualité pour la recherche.

Commençons par une **définition** : un diagramme de Feynman connexe est *irréductible à une particule* (1PI, "1-particle irreducible") $\Leftrightarrow$: le diagramme reste connexe si on coupe un des propagateurs internes.

Exemples :



diagrammes 1PI

diagrammes non 1PI

(les flèches indiquent où on peut couper en deux).

Le degré de divergence superficiel

Une expression algébrique pour un diagramme typique en QED prendra la forme

$$(\text{diagramme}) \propto \int \frac{\mathrm{d}^4 p_1 \dots \mathrm{d}^4 p_n}{(\not{p}_1 - m) \dots (\not{p}_j - m)\, p_{j+1}^2 \dots p_n^2} \,.$$

On définit le *degré de divergence superficiel* $D \equiv$ (la puissance des p au numérateur) $-$ (la puissance des p au dénominateur),

$$D = 4\,L - P_e - 2\,P_\gamma \tag{9.58}$$

avec $L =$ le nombre de boucles (chacune contribuant $\mathrm{d}^4 p_i$), $P_e =$ le nombre de propagateurs d'électron internes (chacun contribuant $\frac{1}{\not{p}_j - m}$), $P_\gamma =$ le nombre de propagateurs de photon internes (chacun contribuant $\frac{1}{p_k^2}$). Pour une première estimation du comportement d'un diagramme dans l'ultraviolet, on intègre les impulsions jusqu'à $|p| = \Lambda$, puis on fait tendre $\Lambda \to \infty$, ce qui donne

- $D = 0$: divergence *logarithmique* $\propto \int^\Lambda \frac{\mathrm{d}p}{p} \propto \log \Lambda$
- $D > 0$: divergence de *puissance* $\propto \int^\Lambda p^{D-1}\,\mathrm{d}p \propto \Lambda^D$
- $D < 0$: *convergence* $\propto \int^\Lambda \frac{\mathrm{d}p}{p^{1-D}}$

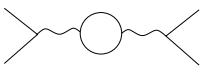
Mais cette estimation peut être *erronée*. Voici quelques contrexemples typiques :



est fini, même si $D = 0$ (il n'y a pas d'intégration)



$\propto \log \Lambda$, même si $D = 2$, car les termes $\propto \Lambda^2$ se suppriment



$\propto \log \Lambda$, même si $D = -2$ (il y a un sous-diagramme divergent)

Les divergences des *diagrammes réductibles* ont toujours leur origine dans ses *sous-diagrammes* 1PI. Étudions donc les divergences des diagrammes 1PI.

En QED, on a pour chaque diagramme

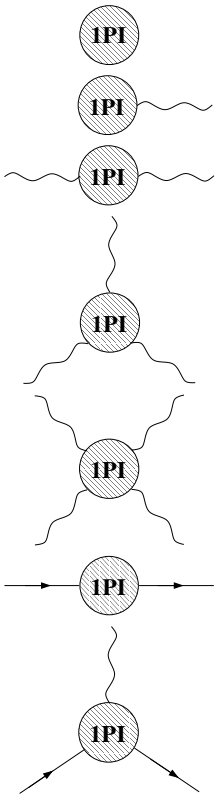
$$\begin{aligned} L &= P_e + P_\gamma - V + 1 \\ V &= 2\,P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}\,(2P_e + N_e) \end{aligned} \tag{9.59}$$

avec L, $P_{e,\gamma}$, V, $N_{e,\gamma}$ = le nombre des boucles, des propagateurs d'électron/photon, des vertex et des électrons/photons externes respectivement. Donc le degré de divergence superficiel peut s'écrire

$$D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2\,P_\gamma = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e\,, \tag{9.60}$$

ce qui montre qu'il ne dépend que des *lignes externes*.

Les diagrammes 1PI potentiellement divergents en QED sont alors



$(D = 4)$: pas d'intérêt (renormalise la densité d'énergie du vide, pas observable)

$(D = 3)$: zéro selon théorème de Furry ($\Rightarrow$ Ex.)

$(D = 2)$: divergence logarithmique (identité de Ward $\Rightarrow$ divergence quadratique s'annule)

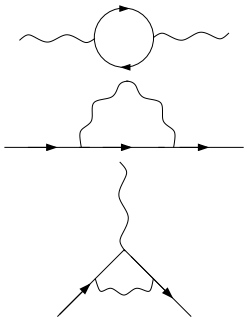
$(D = 1)$: zéro selon théorème de Furry

$(D = 0)$: convergent (identité de Ward $\Rightarrow$ divergence logarithmique s'annule)

$(D = 1)$: divergence logarithmique (symétrie chirale $\Rightarrow$ pas de divergence linéaire)

$(D = 0)$: divergence logarithmique

Les seuls diagrammes 1PI divergents sont alors ceux avec soit deux photons externes, soit deux électrons externes, soit un photon et deux électrons externes. Au niveau d'une boucle il n'y a qu'un représentant de chaque classe :



correction au propagateur de photon

correction au propagateur de l'électron

correction au vertex

Théorie des perturbations renormalisée pour la QED

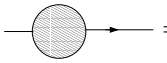
Il faudra régulariser et renormaliser la théorie afin de traiter les divergences. Pour ce faire, il convient de se servir de nouveau du formalisme de la théorie des perturbations renormalisée, comme on a fait pour le champ scalaire.

Écrivons le lagrangien de l'électrodynamique quantique comme

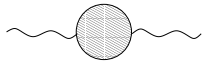
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\,\partial\!\!\!/ - m_0)\psi - e_0\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu\,. \tag{9.61}$$

Ici la "masse nue" m_0 *ne correspond pas* à la masse physique de l'électron (qui est la position du pôle du propagateur) et la "charge nue" e_0 *n'est pas* le couplage physique, si on prend en compte les corrections d'ordre supérieur en théorie des perturbations.

En revanche, on sait que les propagateurs exactes (avec toutes corrections inclues) prendront la forme



$$= \frac{iZ_2}{\not p - m} + \text{régulier} \tag{9.62}$$



$$= \frac{-iZ_3\, g_{\mu\nu}}{p^2} + \text{régulier} \tag{9.63}$$

avec Z_2, Z_3 des *constantes de renormalisation de la fonction d'onde* et m = la masse physique (du pôle) de l'électron.

La formule de LSZ n'est valide que pour $Z_2 = Z_3 = 1$. Afin de calculer les amplitudes de transition, il faut donc redéfinir

$$\psi = \sqrt{Z_2}\psi_r\,, \qquad A^\mu = \sqrt{Z_3}A^\mu_r \tag{9.64}$$

tel que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3 F_{r\,\mu\nu}F_r^{\mu\nu} + Z_2\,\overline{\psi}_r(i\not\partial - m_0)\psi_r - e_0\,Z_2\sqrt{Z_3}\,\overline{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r\,A_{r\,\mu}\,. \tag{9.65}$$

Définissons les quantités Z_1 et δ_m par

$$Z_1 \equiv \frac{e_0}{e}Z_2\sqrt{Z_3}\,, \qquad \delta_m \equiv Z_2\,m_0 - m \tag{9.66}$$

où e est le couplage physique (défini par une certaine condition de renormalisation, voir ci-dessous) et m est la masse du pôle. De plus, on définit

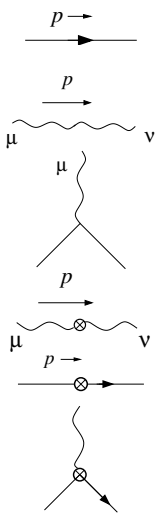
$$\delta_{1,2,3} \equiv Z_{1,2,3} - 1\,. \tag{9.67}$$

Cela permet de réécrire le lagrangien en fonction des paramètres physiques et des contre-termes :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F_{r\,\mu\nu}F_r^{\mu\nu} + \overline{\psi}_r(i\not\partial - m)\psi_r - e\,\overline{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r\,A_{r\,\mu}\\ &-\frac{1}{4}\delta_3\,F_{r\,\mu\nu}F_r^{\mu\nu} + \overline{\psi}_r(i\delta_2\not\partial - \delta_m)\psi_r - e\delta_1\overline{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r\,\mu}\,.\end{aligned} \tag{9.68}$$

La première ligne d'éq. (9.68) correspond à la structure du lagrangien original d'éq. (9.61) mais avec les remplacements $\psi, A^\mu \to \psi_r, A^\mu_r$ et avec m_0 et e_0 remplacés par la masse et le couplage physique. La deuxième ligne contient les contre-termes.

Similairement à la théorie ϕ^4, on trouve les *règles de Feynman pour l'électrodynamique quantique en théorie des perturbations renormalisée* :



$$= \frac{i}{\not p - m + i\epsilon}$$

$$= \frac{-i\,g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

$$= -ie\gamma^\mu$$

$$= -i(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\delta_3$$

$$= i(\not p\,\delta_2 - \delta_m)$$

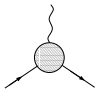
$$= -ie\,\gamma^\mu\,\delta_1$$

Les contre-termes δ_1, δ_2, δ_3, δ_m doivent être déterminés, ordre par ordre en théorie des perturbations, de la manière que les *conditions de renormalisation* sont remplies :

I. le pôle du propagateur de l'électron est à $\not{p} = m$, voir éq. (9.62)

II. le résidu de ce pôle est i (c.à.d. $Z_2 = 1$), voir éq. (9.62)

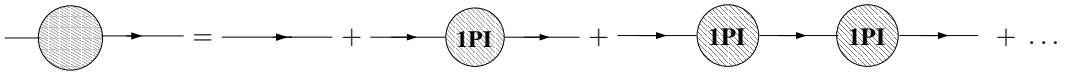
III. le résidu du propagateur du photon au pôle $p^2 = 0$ est $-i\, g_{\mu\nu}$ (l'invariance de jauge garantie que le pôle est toujours à $p^2 = 0$ et que le photon reste alors sans masse → ex.), voir éq. (9.63)

IV. pour l'énergie du photon → 0 et les deux fermions sur couche de masse,  → $-ie\,\gamma^\mu$ (ce qui fixe la charge de l'électron = e).

