

Formulaire : Théorie quantique des champs

F. Brümmer

Faculté des sciences, Université de Montpellier

2015-23

Dernière mise à jour : 11 octobre 2023

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	A propos de ces notes	4
1.2	Motivation et aperçu	4
2	Théorie relativiste des champs classiques	6
2.1	Rappel de la relativité restreinte	6
2.2	Champs classiques	7
2.3	Le théorème de Noether	9
3	La quantification canonique du champ scalaire libre	12
3.1	Le développement des champs en modes de Fourier	12
3.2	Les relations de commutation canoniques	14
3.3	L'espace de Fock	15
3.4	Propagateurs	16
4	La formule de réduction de LSZ	19
4.1	La théorie libre vs. la théorie avec interactions	19
4.2	La formule de réduction de LSZ	20
5	La quantification par l'intégrale de chemin	23
5.1	Les intégrales de chemin en mécanique quantique	23
5.2	Fonctionnelle génératrice	27
5.3	Les intégrales de chemin en théorie quantique des champs	27
6	La théorie des perturbations et les diagrammes de Feynman	32
6.1	Fonctionnelle génératrice et diagrammes de Feynman	32
6.2	Les règles de Feynman pour la théorie ϕ^4	35
6.3	Un premier regard à la renormalisation	38
7	Sections efficaces et taux de désintégration	45
7.1	Des fonctions de corrélation aux éléments de matrice	45
7.2	La diffusion : les processus $2 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow n$	47
7.3	La désintégration : les processus $1 \rightarrow n$	49
8	Fermions	50
8.1	Le groupe et l'algèbre de Lorentz	50
8.2	Le champ de Dirac	51
8.3	La quantification canonique du champ de Dirac libre	54
8.4	Les intégrales de chemin pour les fermions	58
8.5	La théorie de Yukawa	59
9	L'électrodynamique quantique	62
9.1	La quantification du champ électromagnétique	62
9.2	L'électrodynamique quantique	65
9.3	Processus élémentaires au niveau des arbres	66

9.4	L'électrodynamique quantique à une boucle	71
A	Annexe mathématique	81
A.1	Le théorème des résidus	81
A.2	Quelques propriétés de la fonction Gamma	82
A.3	Fonctionnelles	83

Chapitre 1

Introduction

1.1 A propos de ces notes

Ce formulaire accompagne le cours HAP931P “Théorie quantique des champs” de la deuxième année du master “Cosmos, champs et particules” à la faculté des sciences de l’Université de Montpellier. En ce moment il contient surtout les formules et très peu d’explications. De plus, il contient sans doute toujours des erreurs typographiques et manque des signes perdus — merci de me le signaler si vous trouvez l’un ou l’autre (felix.bruegger@umontpellier.fr).

Les prérequis pour ce cours sont des connaissances au niveau de la licence et du M1 en physique théorique : Mécanique analytique, théorie des champs classiques (électrodynamique), relativité restreinte, mécanique quantique avancée, introduction à la physique théorique des particules. Côté mathématique, des connaissances élémentaires de l’analyse complexe et de l’analyse fonctionnelle seront utiles.

Littérature et sources pour ce texte et le cours :

- M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books 1995.
- M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Pr. 2007.
- P. Ramond, *Field Theory : A Modern Primer (2nd ed.)*, Westview 2001.
- A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton Univ. Pr. 2003.
- M. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge Univ. Pr. 2014.
- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields vols. I, II*, Cambridge Univ. Pr. 2000.
- Notes de cours en ligne par M. Gaberdiel (Zurich), M. G. Schmidt (Heidelberg), D. Tong (Cambridge), T. Weigand (Heidelberg).

1.2 Motivation et aperçu

À quoi sert la TQC ?

Problèmes de la mécanique quantique : Non-relativiste dans sa formulation habituelle (éq. de Schrödinger n’est pas invariant par Lorentz, le temps joue un rôle spécial). Nombre de particules fixe, impossible de décrire diffusion inélastique et désintégration. Solution : TQC.