Cette dernière condition est un peu subtile à cause d'une complication que l'on trouve dans des théories avec des particules sans masse : lorsque les impulsions des photons extérieurs se rapprochent à 0 on tombe sur des *divergences infrarouges*. Une définition judicieuse des observables physiques permet de s'en débarasser. Ici on ne les discutéra pas mais on les régularisera avec une masse fictive $\mu \neq 0$ pour le photon ; à la fin du calcul on posera $\mu = 0$.

Propagateur de l'électron

On définit l'*auto-énergie* de l'électron $-i\Sigma(\not{p}) \equiv$  (la somme des tous diagrammes 1PI avec un électron entrant et un électron sortant, sans compter les propagateurs de Dirac externes). La fonction à deux points exacte est alors donnée par une série géométrique :



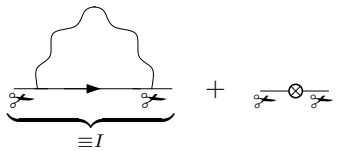
$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}(-i\Sigma(\not{p}))\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \\
&\qquad + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}(-i\Sigma(\not{p}))\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}(-i\Sigma(\not{p}))\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \dots \\
&= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)^n \qquad (9.69) \\
&= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \left(1 - \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)^{-1} \\
&= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p}) + i\epsilon}
\end{aligned}
$$

On vérifie facilement que les conditions de renormalisation I. et II. peuvent être exprimées comme conditions sur Σ et sur sa dérivée à $\not{p} = m$:

$$\text{(Condition de renormalisation I.)} \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma(\not{p})|_{\not{p}=m} = 0 \tag{9.70}$$

$$\text{(Condition de renormalisation II.)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\not{p}}\Sigma(\not{p})\bigg|_{\not{p}=m} = 0 \tag{9.71}$$

Calculons maintenant $-i\Sigma(\not{p})$ au premier ordre. Au niveau d'une boucle, il n'y a que deux diagrammes :

$-i\Sigma(\not{p})$ =  (sciseaux = diagrammes sans pattes externes)

(9.72)

Selon les règles de Feynman, avec une masse fictive μ pour le photon, le diagramme à une boucle est

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}(-ie\gamma^\mu)\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^\nu)\frac{-i\,g_{\mu\nu}}{(q-p)^2-\mu^2+i\epsilon} \\ &= -e^2\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu q^\nu+\gamma^\mu\gamma_\mu\, m}{(q^2-m^2)((q-p)^2-\mu^2)} \\ &= -e^2\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu q^\nu+\gamma^\mu\gamma_\mu\, m}{(q^2-2pqx+x^2p^2-x^2p^2+xp^2-(1-x)m^2-x\mu^2)^2} \\ &= -e^2\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu(\ell^\nu+x\,p^\nu)+\gamma^\mu\gamma_\mu\, m}{(\ell^2-\Delta^2)^2} \\ &= -e^2\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu\gamma_\mu m+xp^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu}{(\ell^2-\Delta^2)^2}\,. \end{aligned} \tag{9.73}$$

On a utilisé l'astuce de Feynman pour combiner les dénominateurs, changé la variable d'intégration $q\ \to\ \ell=q-px$, introduit $\Delta^2=x(x-1)p^2+(1-x)m^2+x\mu^2$ et utilisé que $\int\mathrm{d}^4\ell\,\ell^\mu\,f(\ell^2)=0$ (invariance de Lorentz). Le résultat diverge dans l'ultraviolet, il faut alors le *régulariser* et *renormaliser*.

Comme dans la section 6.3 on va utiliser la *régularisation dimensionnelle* : la dimension d'espace-temps sera $d=4-2\epsilon$ et

$$I\ \to\ -e^2\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{\gamma^\mu\gamma_\mu m+xp^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu}{(\ell^2-\Delta^2)^2}\,. \tag{9.74}$$

Dans $d=4-2\epsilon$ dimensions, les identités pour les matrices γ sont modifiées car $\delta^\mu{}_\mu=d$:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu=4\quad(d=4)\,,\qquad\qquad \gamma^\mu\gamma_\mu=4-2\epsilon\quad(d=4-2\epsilon) \tag{9.75}$$

$$\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu=-2\gamma_\nu\quad(d=4)\,,\qquad\qquad \gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu=(2\epsilon-2)\gamma_\nu\quad(d=4-2\epsilon) \tag{9.76}$$

Alors

$$I=-e^2\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{(4-2\epsilon)m+(2\epsilon-2)x\not{p}}{(\ell^2-\Delta^2)^2}\,. \tag{9.77}$$

On va appliquer la *formule universelle pour l'évaluation des intégrales à une boucle en régularisation dimensionnelle*, qui généralise l'éq. (6.40) et qui prend déjà en compte la rotation de Wick :

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}^dq}{(2\pi)^d}\frac{(q^2)^\beta}{(q^2-\Delta^2)^\alpha}=(-1)^{\alpha+\beta}i(4\pi)^{-\frac{d}{2}}\left(\Delta^2\right)^{\beta-\alpha+\frac{d}{2}}\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\beta-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(\alpha)}\,.} \tag{9.78}$$

$$\Rightarrow\qquad I=-\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\ \left((4-2\epsilon)m-2(1-\epsilon)x\not{p}\right)(4\pi)^\epsilon\,\Gamma(\epsilon)\left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^\epsilon\,. \tag{9.79}$$

Avec éq. (A.12) et $A^\epsilon=1+\epsilon\log A+\mathcal{O}(\epsilon^2)$:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{ie^2}{16\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\,\left((4-2\epsilon)m-(2-2\epsilon)x\not{p}\right)(1+\epsilon\log(4\pi))\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E\right)\left(1-\epsilon\log\Delta^2\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\frac{ie^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\bar\epsilon}(4m-\not{p})+\not{p}-2m+2\int_0^1\mathrm{d}x\,(x\not{p}-2m)\log\Delta^2(x,\not{p})\right)+\mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \tag{9.80}$$

où $\frac{1}{\bar\epsilon}\equiv\frac{1}{\epsilon}+\log(4\pi)-\gamma_E$.

On impose la condition de renormalisation II., éq. (9.71) :

$$0=-i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\not{p}}\Sigma(\not{p})\bigg|_{\not{p}=m}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\not{p}}\left(I+i(\not{p}\,\delta_2-\delta_m)\right)\bigg|_{\not{p}=m}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\not{p}}\bigg|_{\not{p}=m}+i\delta_2 \tag{9.81}$$

avec

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\not{p}}\right|_{\not{p}=m} &= \frac{ie^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} - 1 - 2\int_0^1 \mathrm{d}x\ \left(x\log\Delta^2 + (x\not{p} - 2m)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\not{p}}\log\Delta^2\right)\right)\Big|_{\not{p}=m} \\ &= \frac{ie^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} - 1 - 2\int_0^1 \mathrm{d}x\ \left(x\log\left((x-1)^2m^2 + x\mu^2\right) + 2\frac{x(x-1)(x-2)m^2}{(x-1)^2m^2 + x\mu^2}\right)\right).\end{aligned} \tag{9.82}$$

Donc le contre-terme δ_2 est donné par

$$\delta_2 = -\frac{e^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} - 1 - 2\int_0^1 \mathrm{d}x\ \left(x\log\left((x-1)^2m^2 + x\mu^2\right) + 2\frac{x(x-1)(x-2)m^2}{(x-1)^2m^2 + x\mu^2}\right)\right), \tag{9.83}$$

ou en retenant seulement les parties non nulles lorsque $\mu \to 0$

$$\delta_2 = -\frac{e^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} + 2\log\mu^2 - 3\log m^2 + 4\right). \tag{9.84}$$

De même, on impose la condition de renormalisation I., éq. (9.70) :

$$0 = -i\Sigma(\not{p})\Big|_{\not{p}=m} = (I + i(\not{p}\,\delta_2 - \delta_m))\Big|_{\not{p}=m} \tag{9.85}$$

et on trouve alors

$$\begin{aligned}\delta_m &= -iI\Big|_{\not{p}=m} + m\delta_2 \\ &= -\frac{e^2}{16\pi^2}\,m\left(\frac{4}{\bar{\epsilon}} - 2 - 4\int_0^1 \mathrm{d}x\left(\log\left((x-1)^2m^2 + x\mu^2\right) + \frac{x(x-1)(x-2)m^2}{(x-1)^2m^2 + x\mu^2}\right)\right) \\ &\to -\frac{e^2}{16\pi^2}\,m\left(\frac{4}{\bar{\epsilon}} + 2\log\mu^2 - 6\log m^2 + 8\right) \qquad (\text{quand } \mu \to 0).\end{aligned} \tag{9.86}$$

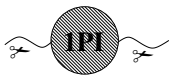
Enfin l'auto-énergie de l'électron est $-i\Sigma(\not{p}) = I + i(\not{p}\,\delta_2 - \delta_m)$, ou avec éqs. (9.80), (9.83) et (9.86)

$$\boxed{-i\Sigma(\not{p}) = -\frac{ie^2}{8\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\ \left((x\not{p} - 2m)\log\frac{x(x-1)p^2 + (1-x)m^2 + x\mu^2}{(x-1)^2m^2 + x\mu^2} - 2(\not{p} - m)\frac{x(x-1)(x-2)m^2}{(x-1)^2m^2 + x\mu^2}\right)} \tag{9.87}$$

- Ce résultat est toujours divergent dans l'IR (l'intégrale ne converge pas si $\mu = 0$). Mais les observables physiques, soigneusement définies, seront finies lorsque $\mu \to 0$. Un traitement détaillé des divergences IR est donné p.ex. dans le livre de Peskin et Schroeder.
- En revanche, tous les termes sont finis dans l'UV : il n'y a plus de dépendence de ϵ.