Domaines d’application :

- physique des particules élémentaires à hautes énergies
- physique nucléaire et hadronique
- cosmologie
- physique statistique (pas forcément TQC relativiste)

- matière condensée (TQC non relativiste)

Aperçu du cours :

- *Observables* (en physique des particules à hautes énergies) = *sections efficaces* de diffusion, *taux de désintégration*.
- Données par les *éléments de la matrice S* (aux facteurs cinématiques près).
- *Matrice S* = opérateur unitaire dont les éléments de matrice sont les *amplitudes de transition* entre un état “incident” $|i\rangle$ à $t \rightarrow -\infty$ et un état “final” $|f\rangle$ à $t \rightarrow +\infty$ = les amplitudes quantiques de probabilité de passer de $|i\rangle$ à $|f\rangle$.
- Calcul des éléments de la matrice S : *résidus des fonctions de corrélation en ordre chronologique* sur couche de masse transformées par Fourier, d’après la *formule de réduction de LSZ*.
- Partie majeure de ce cours : Calcul de ces fonctions de corrélation.
- Outil principal : l’*intégrale de chemin de Feynman* évaluée en *théorie des perturbations*.
- Aux ordres supérieures en théorie des perturbations, résultats souvent donnés par des *intégrales impropres divergentes*. Nécessité de *régulariser* et *renormaliser* la théorie afin d’obtenir des réponses finies aux questions physiques.
- Le formalisme est le plus simple pour des champs *scalaires* (de spin 0), qui nous serviront comme premier exemple. Mais il s’applique, avec quelques modifications, aussi aux champs de spin 1/2 (*fermions*) et de spin 1 (*bosons de jauge*), ce qui permet de traiter des théories réalistes comme l’électrodynamique quantique \rightarrow fin du cours.

Chapitre 2

Théorie relativiste des champs classiques

2.1 Rappel de la relativité restreinte

Métrique de Minkowski en signature $(+ - - -)$:

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$g^{\mu\nu}$ = métrique inverse, mêmes coefficients car

$$(g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}) = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}. \quad (2.2)$$

Ici et partout : convention de sommation,

$$a_\mu b^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu \equiv a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 \quad (2.3)$$

où les indices sont levés et abaissés avec la métrique,

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\nu = \begin{cases} a^\mu & (\mu = 0) \\ -a^\mu & (\mu = 1, 2, 3) \end{cases}, \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu. \quad (2.4)$$

Transformations de Lorentz propres orthochrones $\Lambda \in \text{SO}^\uparrow(3, 1)$:

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \quad \det \Lambda = +1 \text{ (propre)}, \quad \Lambda_0^0 > 0 \text{ (orthochrone)}. \quad (2.5)$$

Les coordonnées de l'espace-temps

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{convention : } c = 1) \quad (2.6)$$

se transforment comme un *vecteur de Lorentz* :

$$x \rightarrow \Lambda x. \quad (2.7)$$

Dérivées par rapport à x :

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (2.8)$$

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (2.9)$$

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.10)$$

2.2 Champs classiques

L'équation de Schrödinger (convention : $\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (2.11)$$

n'est pas covariante de Lorentz : *linéaire* en temps mais *quadratique* en espace, p.ex. pour une particule libre : $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\vec{\nabla}^2}{2m}$. Mécanique quantique : temps = paramètre du système, pas un opérateur ; espace = (valeur propre de l')opérateur de position. TQC : espace devient un paramètre également.

Représentation de Heisenberg : opérateurs en mécanique quantique dépendent du *temps*. Opérateurs en TQC dépendent du *temps* et de l'*espace* de façon covariante : $\Phi(t) \rightarrow \Phi(t, \vec{x})$. Les états (= vecteurs de l'espace de Hilbert) sont indépendants de l'espace-temps, contrairement à la représentation de Schrödinger.

Les *champs quantiques* sont alors des fonctions de l'espace-temps à valeur *opérateur*. Mais dans ce chapitre on va d'abord considérer des *champs classiques* : fonctions de l'espace-temps à valeur *réelle* où *complexe*.