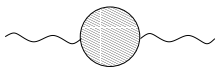
Propagateur du photon

Selon les exercices, la structure tensorielle des graphes 1PI sans pattes externes contribuant à la fonction à deux points du photon est



$$= \quad i\Pi^{\mu\nu}(p) = i(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\Pi(p^2) \tag{9.88}$$

et la fonction à deux points exacte, avec toutes les corrections incluses, peut s'écrire avec une fonction $\Pi(p^2)$ (l'*auto-énergie* du photon) comme

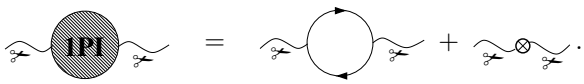


$$= \quad \frac{-i}{p^2(1 - \Pi(p^2))}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + (\text{termes dépendant de } \xi)\,. \tag{9.89}$$

La condition de renormalisation III. est donc équivalent à

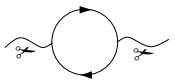
$$\Pi(0) = 0\,. \tag{9.90}$$

Calculons $\Pi^{\mu\nu}$ à une boucle : il y a deux diagrammes qui contribuent,



(9.91)

Selon les règles de Feynman,

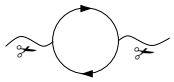


$$\begin{aligned}
&= (-1)(-ie)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \operatorname{tr}\left(\gamma^\mu \frac{i(\not{q}+m)}{(q^2-m^2+i\epsilon)}\gamma^\nu \frac{i(\not{q}+\not{p}+m)}{(q+p)^2-m^2+i\epsilon}\right) \\
&= -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{\operatorname{tr}\left(\gamma^\mu(\not{q}+m)\gamma^\nu(\not{q}+\not{p}+m)\right)}{(q^2+2xpq+x^2p^2-x^2p^2+xp^2-m^2)^2} \\
&= -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{\operatorname{tr}\left(\gamma^\mu(\not{\ell}-x\not{p}+m)\gamma^\nu(\not{\ell}-x\not{p}+\not{p}+m)\right)}{(\ell^2-\Delta^2)^2} \\
&= -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{\operatorname{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\lambda\ell_\kappa\ell_\lambda - x(1-x)\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\kappa p_\lambda p_\kappa + \gamma^\mu\gamma^\nu m^2\right)}{(\ell^2-\Delta^2)^2} .
\end{aligned} \tag{9.92}$$

On a défini $\ell = q + px$ et $\Delta^2 = x(x-1)p^2 + m^2$. Le (-1) de la première ligne vient de la boucle fermionique. En $d = 4 - 2\epsilon$ dimensions, grace à l'invariace de Lorentz on peut remplacer, sous l'intégrale $\int \mathrm{d}^d\ell$,

$$\ell_\kappa\ell_\lambda \;\to\; \frac{\ell^2 g_{\kappa\lambda}}{d} = \frac{\ell^2 g_{\kappa\lambda}}{4-2\epsilon} \tag{9.93}$$

donc



$$= 4\,e^2 \int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \left(\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon}\frac{\ell^2\, g^{\mu\nu}}{(\ell^2-\Delta^2)^2} + \frac{x(1-x)(2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - m^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2-\Delta^2)^2}\right) . \tag{9.94}$$

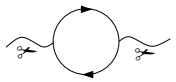
L'intégrale du permier terme est, selon éq. (9.78),

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1-\epsilon}{2-\epsilon}\frac{\ell^2\, g^{\mu\nu}}{(\ell^2-\Delta^2)^2} \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \Delta^2 \,(1+\epsilon\log 4\pi)\left(1-\epsilon\log\Delta^2\right)\frac{\Gamma(3-\epsilon)\Gamma(-1+\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)}\frac{1-\epsilon}{2-\epsilon} \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \Delta^2 \,(1+\epsilon\log 4\pi)\left(1-\epsilon\log\Delta^2\right)\Gamma(-1+\epsilon)(1-\epsilon) \\
&= \frac{i}{16\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \Delta^2 \,(1+\epsilon\log 4\pi)\left(1-\epsilon\log\Delta^2\right)\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E+1\right)(1-\epsilon) \\
&= \frac{i}{16\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \Delta^2 \left(\frac{1}{\bar\epsilon}-\log\Delta^2\right) \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, (x(1-x)p^2 g^{\mu\nu} - m^2 g^{\mu\nu})\left(\frac{1}{\bar\epsilon}-\log\Delta^2\right)
\end{aligned} \tag{9.95}$$

où on a utilisé éqs. (A.9) et (A.13), et toujours $\frac{1}{\bar\epsilon} \equiv \frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E$. L'intégrale du deuxième terme dans éq. (9.94) est, selon éq. (9.78),

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{x(1-x)(2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - m^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2-\Delta^2)^2} \\
&= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \,(1+\epsilon\log 4\pi)\left(1-\epsilon\log\Delta^2\right)\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E\right)\left(x(1-x)(2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - m^2 g^{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \left(x(1-x)(2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - m^2 g^{\mu\nu}\right)\left(\frac{1}{\bar\epsilon}-\log\Delta^2\right) .
\end{aligned} \tag{9.96}$$

Dans la somme des intégrales (9.95) et (9.96), les termes qui ne sont pas proportionnels à $(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$ se suppriment et éq. (9.94) devient



$$= i(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\widehat{\Pi}(p^2) \tag{9.97}$$

où

$$\widehat{\Pi}(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{\bar{\epsilon}} - \int_0^1 \mathrm{d}x\; x(1-x)\log\Delta^2\right). \tag{9.98}$$

On impose la condition de renormalisation III. qui implique

$$\delta_3 = \widehat{\Pi}(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{\bar{\epsilon}} - \int_0^1 \mathrm{d}x\; x(1-x)\log m^2\right) = -\frac{e^2}{12\pi^2}\left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} - \log m^2\right). \tag{9.99}$$

Tous ensemble, on a trouvé l'auto-énergie du photon à une boucle

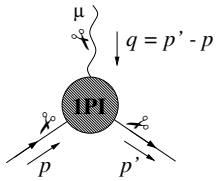
$$\boxed{\Pi(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\; x(x-1)\log\frac{x(x-1)p^2 + m^2}{m^2}\,.} \tag{9.100}$$

Remarques :

- Des divergences "quadratiques" (qui impliqueraient une renormalisation de masse pour le photon, et donc une violation de l'invariance de jauge) sont absentes grace à l'identité de Ward. Mais cela *n'est pas garanti* indépendamment du schéma de régularisation. [1] On a *choisi* la régularisation dimensionnelle qui preserve l'invariance de jauge / l'identité de Ward.
- Le logarithme en tant que fonction complexe a une *coupure* à $x(x-1)p^2 + m^2 = 0$ qui commence à $p^2 = 4m^2$, car $x(x-1) \geq \frac{1}{4}$ si $x \in [0,1]$. L'interprétation de cette structure est qu'il s'agît du seuil cinématique pour la production d'une paire électron-positron réelle. A partir de cette énergie, les fermions dans la boucle peuvent dévenir réels.
- On peut utiliser éq. (9.100) pour calculer le *potentiel électrostatique* dans la limite non relativiste :
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}\left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \ldots\right) \tag{9.101}$$
Le premier terme est le terme de Coulomb. La correction implique que, à courtes distances ($\lesssim$ longueur d'onde de Compton de l'électron), la force électromagnétique devient *plus forte*. Intuitivement, cet effet est causée par la "polarisation du vide" due aux paires virtuelles de e^+ e^- à longue distance. Un électron suffisamment énergétique peut pénétrer le "nuage d'électrons virtuels". En fait, on va montrer dans le dernier chapitre que, à très hautes énergies, la théorie devient fortement couplée et la théorie des perturbations n'est plus valide.

Vertex

Pour renormaliser le vertex, on définit la fonction Γ^μ par la somme de diagrammes 1PI amputés avec un photon et deux électrons :



$$\equiv \quad -ie\Gamma^\mu(p,p')\,. \tag{9.102}$$

Ici e est la charge physique de l'électron. La fonction Γ^μ permet une formulation plus précise de la condition de renormalisation IV. : avec les électrons externes sur couche de masse, $p^2 = p'^2 = m^2$, et dans la limite $q \to 0$, il faut que

$$\bar{u}_s(\vec{p}\,')\Gamma^\mu(p,p')u_r(\vec{p})\Big|_{p^2=p'^2=m^2,\, q\to 0} = \bar{u}_s(\vec{p}\,')\gamma^\mu u_r(\vec{p}) \tag{9.103}$$

1. Plus précisément : Il n'y a jamais de divergence quadratique en régularisation dimensionnelle, mais a priori il aurait pu y avoir une divergence $\propto g^{\mu\nu}$ venant de l'intégrale (9.95) sans un terme $\propto p^\mu p^\nu$ correspondant. Le fait que la régularisation respecte l'identité de Ward garantie que ce n'est pas le cas.

(Avec cette condition, on obtient la loi de Coulomb habituelle comme cas limite de la diffusion de Coulomb à basse énergie, voir chap. 9.3.)

La structure tensorielle de Γ^μ peut se décomposer, en supposant que les électrons (mais pas le photon) soient sur leur couche de masse, comme

$$\Gamma^\mu(p,p')\Big|_{p^2=p'^2=m^2} = \gamma^\mu A(q^2) + (p^\mu + p'^\mu)\, B(q^2) + q^\mu\, C(q^2)\,. \tag{9.104}$$

Ici A, B et C sont des fonctions scalaires. Selon l'identité de Ward,

$$q_\mu \bar u(\vec p\,')\Gamma^\mu(p,\,p')u(\vec p)\Big|_{p^2=p'^2=m^2} = 0 \tag{9.105}$$

et alors

$$0 = \big(\bar u(\vec p\,')\not q\, u(\vec p)A + (p'^2 - p^2)B\,\bar u(\vec p\,')u(\vec p) + q^2 C\,\bar u(\vec p\,')u(\vec p)\big)\Big|_{p^2=p'^2=m^2}\,. \tag{9.106}$$

Le premier terme du membre de droite d'éq. (9.106) s'annule car

$$\bar u(\vec p\,')\not q\, u(\vec p) = \bar u(\vec p\,')\,(\not p' - \not p)\,u(p) = \bar u(\vec p\,')\,(m-m)\,u(\vec p) = 0\,. \tag{9.107}$$

Le deuxième terme du membre de droite d'éq. (9.106) s'annule car $p^2 = m^2 = p'^2$. On conclut qu'éq. (9.105) est vérifée pourvu que

$$C(q^2) = 0\,. \tag{9.108}$$

Par contre, les deux fonctions $A(q^2)$ et $B(q^2)$ restent à déterminer. Il est pratique courante d'employer deux autres fonctions équivalentes F_1 et F_2 qui sont liées à A et B par l'*identité de Gordon*

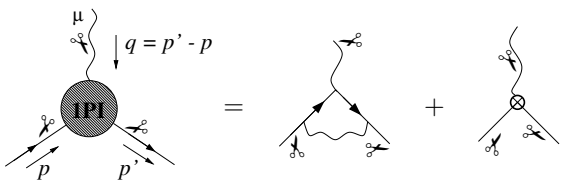
$$\bar u(\vec p\,')\gamma^\mu u(\vec p) = \bar u(\vec p\,')\left(\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\gamma^{\mu\nu}q_\nu}{m}\right)u(\vec p) \tag{9.109}$$

tel que

$$\boxed{\bar u(\vec p\,')\Gamma^\mu(p,p')u(\vec p)\Big|_{p^2=p'^2=m^2} = \bar u(\vec p\,')\left(\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\gamma^{\mu\nu}q_\nu}{m}F_2(q^2)\right)u(\vec p)\Big|_{p^2=p'^2=m^2}\,.} \tag{9.110}$$

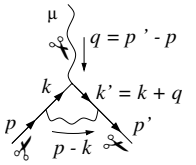
L'identité de Gordon permet d'identifier $F_1 = A + 2mB$ et $F_2 = -2mB$. Les $F_{1,2}$ s'appellent *facteurs de forme*. Au niveau de l'arbre on a $F_1 = 1$ et $F_2 = 0$.

Qu'est-ce que F_1 et F_2 au niveau d'une boucle ? Les diagrammes qui contribuent à Γ^μ sont



(9.111)

Le diagramme à une boucle donne l'expression



$$\begin{aligned} &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i\,g_{\nu\rho}}{(k-p)^2+i\epsilon}(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not k'+m)}{k'^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^\mu)\frac{i(\not k+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^\rho) \\ &= -e^3\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\nu(\not k'+m)\gamma^\mu(\not k+m)\gamma_\nu}{((k-p)^2+i\epsilon)\,(k'^2-m^2+i\epsilon)\,(k^2-m^2+i\epsilon)}\,. \end{aligned} \tag{9.112}$$

On se sert de l'astuce de Feynman pour combiner trois dénominateurs :

$$\frac{1}{((k-p)^2)\,(k'^2-m^2)\,(k^2-m^2)} = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z\;\delta(1-x-y-z)\frac{2}{D^3} \tag{9.113}$$

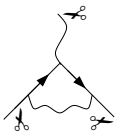
avec

$$D = x(k^2-m^2)+y(k'^2-m^2)+z(k-p)^2 \equiv \ell^2-\Delta^2\,, \qquad \ell = k+yq-zp\,, \quad \Delta^2 = -xyq^2+(1-z)^2m^2\,. \tag{9.114}$$

Ici on a utilisé que $x+y+z=1$ et on a posé $p^2 = p'^2 = m^2$ ($\Rightarrow 2pq = -q^2$). Le numérateur est

$$\begin{aligned}
&\gamma^\nu(\not k + \not q + m)\gamma^\mu(\not k + m)\gamma_\nu \\
&\quad = \gamma^\nu(\not\ell - y\not q + z\not p + \not q + m)\gamma^\mu(\not\ell - y\not q + z\not p + m)\gamma_\nu \\
&\quad = \gamma^\nu(\not\ell\gamma^\mu\not\ell\gamma_\nu + \gamma^\nu(\not q - y\not q + z\not p + m)\gamma^\mu(-y\not q + z\not p + m)\gamma_\nu + \underbrace{(\text{termes linéaires en } \ell)}_{\text{0 sous l'intégrale}}
\end{aligned} \tag{9.115}$$

Tout ensemble :



$$= \quad -e^3 \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\delta(1-x-y-z)$$

$$\left(\underbrace{\frac{2\gamma^\nu\not\ell\gamma^\mu\not\ell\gamma_\nu}{(\ell^2-\Delta^2)^3}}_{\text{divergent}} + \underbrace{\frac{2\gamma^\nu(\not q - y\not q + z\not p + m)\gamma^\mu(-y\not q + z\not p + m)\gamma_\nu}{(\ell^2-\Delta^2)^3}}_{\text{convergent dans l'UV}} \right). \tag{9.116}$$

Il y a une divergence IR que l'on régularise avec une masse du photon μ, ce qui change la définition de Δ^2 :

$$\Delta^2 = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 + z\mu^2\,. \tag{9.117}$$

Le premier terme est divergent aussi dans l'UV. La régularisation dimensionnelle en $d = 4-2\epsilon$ dimensions donne, sachant que $\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma_\nu = -2\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\lambda + 2\epsilon\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\kappa$ et $\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu = -2(1-\epsilon)\gamma^\mu$ et en utilisant les identités (9.78) et (9.93) :

$$\int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{2\gamma^\nu\not\ell\gamma^\mu\not\ell\gamma_\nu}{(\ell^2-\Delta^2)^3} = \frac{i}{8\pi^2}\gamma^\mu\left(\frac{1}{\bar\epsilon} - 1 - \log\Delta^2\right). \tag{9.118}$$

Le deuxième terme donne

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{2\gamma^\nu(\not q - y\not q + z\not p + m)\gamma^\mu(-y\not q + z\not p + m)\gamma_\nu}{(\ell^2-\Delta^2)^3} = -\frac{i}{16\pi^2}\frac{\gamma^\nu((1-y)\not q + z\not p + m)\gamma^\mu(-y\not q + z\not p + m)\gamma_\nu}{\Delta^2}\,. \tag{9.119}$$

Afin de déterminer le contre-terme δ_1, il faut isoler A et B dans la limite $q \to 0$, poser $F_1 = A + 2mB$ (selon éq. (9.109)) et appliquer condition de renormalisation IV ($F_1 \to 1$ pour $q \to 0$).

- Cette procédure mène au résultat final

$$\boxed{\delta_1 = \delta_2\,.} \tag{9.120}$$

- On a alors $Z_1 = Z_2$, ce qui implique que, dans le lagrangien éq. (9.65)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3 F_{r\,\mu\nu}F_r^{\mu\nu} + Z_2\,\overline{\psi}_r(i\not\partial - m_0)\psi_r - eZ_1\,\overline{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r\,A_{r\,\mu} \tag{9.121}$$

  les termes $\not\partial$ et $ie\not A$ forment la dérivée covariante $\not D$ *même après la prise en compte des corrections radiatives* : *L'invariance de jauge est préservée.*

Le facteur de forme F_2 peut être extrait de la partie finie : le numérateur d'éq. (9.119) est

$$\begin{aligned}
N &\equiv \gamma^\nu((1-y)\not q + z\not p + m)\gamma^\mu(-y\not q + z\not p + m)\gamma_\nu \\
&= \gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma_\nu\,((1-y)q_\lambda + zp_\lambda)\,(-yq_\kappa + zp_\kappa) + \gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma_\nu m\,((1-y)q_\lambda + zp_\lambda) \\
&\qquad + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma_\nu m(-yq_\kappa + zp_\kappa) + m^2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu \\
&= -2\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\lambda\,((1-y)q_\lambda + zp_\lambda)\,(-yq_\kappa + zp_\kappa) + 4m\,((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu) - 2\,m^2\gamma^\mu \\
&= -2\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\lambda\,((1-y)p'_\lambda - (1-y-z)p_\lambda)\,(-yp'_\kappa + (y+z)p_\kappa) \\
&\qquad + 4m\,((1-2y)p'^\mu - (1-2y-2z)p^\mu) - 2m^2\gamma^\mu
\end{aligned} \tag{9.122}$$

On multiplie avec $\bar{u}(\vec{p}')$ à gauche et $u(\vec{p})$ à droite, puis on utilise l'algèbre de Clifford pour placer les facteurs de $\not{p}$ à côté de $u(\vec{p})$ et ceux de $\not{p}'$ à côté de $\bar{u}(\vec{p}')$, ce qui permet de remplacer $\not{p}u(\vec{p}) = mu(\vec{p})$ et $\bar{u}(\vec{p}')\not{p}' = \bar{u}(\vec{p}')m$. Avec

$$\gamma^\kappa\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^\kappa + 2g^{\mu\kappa}\,, \quad \gamma^\mu\gamma^\lambda = -\gamma^\lambda\gamma^\mu + 2g^{\mu\lambda}\,, \quad \gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\lambda = -\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\kappa - 2\gamma^\mu g^{\lambda\kappa} + 2\gamma^\lambda g^{\mu\kappa} + 2\gamma^\kappa g^{\mu\lambda} \tag{9.123}$$

on identifie le coefficient de $(p+p')^\mu$:

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{p}')Nu(\vec{p}) &= 4m\,\bar{u}(\vec{p}')\Big(-(1-y)(y+z)(p^\mu+p'^\mu) + (1-y-y^2)p'^\mu \\ &\qquad + (-1+3y+3z-2zy-z^2-y^2)p^\mu + (\text{termes } \propto \gamma^\mu)\Big)u(\vec{p}) \\ &= 4m\,\bar{u}(\vec{p}')\Big(-(1-y)(1-x)(p^\mu+p'^\mu) + (1-y-y^2)p'^\mu + (1-x-x^2))p^\mu \\ &\qquad + (\text{termes } \propto \gamma^\mu)\Big)u(\vec{p})\,.\end{aligned} \tag{9.124}$$

On a utilisé $x+y+z=1$. Le dénominateur d'éq. (9.119) et le domaine d'intégration d'éq. (9.116) étant symétriques par $x \leftrightarrow y$, on peut remplacer

$$\begin{aligned}&4m\Big(-(1-y)(1-x)(p^\mu+p'^\mu) + (1-y-y^2)p'^\mu + (1-x-x^2))p^\mu\Big) \\ &\to\ 4m\,\left(-(1-y)(1-x) + \frac{1}{2}\left(1-y-y^2+1-x-x^2\right)\right)(p+p')^\mu = 2m\,z(1-z)(p+p')^\mu\,.\end{aligned} \tag{9.125}$$

Enfin, avec $F_2(q^2) = -2mB(q^2)$ et éqs. (9.116), (9.119) et (9.125),

$$\boxed{F_2(q^2) = \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\delta(1-x-y-z)\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - q^2xy}\,.} \tag{9.126}$$

(Cette expression est convergente dans l'IR, alors on peut faire tendre la masse du photon vers 0). En particulier, on trouve à $q^2 = 0$:

$$\begin{aligned}F_2(0) &= \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\delta(1-x-y-z)\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}y\,\frac{z}{(1-z)} \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \\ &= 0.0011614\,.\end{aligned} \tag{9.127}$$