Quantité fondamentale : *action* S .

Trois **postulats** : S est une fonctionnelle¹

1. réelle (observables = réelles ; en MQ lié à la conservation de probabilité),
2. invariante par les transformations de Lorentz (théorie relativiste),
3. locale (structure causale)

sur l'espace des champs Φ_i .

Localité :

$$S[\Phi_i] = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x), \partial_\mu \partial_\nu \Phi_i(x), \dots) \quad (2.12)$$

où la fonction \mathcal{L} (densité lagrangienne, "lagrangien") dépend des champs et d'un nombre fini de leurs dérivées à *un seul point* x de l'espace-temps. Cf. formalisme lagrangien de la mécanique classique,

$$S[q_i] = \int dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), \dots) \quad (2.13)$$

Invariance : Postulat 2. $\Rightarrow \mathcal{L}$ est une fonction scalaire, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ (aux dérivées totales près, voir ci-dessous), puisque

$$S \rightarrow S' = \int d^4x \det \Lambda \mathcal{L}' \stackrel{!}{=} S \quad (2.14)$$

avec $\det \Lambda = 1$.

1. Une application qui associe à une fonction un nombre, voir annexe A.3.

Principe fondamental : *principe de moindre action.*

Chemin classique (dans l'espace de configuration des champs) \leftrightarrow action stationnaire,

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta \Phi_i} = 0.} \quad (2.15)$$

Cf. les trajectoires classiques en mécanique vérifiant $\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0$.

On a

$$\begin{aligned} S[\Phi_i + \delta \Phi_i] &= S[\Phi_i] + \frac{\delta S}{\delta \Phi_i} \cdot \delta \Phi_i + \mathcal{O}(\|\delta \Phi_i\|^2) \\ &= S[\Phi_i] + \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu \delta \Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \Phi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \delta \Phi_i + \dots \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\|\delta \Phi_i\|^2) \\ &= S[\Phi_i] + \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \Phi_i)} - \dots \right) \delta \Phi_i \\ &\quad + \mathcal{O}(\|\delta \Phi_i\|^2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Troisième égalité \Leftarrow intégrations par parties, $\delta \Phi_i$ et toutes ses dérivées supposées de s'annuler à l'infini.

Alors d'après Eq. (2.15)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \Phi_i)} - \dots = 0 \quad (2.17)$$

(*équations de mouvement*).

Quatrième **postulat** :

4. L'action est telle que les équations de mouvement sont au maximum de second ordre en temps (et alors en espace aussi, grâce à la covariance relativiste).

Cf. mécanique : $\vec{F} = m \ddot{\vec{x}}$.

Implication : \mathcal{L} peut dépendre de $\partial_\mu \Phi_i$ (au maximum quadratiquement) ou de $\partial_\mu \partial_\nu \Phi_i$ (au maximum linéairement), mais pas des dérivées supérieures. Un terme qui dépend de $\partial_\mu \partial_\nu \Phi_i$ linéairement peut toujours s'écrire comme

$$f(\Phi_j) \partial_\mu \partial_\nu \Phi_i = \underbrace{\partial_\mu \left(f(\Phi_j) \partial_\nu \Phi_i \right)}_{\text{dérivée totale}} - \frac{\partial f}{\partial \Phi_j} (\partial_\mu \Phi_j) (\partial_\nu \Phi_i) \quad (2.18)$$

On regarde seulement des configurations où tous les champs et toutes ses dérivées s'annulent à l'infini \Rightarrow on peut supprimer les dérivées totales dans \mathcal{L} car

$$\int_{\mathbb{R}^4} \partial \mathcal{F}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i, \dots) = \int_{\partial \mathbb{R}^4} \mathcal{F}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i, \dots) = 0 \quad (2.19)$$

pour une fonction \mathcal{F} quelconque. Du postulat 4. et de (2.18) on conclut que, sans perte de généralité, \mathcal{L} ne dépend que de Φ_i et de $\partial_\mu \Phi_i$ (et de ce dernier au maximum quadratiquement).