$F_2(0)$ correspond à une contribution d'ordre supérieur au *moment magnétique de l'électron*. Pour voir cela, regardons le lagrangien effectif au premier ordre en dérivées

$$\mathcal{L} = e\,F_1(0)\overline{\psi}\not{A}\psi + \frac{e}{2m}F_2(0)F_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi + \ldots \tag{9.128}$$

Avec un champ externe classique $F_{\mu\nu}$ dérivé du potentiel $A = (0, 0, Bx, 0)$ (alors $F_{12} = -F_{21} = B$ et toutes autres composantes de $F_{\mu\nu}$ zéro, ce qui correspond à un champ magnétique en direction des z) on trouve le hamiltonien d'interaction

$$H_I = -eB\int \mathrm{d}^3x\,\overline{\psi}\left(x\gamma^2 + \frac{\alpha}{2\pi m}\gamma^{12}\right)\psi + \ldots \tag{9.129}$$

Le premier terme correspond au couplage du spin $\vec{S}$ de l'électron au champ magnétique de la mécanique quantique. Il donne un moment magnétique $\vec{\mu} = g\frac{e}{2m}\vec{S}$ avec $g = 2$. Cette valeur de g reçoit une correction de $F_2(0)$ par le deuxième terme. La valeur expérimentelle est en fait

$$g = 2.0011597 \tag{9.130}$$

en bon accord avec notre calcul (on s'attendait un écart de l'ordre $\alpha^2 \approx 10^{-4}$ qui provient des termes d'ordre supérieur en théorie des perturbations que l'on a négligés).

Les calculs les plus récents de $g-2$ prennent en compte des corrections à cinq boucles, avec des contributions de $\mathcal{O}(10\,000)$ diagrammes de Feynman, et incluent aussi des corrections des autres particules du modèle standard. Vu qu'il est également possible de mesurer $g-2$ à une très grande précision, cette observable est idéale pour comparer théorie et expérience et pour ainsi confirmer que le formalisme de la TQC donne des prédictions précises, dérivées des premiers principes.

Chapitre 10

Le groupe de renormalisation

10.1 La théorie ϕ^4 à une boucle revisitée

On rappelle l'ancien résultat pour l'élément de matrice de la diffusion $\phi\phi \to \phi\phi$ à une boucle dans la théorie ϕ^4, éq. (7.10) :

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -\lambda_{\text{phys}} - \frac{\lambda_{\text{phys}}^2}{32\pi^2}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\log\frac{m_p^2 - s\,x(1-x)}{m_p^2} + (s \leftrightarrow t) + (s \leftrightarrow u)\right) + 2\right). \tag{10.1}$$

Ici s, t et u sont les variables cinétiques de Mandelstam, m_p est la masse du pôle et le couplage physique λ_{phys} est défini par la condition de renormalisation

$$\mathcal{M}_{\text{fi}}\Big|_{s=4m_p^2,t=u=0} = -\lambda_{\text{phys}}\,. \tag{10.2}$$

Regardons maintenant un processus de diffusion à très hautes énergies, $s \gg m_p^2$, toujours avec $t = u$; vu que $s + t + u = 4m_p^2$, on a $t = u = -s/2 + 2m_p^2$. L'élément de matrice devient

$$\mathcal{M}_{\text{fi}}\Big|_{s\gg m_p^2,t=u} = -\lambda_{\text{phys}} - \frac{3\,\lambda_{\text{phys}}^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{s}{m_p^2} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\log 2 - i\pi\right). \tag{10.3}$$

Évidemment, pour $\frac{s}{m_p^2}$ exponentiellement grand, le terme d'ordre λ_{phys}^2 peut devenir plus important que celui du premier ordre. En géneral, aux ordres supérieurs λ_{phys}^n en théorie des perturbations, on trouvera des termes $\propto \log^{n-1}(s/m_p^2)$. Pourtant, les termes d'ordre supérieur sont censés être de plus en plus petits pour que la série perturbative converge. Est-ce que cela signifie que la théorie devient intrinsèquement non-perturbative aux échelles $s \approx m_p^2\, e^{32\pi^2/3\lambda_{\text{phys}}}$?

Il se trouve qu'il n'est en effet pas possible de définir la théorie ϕ^4 de manière perturbative jusqu'aux échelles énergétiques arbitrairement grandes. Mais une partie du problème provient en fait de notre paramétrage de la théorie. Pour comprendre pourquoi, il faut se rendre compte que la définition du couplage physique par la condition de renormalisation d'éq. (10.2) est en fait arbitraire : on l'a adopté parce qu'il semblait convenient de paramétrer les auto-interactions de ϕ par la quantité λ_{phys}, qui peut être facilement liée à une observable physique (la section efficace de la diffusion $2 \to 2$ proche du seuil cinématique.) Mais on aurait pu tout aussi bien choisir une autre définition du couplage en employant un autre processus à une autre échelle d'énergie.

Similairement, en QED il est pratique courante de définir la constante de structure fine α en faisant référence à un processus à basse énergie $E \ll m_e$, comme on l'a fait. Mais en principe, rien n'empêche de définir ce que l'on appelle le couplage par un processus différent ; dans ce cas, $\alpha \approx 1/137$ à basse énergie devient une prédiction de la théorie. Dans une théorie sans échelle de masse perturbative, comme la chromodynamique quantique par exemple, il n'y pas de choix préféré pour définir le couplage, alors toutes définitions à toute échelle sont également bonnes (pourvu que la théorie des perturbations soit valide).

Retournons à la théorie ϕ^4. Vu qu'il existe un infinité de façons de paramétrer cette théorie, regardons une famille infinie de couplages renormalisés $\lambda(\mu)$ qui dépendent d'une échelle de masse μ dite l'*échelle de renormalisation*. Bien entendu, on ne considère qu'une seule théorie : un changement de μ ne correspond qu'à un changement de définition de ce que l'on appelle le couplage renormalisé, alors que les prédictions pour les observables physiques ne doivent pas dépendre de μ. Pour définir $\lambda(\mu)$, il faut spécifier des conditions de renormalisation. Comme on l'a fait avant, on sépare donc le lagrangien en une partie qui dépend du couplage renormalisé $\lambda(\mu)$ (ainsi que d'un champ renormalisé $\phi_r(\mu)$ et d'un paramètre de masse renormalisée $m(\mu)$) et une deuxième partie contenant les contre-termes, voir éq. (6.35). On a vu dans le chapitre 6.3 que l'élément de matrice de la diffusion $2 \to 2$ à une boucle, régularisé en régularisation dimensionnelle, peut s'écrire

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -\lambda(\mu) + \frac{\lambda(\mu)^2}{32\pi^2}\left(\frac{3}{\bar{\epsilon}} - \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\log\frac{m^2(\mu) - x(1-x)s}{\mu^2} + (s \leftrightarrow t) + (s \leftrightarrow u)\right)\right) - \delta_\lambda(\mu)\,. \tag{10.4}$$

Ici μ^2 apparaît au dénominateur pour des raisons dimensionnelles : l'argument du logarithme doit être sans dimension. Dans les expressions du chapitre 6.3, on n'avais pas inclu cette échelle arbitraire ; ici on l'identifie avec l'échelle de renormalisation paramétrant les couplages $\lambda(\mu)$. Cependant, tant qu'on n'a pas encore spécifié la condition de renormalisation qui déterminera le contre-terme, éq. (10.4) est complétement générale.

Choisissons maintenant la condition de renormalisation selon le schéma dit $\overline{\text{MS}}$ ("MS-barre", "modified minimal subtraction"), en définissant le contre-terme de façon qu'il soustrait seulement le terme du pôle $\propto 1/\bar{\epsilon}$ dans éq. (10.4). Ce choix est différent de celui de chapitre 6.3, où la condition de renormalisation était plutôt $\lambda(\mu) = \lambda_{\text{phys}}$, ce qui donne lieu à éq. (10.1). En revanche, dans le schéma $\overline{\text{MS}}$, on a

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -\lambda(\mu) - \frac{\lambda(\mu)^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\log\frac{m^2(\mu) - x(1-x)\,s}{\mu^2} + (s \leftrightarrow t) + (s \leftrightarrow u)\right)\,. \tag{10.5}$$

La forme fonctionnelle de $\lambda(\mu)$ est déterminée par la condition que $\mathcal{M}_{\text{fi}}$ ne doit pas dépendre de l'échelle de renormalisation, non physique. Il faut donc que

$$\mu\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}_{\text{fi}}}{\mathrm{d}\mu} = 0\,. \tag{10.6}$$

Si on réécrit eq. (10.5), avec la dépendance de λ par rapport à μ sous-entendue dans la suite, comme

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left(-3\log\mu^2 + \big(\text{termes qui ne dépendent de } \mu \text{ qu'implicitement via } m^2\big)\right) \tag{10.7}$$

alors on obtient avec éq. (10.6)

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\log\mu} = \beta(\lambda)\,, \qquad \text{avec} \quad \beta(\lambda) = \frac{3}{16\pi^2}\lambda^2\,. \tag{10.8}$$

Ici on a supprimé les termes d'ordre $\geq \lambda^3$, vu qu'on travaille au niveau d'une boucle en théorie des perturbations. Notamment, à cet ordre, le terme $\propto \lambda^2$ dans éq. (10.5) ne contribue que par sa dépendance explicite de $\log\mu^2$ d'eq. (10.7), tandis que la dépendance implicite de μ dans λ et m^2 est d'ordre supérieur.

Sachant que λ est la solution de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre (10.8) (l'*équation de renormalisation*), il faut encore une condition intiale pour uniquement fixer sa valeur numérique. Des différentes conditions initiales correspondront aux différentes théories. Soit la condition initiale, à une échelle de référence μ_0,

$$\lambda(\mu_0) = \lambda_0\,. \tag{10.9}$$

Alors on peut résoudre l'équation de renormalisation pour obtenir

$$\lambda(\mu) = \lambda_0\left(1 - \frac{3\,\lambda_0}{32\pi^2}\log\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)^{-1}\,. \tag{10.10}$$

Contrairement au couplage physique λ_{phys}, le couplage $\lambda(\mu)$ renormalisé dans le schéma $\overline{\text{MS}}$ n'est pas directement défini par une observable physique. Mais il est facile de traduire entre le schéma de renormalisation physique et le schéma $\overline{\text{MS}}$: en comparant les expressions d'éq. (10.5) et éq. (10.1) à $s = 4m_p^2$ et $t = u = 0$, on se rend compte que

$$\lambda_{\text{phys}} = \lambda(\mu) + \frac{\lambda(\mu)^2}{32\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \left(\log \left(\frac{m^2(\mu) - 4\,x(1-x)\,m_p^2}{\mu^2} \right) + 2 \log \frac{m^2(\mu)}{\mu^2} \right) . \tag{10.11}$$

En prenant compte du fait que $m^2(\mu) = m_p^2(1 + \mathcal{O}(\lambda))$, on obtient donc au niveau d'une boucle

$$\lambda_{\text{phys}} = \lambda(\mu) \left(1 - \frac{\lambda(\mu)}{32\pi^2} \left(3 \log \frac{\mu^2}{m_p^2} + 2 \right) \right) . \tag{10.12}$$

La différence entre le couplage physique et le couplage $\overline{\text{MS}}$ est une correction au niveau d'une boucle, qui se compose de deux parties : une partie logarithmique et un term sans logarithmes. La partie logarithmique peut être importante si l'échelle de renormalisation est loin de la masse de la particule.

En pratique, il convient de choisir l'échelle de renormalisation proche de l'échelle énergétique caractéristique du processus qu'on regarde. Un tel choix minimisera les logarithmes et donnera alors une approximation optimale aux observables physiques, sans devoir aller aux ordres supérieurs en théorie des perturbations. Pour des systèmes à plusieurs échelles très différentes, il faut faire évoluer les couplages entre elles selon leurs équations de renormalisation.

Regardons finalement l'équation de renormalisation pour le paramètre de masse $m^2(\mu)$ dans le schéma $\overline{\text{MS}}$. L'auto-énergie $-i\Sigma(p^2, \mu)$ (la somme des diagrammes 1PI avec deux particules externes, sans compter les propagateurs externes) à une boucle est, en régularisation dimensionnelle,

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p^2, \mu) &= \frac{-i\lambda(\mu)}{2} \int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d} \frac{i}{q^2 - m^2(\mu) + i\epsilon} + i \left(\delta_Z(\mu) p^2 - \delta_{m^2}(\mu) \right) \\ &= \frac{i m^2(\mu) \lambda(\mu)}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} + 1 - \log \frac{m^2(\mu)}{\mu^2} \right) + i \left(\delta_Z(\mu) p^2 - \delta_{m^2}(\mu) \right) \end{aligned} \tag{10.13}$$

Vu que l'intégrale de boucle ne dépend pas de p, on a $\delta_Z = 0$ au niveau d'une boucle et l'auto-énergie est indépendante de p (voir chapitre 6.3). Dans le schéma $\overline{\text{MS}}$, seul le terme du pôle est soustrait par le contre-terme, ce qui donne

$$\Sigma(\mu) = -\frac{m^2(\mu)\lambda(\mu)}{32\pi^2} \left(1 - \log \frac{m^2(\mu)}{\mu^2} \right) . \tag{10.14}$$

La fonction à deux points a maintenant un pôle à $m_p^2 = m^2(\mu) + \Sigma(\mu)$. La masse du pôle en tant qu'observable physique doit être indépendante de l'échelle de renormalisation, $\mathrm{d}m_p^2 / \mathrm{d}\log\mu = 0$. On en déduit l'équation de renormalisation

$$\frac{\mathrm{d}m^2}{\mathrm{d}\log\mu} = \gamma(\lambda)\, m^2 , \qquad \text{avec} \quad \gamma(\lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \lambda . \tag{10.15}$$

De nouveau, on a supprimé tous les termes d'ordre supérieur. La fonction γ s'appelle *dimension anomale*. Étant donné une condition initiale $m^2(\mu) = m_0^2$, la solution pour $m^2(\mu)$ est facile à trouver :

$$m^2(\mu) = m_0^2 \left(1 - \frac{3\lambda_0}{32\pi^2} \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right)^{-\frac{1}{3}} . \tag{10.16}$$

Il est possible de généraliser ce formalisme au-delà du niveau d'une boucle et aux théories renormalisables générales. Restons d'abord sur la théorie ϕ^4. On rappelle que, à partir du niveau de deux boucles en théorie des perturbations, la renormalisation de la fonction d'onde Z est non nulle, d'où la nécessité d'introduire le contre-terme δ_Z. On écrit $\widetilde{G}(x_1, \ldots, x_n)$ et $\widetilde{G}_r(x_1, \ldots, x_n)$ pour les fonctions à n points du champ non renormalisé et renormalisé, $\phi_r = \phi / \sqrt{Z(\mu)}$:

$$\widetilde{G}(x_1, \ldots, x_n) = \langle 0 | \, \mathrm{T}\, \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) | 0 \rangle , \quad \widetilde{G}_r(x_1, \ldots, x_n) = \langle 0 | \, \mathrm{T}\, \phi_r(x_1) \ldots \phi_r(x_n) | 0 \rangle . \tag{10.17}$$

La relation entre $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}_r$ est

$$\widetilde{G}(x_1,\ldots,x_n) = Z^{n/2}\widetilde{G}_r(x_1,\ldots,x_n)\,. \tag{10.18}$$

$\widetilde{G}_r$ est une fonction qui dépend de l'échelle de renormalisation μ explicitement, ainsi qu'implicitement car elle dépend du couplage renormalisé et de la masse renormalisée. En revanche, $\widetilde{G}$ est indépendant de l'échelle de renormalisation :

$$0 = \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\widetilde{G} = \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(Z(\mu)^{n/2}\widetilde{G}_r(\lambda(\mu),m^2(\mu),\mu)\right)\,. \tag{10.19}$$

On conclut que

$$\left(\frac{\partial}{\partial\log\mu} + \frac{n}{2}\gamma_\phi + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma_{m^2}\frac{\partial}{\partial\log m^2}\right)\widetilde{G}_r = 0 \tag{10.20}$$

avec

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\log\mu}\,,\qquad \gamma_\phi = \frac{\mathrm{d}\log Z}{\mathrm{d}\log\mu}\,,\qquad \gamma_{m^2} = \frac{\mathrm{d}\log m^2}{\mathrm{d}\log\mu}\,. \tag{10.21}$$

Eq. (10.20) s'appelle l'*équation de Callan-Symanzik* dans le contexte de la régularisation dimensionnelle, même si des relations similaires ont été obtenues avant par Gell-Mann et Low, et même avant par Stückelberg et Petermann.

10.2 Équations de renormalisation pour la QED

Similairement, les fonctions de correlation de la QED renormalisée vérifient des équations de Callan-Symanzik. Il y a, en général, une dimension anomale γ pour chaque champ et une autre pour chaque paramètre de masse, ainsi qu'une fonction β pour chaque couplage. En QED, on a alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial\log\mu} + \frac{n_\psi}{2}\gamma_2 + \frac{n_A}{2}\gamma_3 + \beta_e\frac{\partial}{\partial e} + \gamma_m\frac{\partial}{\partial\log m}\right)\widetilde{G}_r = 0\,. \tag{10.22}$$

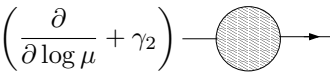
Ici $\widetilde{G}_r$ est une fonction à $(n_\psi + n_A)$ points renormalisée impliquant n_ψ électrons et n_A photons et dépendant de μ, du couplage renormalisé $e(\mu)$ et de la masse de l'électron renormalisée $m(\mu)$. On a posé

$$\beta_e = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\log\mu}\,,\qquad \gamma_2 = \frac{\mathrm{d}\log Z_2}{\mathrm{d}\log\mu}\,,\qquad \gamma_3 = \frac{\mathrm{d}\log Z_3}{\mathrm{d}\log\mu}\,,\qquad \gamma_m = \frac{\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}\log\mu} \tag{10.23}$$

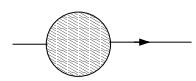
avec les renormalisations de fonction d'onde de l'électron Z_2 et du photon Z_3 définies dans éq. (9.65).

Il est instructif de calculer la fonction β_e de la QED à une boucle et d'étudier le comportement du couplage en fonction de l'échelle μ. En route, on trouvera aussi les fonctions γ_2 et γ_3. Pour simplicité, on étudiera la théorie avec un électron sans masse, $m \to 0$ (en fait, les fonctions β_e et $\gamma_{2,3}$ sont indépendantes de m). Le dernier terme dans l'équation de Callan-Symanzik éq. (10.22) est donc supprimé.

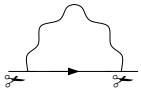
Revisitons d'abord la fonction à deux points de l'électron. Son équation de Callan-Symanzik s'écrit

$$\left(\frac{\partial}{\partial\log\mu} + \gamma_2\right)$$  $$= 0\,. \tag{10.24}$$

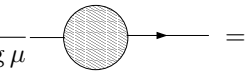
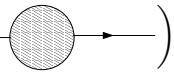
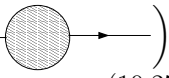
Ici on a utilisé que le terme $\propto \beta_e$ est d'ordre supérieur. Dans le chapitre 9.4, on avait trouvé

 $$= \frac{i}{\not p - \Sigma(\not p) + i\epsilon} \tag{10.25}$$

avec l'auto-énergie de l'électron au niveau d'une boucle (calculée avec le diagramme 1PI sans propagateurs externes) donnée par

$$-i\Sigma(\not p) =$$  $$+\,(\text{contre-termes}) = -\frac{e^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\bar\epsilon} + \log\mu^2\right)\not p + (\text{indépendant de }\mu)\,. \tag{10.26}$$

Cf. éq. (9.80). On a alors

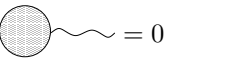
$$\frac{\partial}{\partial \log \mu}$$  $$= \left($$  $$\right)\left(\frac{1}{\not p - \Sigma + i\epsilon}\right)\frac{\partial \Sigma}{\partial \log \mu} = \frac{-e^2}{8\pi^2}\left($$  $$\right).$$ (10.27)

Ici on a supprimé le Σ au dénominateur, car il ne donne lieu qu'aux termes d'ordre supérieur. De l'équation de Callan-Symanzik, on déduit

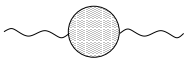
$$\boxed{\gamma_2 = \frac{e^2}{8\pi^2}\,.}$$ (10.28)

Notons que le coefficient du terme $\log \mu^2$ dans éq. (10.26) est le même que celui du terme de pôle $1/\bar{\epsilon}$. Cette propriété est générale : pour identifier le coefficient du terme logarithmique, il suffit d'identifier celui du pôle.