Les e.d.m. deviennent les *équations d'Euler-Lagrange*,

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} = 0.} \quad (2.20)$$

Cf. équations d'E-L en mécanique,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (2.21)$$

Exemple : Le champ scalaire réel

Un seul champ $\phi(x)$ à valeurs réelles qui se transforme comme $\phi(x) \rightarrow \phi(\Lambda^{-1}x)$. Le lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{V}(\phi). \quad (2.22)$$

- Le terme cinétique $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$: le terme le plus simple permis par l'invariance de Lorentz qui implique des dérivées. Coefficient $\frac{1}{2}$ choisi par convention (normalisation du champ). Implication : dimension $[\phi] = 1$.²
- La densité d'énergie potentielle $\mathcal{V}(\phi)$ = une fonction quelconque ; développement limité en 0 :

$$\mathcal{V}(\phi) = \mathcal{V}_0 + M^3 \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} \mu \phi^3 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + \dots \quad (2.23)$$

La constante \mathcal{V}_0 ne figure pas dans les équations de mouvement. Le terme linéaire peut être absorbé par une redéfinition du champ $\phi \rightarrow \phi - \text{cte.}$ et des autres coefficients. Alors, sans perte de généralité, les premiers termes dans \mathcal{V} sont

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} \mu \phi^3 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4. \quad (2.24)$$

On pourrait ajouter des termes de dimension > 4 à \mathcal{L} comme $\phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \phi^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \dots, \phi^5, \phi^6, \dots$ etc. (avec des coefficients de dimension < 0). En physique quantique, ces termes représenteront des interactions *non renormalisables*, comme on verra plus tard \rightarrow il y a des bonnes raisons de les exclure.

- Équation de mouvement pour le cas spécial $\mu = 0, \lambda = 0$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.25)$$

(“champ libre”) : Équation de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2) \phi = 0. \quad (2.26)$$

Solution : superpositions des ondes planes

$$\phi(x) = \sum_p a(p) e^{ip_\mu x^\mu}, \quad p^2 = m^2. \quad (2.27)$$

Interprétation de m^2 : p_μ = quadri-impulsion, alors $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$, alors $m^2 = (\text{masse})^2$.

- Équation de mouvement au cas général :

$$(\square + m^2) \phi = -\frac{\mu}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{6} \phi^3. \quad (2.28)$$

Interprétation du membre de droite : termes non-linéaires dans l'équation de mouvement = termes d'interaction. Si $\mu \neq 0$ et/ou $\lambda \neq 0$: plus de solution exacte, plus de principe de superposition, auto-interaction, diffusion.

2.3 Le théorème de Noether

Dans une théorie de N champs $\Phi_i, i = 1 \dots N$, on considère une transformation continue dépendant d'un paramètre réel α :

$$\Phi_i(x) \rightarrow \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) + \alpha \delta \Phi_i(x) + \mathcal{O}(|\alpha|^2) \quad (2.29)$$

2. Avec $\hbar = c = 1$ il n'y a qu'une seule unité, celle de la masse : [masse] = [énergie] = [impulsion] = [temps⁻¹] = [distance⁻¹]. L'action est sans dimension, le lagrangien est de dimension [masse]⁴ (ou 4 en bref), donc $[\phi] = 1$ est une conséquence de $[\partial/\partial x^\mu] = 1$.

Si l'action reste inchangée,

$$S[\Phi_i] = S[\Phi'_i] \quad (2.30)$$

la transformation est une *symétrie* de la théorie. S inchangée $\Leftrightarrow \mathcal{L}$ change au maximum par une dérivée totale d'une fonction qu'on appelle \hat{J}^μ . Au premier ordre en α :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \hat{J}^\mu(x) \\ &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} (\alpha \delta \Phi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu (\alpha \delta \Phi_i) \\ &= \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) + \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right)}_{=0} \delta \Phi_i \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pour rappel, ici une somme double sur $\mu = 0, 1, 2, 3$ et $i = 1 \dots N$ est sous-entendue. En comparant la première et la dernière ligne :

$$\partial_\mu \hat{J}^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) \quad (2.32)$$

et alors

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu(x) = 0} \quad (2.33)$$

avec

$$\boxed{J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i - \hat{J}^\mu.} \quad (2.34)$$

On a établi le *théorème de Noether* : (symétrie $\Phi_i \rightarrow \Phi'_i$) \Rightarrow (\exists courant conservé $J^\mu(x)$).

Conséquence d'un courant (ou plus précisément : densité de courant) satisfaisant l'équation de continuité $\partial_\mu J^\mu = 0$: l'existence d'une *charge conservée* Q car pour $J^\mu = (\rho, \vec{j})$

$$0 = \partial_\mu J^\mu = \dot{\rho} - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (2.35)$$

alors en intégrant sur l'espace,

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\text{espace}} \rho}_{\equiv Q} = \int_{\text{espace}} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \int_{\text{infini spatial}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.36)$$

Exemple : Champ scalaire libre sans masse

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (2.37)$$

Symétrie : $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha$ avec α une constante, $\partial_\mu \alpha = 0$

Variation du lagrangien nulle, $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, alors $\hat{J}^\mu = 0$

Courant conservé : $\delta \phi = 1$ alors $J^\mu(x) = \partial^\mu \phi(x)$

Ici : conservation du courant \Leftrightarrow éq. de mouvement $\square \phi = 0$.

Exemple plus intéressant : symétrie de translation \subset symétrie de Poincaré

Symétrie d'espace-temps $x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu$ (quatre paramètres = composantes de a^μ). Pour un champ scalaire,

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + a) = \phi(x) + (\partial_\mu \phi) a^\mu + \mathcal{O}(\|a\|^2). \quad (2.38)$$

Transformation du lagrangien au premier ordre :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + (\partial_\mu \mathcal{L}) a^\mu = \mathcal{L} + a^\nu \underbrace{\partial_\mu (\delta_\nu^\mu \mathcal{L})}_{\hat{J}^\nu} \quad (2.39)$$

Un courant conservé par translation indépendante, groupés dans un tenseur T_ν^μ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \hat{j}_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \equiv T_\nu^\mu \quad (2.40)$$

alors les équations de conservation sont

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0. \quad (2.41)$$

On appelle T_ν^μ le *tenseur d'énergie-impulsion*.

Charges conservées :

$$\int d^3x T^{00} \equiv H \quad (\text{hamiltonien}), \quad (2.42)$$

$$\int d^3x T^{0i} \equiv P^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{impulsions / quantités de mouvement}). \quad (2.43)$$

Chapitre 3

La quantification canonique du champ scalaire libre

3.1 Le développement des champs en modes de Fourier

On considère un champ scalaire réel libre,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.1)$$

Après une transformation de Fourier

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(t, \vec{k}) \quad (3.2)$$

l'équation de Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi = 0$ devient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{k}|^2 + m^2) \right) \tilde{\phi} = 0. \quad (3.3)$$

Oscillateur harmonique avec fréquence

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \quad (\text{racine positive}). \quad (3.4)$$

Rappel : en MQ, le hamiltonien de l'oscillateur harmonique

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2 \quad (3.5)$$

se diagonalise par une transformation canonique,

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger) \quad (3.6)$$

où $[q, p] = i$, alors $[a, a^\dagger] = 1$, alors

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (3.7)$$

avec les états propres

$$|n\rangle \propto (a^\dagger)^n |0\rangle. \quad (3.8)$$

Pour quantifier le champ scalaire, on définit le *moment conjugué* $\pi(t, \vec{x})$ de $\phi(t, \vec{x})$ (aucune relation avec le nombre π)

$$\pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(t, \vec{x})}. \quad (3.9)$$

Pour un champ scalaire réel libre, éq. (3.1) donne

$$\pi(t, \vec{x}) = \dot{\phi}(t, \vec{x}). \quad (3.10)$$

De plus, la *densité hamiltonienne* \mathcal{H} est

$$\boxed{\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H}} \quad (3.11)$$

ce qui donne pour un champ scalaire libre,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.12)$$

Cf. mécanique, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ et $H = p\dot{q} - L$.