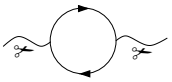
Similairement, la fonction à deux points du photon vérifie l'équation de Callan-Symanzik

$$\left(\frac{\partial}{\partial \log \mu} + \gamma_3 + (\text{termes d'ordre supérieur})\right)$$  $$= 0$$ (10.29)

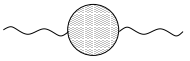
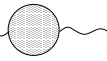
On a

 $$= \frac{-i}{p^2(1-\Pi(p^2))}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) + (\text{termes dépendant du jauge})$$ (10.30)

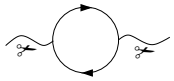
avec l'auto-énergie du photon à une boucle

$$i(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\Pi(p^2) =$$  $$+ (\text{contre-termes})\,.$$ (10.31)

Si on ne regarde que la projection transversale (indépendante de jauge), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \log \mu}$$  $$= \left($$  $$\right)\left(\frac{1}{1-\Pi}\right)\frac{\partial \Pi}{\partial \log \mu}$$ (10.32)

et alors, avec

 $$= -\frac{ie^2}{2\pi^2}\left(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu\right)\left(\frac{1}{6}\frac{1}{\bar{\epsilon}} + \frac{1}{6}\log \mu^2 + (\text{indépendant de } \mu)\right)$$ (10.33)

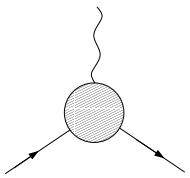
(cf. éq. (9.98)) on a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \log \mu} = -\frac{e^2}{6\pi^2}$$ (10.34)

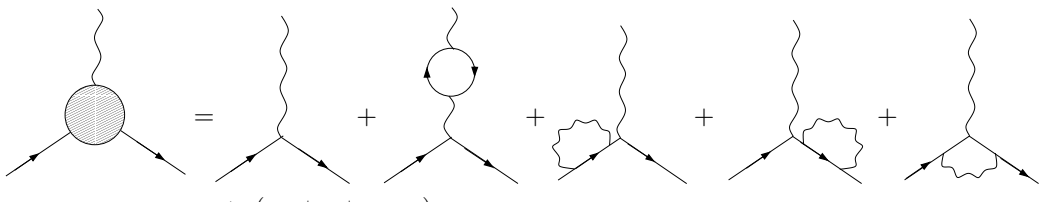
soit

$$\boxed{\gamma_3 = \frac{e^2}{6\pi^2}\,.}$$ (10.35)

Finalement on regarde la fonction à trois points avec un photon et deux électrons. Au niveau d'une boucle, on a

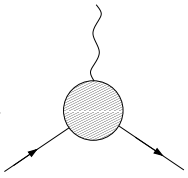
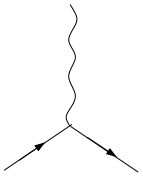
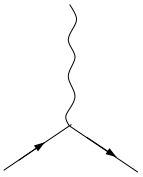
$$\left(\frac{\partial}{\partial \log \mu} + \gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_3 + \beta_e \frac{\partial}{\partial e}\right)$$  $$= 0$$ (10.36)

avec

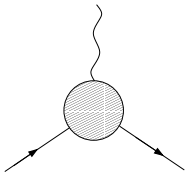
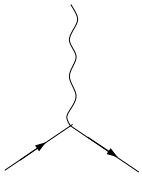


$$+ (\text{contre-termes})\,.$$ (10.37)

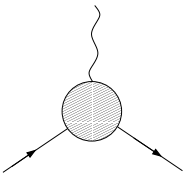
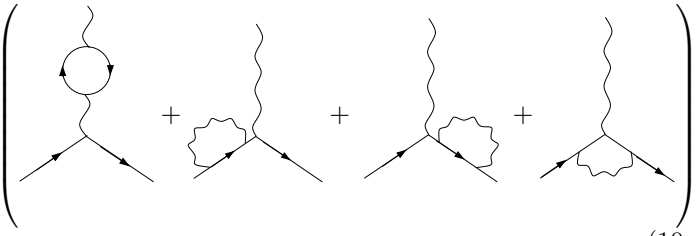
Sachant que β_e est d'ordre e^3, au premier ordre il n'y a que le graphe d'arbre à prendre en compte pour $\beta_e \frac{\partial}{\partial e}$, et celui-ci est linéaire en e :

$\beta_e \frac{\partial}{\partial e}$  $= \beta_e \frac{\partial}{\partial e}$  $+ \quad \ldots \quad = \quad \frac{\beta_e}{e}$  $+ \quad \ldots$ (10.38)

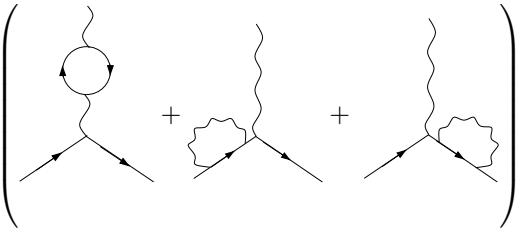
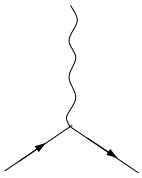
où "+ ..." indique des termes d'ordre supérieur que l'on a supprimé. De même,

$\left(\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_3\right)$  $= \left(\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_3\right)$  $+ \quad \ldots$ (10.39)

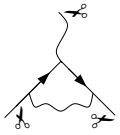
Seulement les graphes de boucle dépendent de μ, alors on a

$\frac{\partial}{\partial \log \mu}$  $= \frac{\partial}{\partial \log \mu}$  . (10.40)

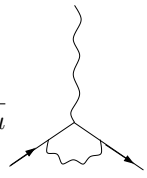
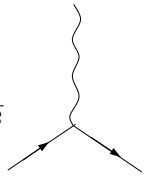
La dépendance des premiers trois diagrammes à la droite par rapport à μ provient des auto-énergies du photon et de l'électron ; on a donc

$\frac{\partial}{\partial \log \mu}$  $= -(\gamma_3 + 2\gamma_2)$  $+ \quad \ldots$ (10.41)

Finalement, avec le résultat de section 9.4 (cf. éqs. (9.116) et (9.118))

 $= -\frac{ie^3}{16\pi^2}\gamma^\mu \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} + \log \mu^2 + (\text{indépendant de } \mu)\right)$ (10.42)

on a

$\frac{\partial}{\partial \log \mu}$  $= \frac{e^2}{8\pi^2}$  $+ \ldots$ (10.43)

On combine les éqs. (10.36), (10.38), (10.39), (10.41) et (10.43) pour trouver

$$\beta_e - e\frac{\gamma_3}{2} - e\gamma_2 + \frac{e^3}{8\pi^2} = 0 \tag{10.44}$$

ce qui donne enfin

$$\boxed{\beta_e = \frac{e^3}{12\pi^2}\,.} \tag{10.45}$$

Notons que γ_2 et γ_3 dépendent du choix de jauge, alors que β_e est indépendant de la jauge (ainsi que du schéma de renormalisation au niveau d'une boucle).

On en déduit que la "constante" de structure fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ de l'électrodynamique quantique satisfait l'équation de renormalisation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\log\mu}\alpha = \frac{2}{3\pi}\alpha^2 \tag{10.46}$$

soit

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi}\log\frac{\mu^2}{\mu_0^2}}\,. \tag{10.47}$$

Cette expression diverge à $\mu = \mu_0 e^{3\pi/2\alpha_0} \equiv \Lambda_{\mathrm{QED}}$: la QED présente un *pôle de Landau*, l'interaction électromagnétique devient de plus en plus forte vers l'ultraviolet jusqu'à ce qu'elle devienne non perturbative à l'échelle Λ_{QED}.

La QED n'est pas une théorie fondamentale, parce que les interactions électromagnétiques sont unifiées avec les interactions faibles à l'échelle de Fermi ≈ 100 GeV. En revanche, dans le Modèle Standard, le groupe de jauge est $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ et le facteur $\mathrm{U}(1)$ (les interactions de *hypercharge*) a essentiellement les mêmes propriétés que la QED à basse énergie. En particulier, il possède également un pôle de Landau à hautes énergies. Dans le Modèle Standard, l'importance de cette observation est pourtant diminuée par le fait que l'échelle associée est bien au-delà de l'échelle de Planck.

Les théories de jauge non-abéliennes, comme la chromodynamique quantique, peuvent présenter le phénomène inverse : le signe de la fonction β est négatif, le couplage devient alors de plus en plus fort vers l'infrarouge. En QCD, l'échelle associée est $\Lambda_{\mathrm{QCD}} \approx 300$ MeV. À basse énergie, la théorie des perturbations n'est plus capable de correctement décrire la physique, les effets comme le confinement des quarks nécessitant un traitement non-perturbatif.

Annexe A

Annexe mathématique

A.1 Le théorème des résidus

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $\{a_1 \dots a_n\} \subset D$ un ensemble fini de points, $f : D \setminus \{a_1 \dots a_n\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, et γ un lacet dans $D \setminus \{a_1 \dots a_n\}$. Alors

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} I(\gamma, a_k)\mathrm{res}\,(f, a_k)\,.} \tag{A.1}$$

Ici $I(\gamma, a_k)$ est l'*indice du lacet* γ par rapport à a_k (le nombre de tours de γ autour le point a_k dans le sens de rotation mathématique) et $\mathrm{res}\,(f, a_k)$ est le *résidu* de f en a_k, défini comme (-1)-ème coefficient de la série de Laurent autour de a_k :

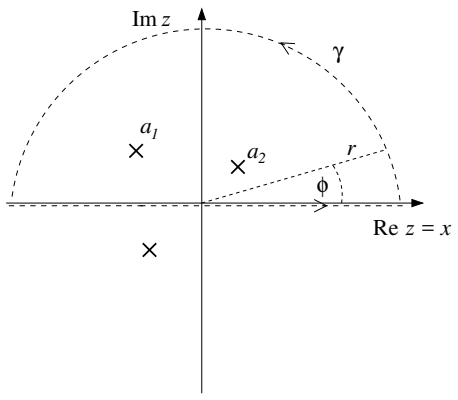
$$f(a_k + z) = \dots + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{\mathrm{res}\,(f, a_k)}{z} + c_0 + c_1\, z + c_2\, z^2 + \dots \tag{A.2}$$

Le théorème de résidus permet de calculer certaines intégrales impropres sur l'axe réelle. Supposons qu'on souhaite calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x\,. \tag{A.3}$$

Si f permet un prolongement méromorphe au plan complexe, et si $\lim_{r\to\infty} f(re^{i\phi}) = 0$ pour $\phi \in [0, \pi]$ avec une décroissance suffisamment rapide, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\text{pôles } a_k\,:\,\mathrm{Im}\,a_k > 0} \mathrm{res}\,(f, a_k)\,. \tag{A.4}$$



Similairement : Si $\lim_{r\to\infty} f(re^{-i\phi}) = 0$ pour $\phi \in [0,\pi]$ (suffisamment vite), alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{\text{pôles } a_k\,:\,\mathrm{Im}\,a_k<0} \mathrm{res}\,(f,a_k)\,. \tag{A.5}$$

On compte toujours la somme de tous les pôles à l'intérieur de la courbe d'intégration — pour ceux à l'extérieur, $I(\gamma,a_k)=0$.

Exemple : pour calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

on note que $(1+z^2)^2 = (i-z)^2(-i-z)^2$, alors la fonction $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ a un double pôle à $z=i$. On trouve $f(i+z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4i}\frac{1}{z} + \mathcal{O}(z^0)$, alors $\mathrm{res}(f,i) = \frac{1}{4i}$. De plus, $|f(re^{i\phi})|$ tend vers 0 comme $1/r^4$ lorsque $r\to\infty$, donc l'intégrale de $f(z)$ sur l'arc à rayon r tend vers 0 également. Le théorème des résidus donne enfin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\mathrm{res}\,(f,i) = \frac{\pi}{2}\,. \tag{A.6}$$

Ce résultat est facilement vérifié par un cacul élémentaire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{A.7}$$

A.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

La *fonction Gamma d'Euler* $\Gamma(z)$ est une fonction méromorphe (holomorphe sauf pour un ensemble de pôles isolés) sur $\mathbb{C}$. Elle est la généralisation continue de la factorielle, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Sa restriction sur le demi-plan droit $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}\,z>0\}$ est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{A.8}$$

Après intégration par parties on obtient l'équation fonctionnelle fondamentale

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,. \tag{A.9}$$

Une représentation alternative, valable sur tout $\mathbb{C}\setminus\{\text{entiers non-positifs}\}$, est le produit infini

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma_E z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \tag{A.10}$$

avec $\gamma_E = 0.577\ldots$ la *constante d'Euler-Mascheroni*. $\Gamma(z)$ a des *pôles simples* à $z\in\{0,-1,-2,-3\ldots\}$ et est holomorphe ailleurs. Proche des pôles son développement de Laurent est donné par

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{A.11}$$

alors le résidu à $z=-n$ est $(-1)^n/n!$. En particulier, on a

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{A.12}$$

et

$$\Gamma(-1+\epsilon) = -\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1\right) + \mathcal{O}(\epsilon)\,. \tag{A.13}$$

La *fonction Bêta d'Euler* $B(x,y)$ est définie par

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,. \tag{A.14}$$

Quand les parties réelles de x et y sont positives, elle peut être représentée par l'intégrale

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,. \tag{A.15}$$

Enfin on note la relation entre la fonction Gamma et le volume de la sphère unité S^{n-1} en n dimensions $\int \mathrm{d}\Omega_n$: On a

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\pi}\right)^n &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\right)^n = \int \mathrm{d}^n x\; e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} = \int \mathrm{d}\Omega_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2}\;\mathrm{d}r \\ &= \left(\int \mathrm{d}\Omega_n\right)\frac{1}{2}\int_0^\infty (r^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-r^2}\,\mathrm{d}(r^2) = \left(\int \mathrm{d}\Omega_n\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\end{aligned} \tag{A.16}$$

et donc

$$\int \mathrm{d}\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,. \tag{A.17}$$

A.3 Fonctionnelles

Cette section sera moins rigoureuse car on ne va pas préciser les prérequis pour les espaces de fonctions sur lesquels nos affirmations sont valables. On regarde alors un certain sous-ensemble T de l'espace $C^0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues réelles sur $\mathbb{R}^n$. Cet espace T, dit l'espace des "fonctions test", contiendra au moins les fonctions C^∞ à support compact (non nulles seulement sur un ensemble borné et infiniment dérivables). Souvent on aimerait inclure toutes les fonctions lisses qui tendent vers 0 exponentiellement à l'infini (permettant d'intégrer par parties la fonction et toutes ses dérivées sans terme de surface). La précise formulation des critères sur T pour pouvoir bien définir toutes les notions que l'on va seulement esquisser ici est le sujet de l'analyse fonctionnelle.

On peut généraliser tout ce qui suit pour des fonctions et fonctionnelles complexes sans problème.

Définitions : Une *fonctionnelle réelle* est une application $F : T \to \mathbb{R}$, $f \mapsto F[f]$. Une fonctionnelle est *linéaire* si $F[f+\lambda g] = F[f] + \lambda F[g]$ pour toutes fonctions f, g et tout scalaire λ. Elle est *continue* si pour toute suite convergente de fonctions $f_n \to f$ on a $F[f_n] \to F[f]$. Une fonctionnelle linéaire et continue s'appelle aussi une *distribution*.

Exemples :

1. Une fonction $g \in T$ peut elle-même être interprétée comme fonctionnelle linéaire par le *produit scalaire* (de L^2) sur T :

$$g[f] = g \cdot f = \int \mathrm{d}^n x\; g(x) f(x)\,.$$

2. L'application qui associe $f \mapsto f(0)$ est une distribution désignée par $\delta[f]$. On la représente souvent par une notation intégrale :

$$\delta[f] = \int \mathrm{d}^n x\; \delta^{(n)}(x) f(x)$$

   mais la "fonction delta de Dirac dans n dimensions" $\delta^{(n)}(x)$ qui figure ici n'est pas en fait une fonction, sa valeur en 0 n'étant pas définie.

3. Soit $\mathcal{L}$ une fonction analytique en plusieurs variables et $x \in \mathbb{R}^n$ fixe. Alors

$$\mathcal{L}_x[f] = \mathcal{L}\big(x, f(x), \partial_\mu f(x), \partial_\mu\partial_\nu f(x), \ldots\big)$$

   définit une fonctionnelle (généralement non linéaire). On appelle *locale* une fonctionnelle F qui peut être représentée comme une intégrale d'un tel $\mathcal{L}_x$:

$$F[f] = \int \mathrm{d}^n x\; \mathcal{L}_x[f]. \tag{A.18}$$

Définition : Soit F une fonctionnelle. La *dérivée fonctionnelle* $\frac{\delta F}{\delta f}$ est une fonctionnelle linéaire avec la propriété

$$F[f+h] = F[f] + \frac{\delta F}{\delta f}[h] + \mathcal{O}(||h||^2). \tag{A.19}$$

On supposera que $\frac{\delta F}{\delta f}$ existe et soit unique où on en a besoin, sans en discuter les conditions.

Observations :

- Si F est une fonctionnelle linéaire, on a

$$F[f+h] = F[f] + F[h] \tag{A.20}$$

et alors

$$\frac{\delta F}{\delta f} = F. \tag{A.21}$$

En particulier,

$$\frac{\delta\ \delta[f]}{\delta f}[h] = \delta[h] = h(0)\,. \tag{A.22}$$

- Si F est une fonctionnelle locale donnée dans la forme d'éq. (A.18), un développement limité donne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x[f+h] &= \mathcal{L}\big(x, f(x)+h(x), \partial_\mu f(x) + \partial_\mu h(x), \partial_\mu\partial_\nu f(x) + \partial_\mu\partial_\nu h(x), \ldots\big) \\ &= \mathcal{L}_x[f] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f}h(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu f)}\partial_\mu h(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu f)}\partial_\mu\partial_\nu h(x) + \ldots\end{aligned} \tag{A.23}$$

Par conséquent, après intégration par parties,

$$\frac{\delta F}{\delta f}[h] = \int \mathrm{d}^n x\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial f}(x) - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu f)}(x) + \partial_\mu\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu f)}(x) - \ldots\right) h(x). \tag{A.24}$$

Comme dans l'exemple 1. on peut alors identifier la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta F}{\delta f}$ avec une fonction $\frac{\delta F}{\delta f}(x)$ (parfois aussi désignée $\frac{\delta F}{\delta f(x)}$) qui est donné par la dérivée d'Euler-Lagrange de $\mathcal{L}$. Similairement, la dérivée de la fonctionnelle δ éq. (A.22) est parfois exprimée avec l'aide de la "fonction delta" (en identifiant $\delta[f] = f(0)$) de façon suivante :

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta^{(n)}(x-y). \tag{A.25}$$

Comparaison avec le cas de dimension finie : Pour les espaces vectoriels $V \simeq \mathbb{R}^n$ de dimension finie n

- les fonctionnelles correspondent aux fonctions $V \to \mathbb{R}$,
- les fonctionnelles linéaires correspondent aux *formes linéaires*,
- par le le produit scalaire euclidéen on peut identifier chaque vecteur v avec une forme linéaire qui envoie $u \mapsto v \cdot u$ (et contrairement aux cas de dimension infinie, l'espace des formes linéaires sur V est ainsi isomorphe à V),
- pour un indice fixe j on peut définir une forme linéaire $\delta_j : v \to v^j$ qui est plus communement représentée par la matrice δ_i^j, en écrivant $(v^i) \to \delta_i^j v^i = v^j$,
- la dérivée fonctionnelle correspond à la dérivée ordinaire : soit $f : V \to \mathbb{R}$, alors

$$f(v+h) = f(v) + (\nabla f)(v)\cdot h + \mathcal{O}(|h|^2) \tag{A.26}$$

- l'équivalent d'éq. (A.25) est

$$\frac{\partial v^i}{\partial v^j} = \delta^i_j\,. \tag{A.27}$$