On définit des fonctions a et b par les coefficients d'une transformation de Fourier spatiale :

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k})e^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b(\vec{k})e^{i(\omega_{\vec{k}}t + \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \quad (3.13)$$

avec $\omega_{\vec{k}}$ défini dans éq. (3.4). Ici f est une fonction réelle quelconque (redondante, pourrait être absorbée dans la définition de a et b) que l'on spécifiera aussitôt. Avec éq. (3.13), ϕ est une solution de l'équation de mouvement car $\omega_{\vec{k}}^2 - \vec{k}^2 = m^2$.

ϕ est réel, alors

$$\begin{aligned} \phi = \phi^* &= \int \frac{d^3k}{f(|\vec{k}|)} \left(a^*(\vec{k})e^{i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b^*(\vec{k})e^{-i(\omega_{\vec{k}}t + \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{f(|\vec{k}|)} \left(a^*(-\vec{k})e^{i(\omega_{\vec{k}}t + \vec{k}\cdot\vec{x})} + b^*(-\vec{k})e^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

En comparant avec éq. (3.13) :

$$b^*(-\vec{k}) = a(\vec{k}) \quad (3.15)$$

donc

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3k}{f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k})e^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + a^*(-\vec{k})e^{i(\omega_{\vec{k}}t + \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k})e^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + a^*(\vec{k})e^{i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right) \\ &= \int \frac{d^3k}{f(|\vec{k}|)} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^*(\vec{k})e^{ikx} \right) \Big|_{k^0 = \omega_{\vec{k}}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour rappel, la notation kx signifie le produit scalaire de Lorentz, $kx \equiv k_\mu x^\mu$. On peut choisir la fonction $f(|\vec{k}|)$ tel que $\frac{d^3k}{f(|\vec{k}|)}$ est invariant par des transformations de Lorentz propres orthochrones :

$$\begin{aligned} d^4k \delta(k^2 - m^2) \Theta(k^0) \text{ manifestement invariant,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \delta(\underbrace{k^2 - m^2}_{(k^0)^2 - \omega_{\vec{k}}^2}) \Theta(k^0) = \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \quad \text{car } \delta(g(x)) = \sum_{\{y \mid g(y)=0\}} \frac{1}{|g'(y)|} \delta(x - y). \end{aligned}$$

Ainsi, si $f(|\vec{k}|) \propto \omega_{\vec{k}}$, alors $\frac{d^3k}{f(|\vec{k}|)}$ est invariant. Convention :

$$f(|\vec{k}|) = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}. \quad (3.17)$$

Notation :

$$\widetilde{d\vec{k}} \equiv \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} \quad \text{mesure d'intégration invariante.} \quad (3.18)$$

En résumé :

$$\boxed{\phi(x) = \int \widetilde{d\vec{k}} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^*(\vec{k})e^{ikx} \right)} \quad (3.19)$$

où $k^0 = \omega_{\vec{k}} = +\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$, impliquant $k^2 = m^2$ (condition de *couche de masse*).

On peut montrer (\rightarrow exercices)

$$a(\vec{k}) = i \int d^3x e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x), \quad \text{où } f \overleftrightarrow{\partial} g \equiv f(\partial g) - (\partial f)g. \quad (3.20)$$

Pour le moment conjugué on trouve

$$\pi(t, \vec{x}) = \dot{\phi}(t, \vec{x}) = \int \widetilde{d\vec{k}} (-i\omega_{\vec{k}}) \left(a(\vec{k})e^{-ikx} - a^*(\vec{k})e^{ikx} \right). \quad (3.21)$$

3.2 Les relations de commutation canoniques

Quantification : champs \rightarrow opérateurs, *relations canoniques de commutation à temps égaux*

$$\boxed{\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] &= 0, \\ [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= 0, \\ [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned}} \quad (3.22)$$

Cf. mécanique quantique, $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$ et $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$.

Équivalent à éq. (3.22) (\rightarrow exercice) :

$$\boxed{[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 2\omega_{\vec{k}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').} \quad (3.23)$$

(Opérateurs \rightarrow conjugué complexe a^* remplacé par conjugué hermitien a^\dagger .)

Quantification canonique du champ scalaire réel libre.

Ensuite on va montrer que

$$H = \int \widetilde{d\vec{k}} \omega_{\vec{k}} a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + E_0 \quad (3.24)$$

avec E_0 une constante (comparaison : en mécanique quantique, pour un ensemble d'oscillateurs, $H = \sum_i \omega_i (a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2})$).

Densité hamiltonienne :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \int \widetilde{d\vec{k}} \widetilde{d\vec{k}'} \left(-\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \left(a(\vec{k}')e^{-ik'x} - a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'x} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \widetilde{d\vec{k}} \widetilde{d\vec{k}'} \left(-\vec{k} \cdot \vec{k}' \left(a(\vec{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \left(a(\vec{k}')e^{-ik'x} - a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'x} \right) \right) \\ &\quad + \frac{m^2}{2} \int \widetilde{d\vec{k}} \widetilde{d\vec{k}'} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \left(a(\vec{k}')e^{-ik'x} + a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'x} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hamiltonien, en utilisant $\int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q})$ et avec $\omega \equiv \omega_{\vec{k}}$ et $\omega' \equiv \omega_{\vec{k}'}$:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x \mathcal{H} \\
&= \frac{1}{2} \int \widetilde{d\vec{k}} \widetilde{d\vec{k}'} (2\pi)^3 \left(\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \left(\omega\omega' + \vec{k} \cdot \vec{k}' + m^2 \right) \right. \\
&\quad \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}')e^{-i(\omega-\omega')t} + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')e^{i(\omega-\omega')t} \right) \\
&\quad + \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{k}') \left(-\omega\omega' - \vec{k} \cdot \vec{k}' + m^2 \right) \\
&\quad \left. \left(a(\vec{k})a(\vec{k}')e^{i(\omega+\omega')t} + a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')e^{-i(\omega+\omega')t} \right) \right) \quad (3.26) \\
&= \frac{1}{2} \int \widetilde{d\vec{k}} \frac{1}{2\omega} \underbrace{(\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2)}_{2\omega^2} \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \widetilde{d\vec{k}} \frac{1}{2\omega} \underbrace{(-\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2)}_0 \left(a(\vec{k})a(-\vec{k})e^{2i\omega t} + a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(-\vec{k})e^{-2i\omega t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int \widetilde{d\vec{k}} \omega \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right) .
\end{aligned}$$

On peut échanger l'ordre des a et a^\dagger en prenant compte des relations de commutation éq. (3.23) :

$$\boxed{H = \int \widetilde{d\vec{k}} \omega a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \underbrace{\int \widetilde{d\vec{k}} \omega^2 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)}_{E_0}} \quad (3.27)$$

E_0 diverge : somme sur toutes les énergies du point zéro d'une infinité d'oscillateurs.

3.3 L'espace de Fock

Espace de Hilbert sur lequel ces opérateurs agissent : *espace de Fock*.

- $\langle \psi | H - E_0 | \psi \rangle \geq 0$ pour tous les états $|\psi\rangle$
car $\langle \psi | H - E_0 | \psi \rangle = \int \widetilde{d\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \|a(\vec{k})|\psi\rangle\|^2$ manifestement défini positif
- \exists un état $|0\rangle$ (le *vide*) tel que $a(\vec{q})|0\rangle = 0 \forall \vec{q}$
car sinon : soit ψ un état propre de H avec énergie E , $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$; par application répétée des a , on pourrait abaisser l'énergie à volonté pour enfin arriver aux valeurs négatives,

$$\begin{aligned}
Ha(\vec{q})|\psi\rangle &= \int \widetilde{d\vec{k}} \omega_{\vec{k}} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})a(\vec{q})|\psi\rangle + E_0 a(\vec{q})|\psi\rangle \\
&= a(\vec{q})H|\psi\rangle + \int \widetilde{d\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \underbrace{[a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{q})]}_{-2\omega_{\vec{k}}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})} a(\vec{k})|\psi\rangle \\
&= (E - \omega_{\vec{q}})a(\vec{q})|\psi\rangle ,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction (voir oscillateur harmonique en MQ).

- On appelle E_0 *l'énergie du vide* : constante divergente. L'ajout d'une constante à H ne change pas les observables \rightarrow redéfinir H pour y absorber E_0 .

Origine :

1. énergie calculée dans un volume infini,

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}) \Rightarrow "V_{\mathbb{R}^3}" = \int d^3x = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$$

Divergence *infrarouge* (on prend la somme sur des longueurs d'onde arbitrairement grandes). Quantité finie dans l'IR : *densité d'énergie* du vide, $\epsilon_0 = \frac{E_0}{V_{\mathbb{R}^3}}$.

2. ϵ_0 diverge toujours dans l'*ultraviolet* :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{k}| |\vec{k}|^2 \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

Interprétation physique : on prend la somme sur des longueurs d'onde arbitrairement courtes. À très courtes distances, la théorie devrait être remplacé par une théorie plus fondamentale. En particulier : l'énergie du vide n'est pas observable en TQC, mais elle est importante pour la gravité \Rightarrow au-dessous de l'échelle de longueur de la *gravité quantique* $\ell_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}$ m, besoin d'une structure qui remplace la TQC.

• Interprétation des opérateurs de champ :

- l'action $a^\dagger(\vec{k})$ sur le vide crée un état propre de l'hamiltonien avec impulsion \vec{k} ,

$$\boxed{|k\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle} \quad (3.28)$$

Opérateur de création. $|k\rangle =$ "état à une particule" dont l'impulsion est bien définie (mais de localisation maximalelement incertaine)

- $a(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}$, et

$$\boxed{a(\vec{k})|k\rangle \propto |0\rangle} \quad (3.29)$$

Opérateur d'annihilation.

- Spectre de l'hamiltonien libre = {états à n particules}, obtenus par l'action successive des a^\dagger sur le vide.
- Normalisation :

$$\begin{aligned} \langle k|k'\rangle &= \langle 0| \underbrace{a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')}_{[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] + a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k})} |0\rangle \\ &= \langle 0|(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')|0\rangle + \langle 0|a^\dagger(\vec{k}') \underbrace{a(\vec{k})|0\rangle}_0 \\ &= (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (3.30)$$

- $\phi(x)$ crée particule localisée à x , $|x\rangle = \phi(x)|0\rangle$ (mais d'impulsion maximalelement incertaine)
- $\langle p|x\rangle = e^{ipx}$
- $\langle x|x'\rangle =$ *amplitude de probabilité* pour l'évolution de $|x'\rangle$ à $\langle x|$. Voir section suivante.

3.4 Propagateurs

Causalité

Amplitude de propagation de x à y :

$$\begin{aligned} D(x-y) &\equiv \langle x|y\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\ &= \int \widetilde{d\vec{k}} \widetilde{d\vec{k}'} \langle 0| \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \left(a(\vec{k}')e^{-ik'y} + a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'y} \right) |0\rangle \\ &= \int \widetilde{d\vec{k}} \widetilde{d\vec{k}'} \langle 0| e^{-ikx} \underbrace{a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')}_{a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k}) - [a^\dagger(\vec{k}'), a(\vec{k})]} e^{ik'y} |0\rangle \\ &= \int \widetilde{d\vec{k}} e^{-ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pas de violation de causalité, car la quantité importante pour les mesures est le *commutateur*. Or

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = D(x-y) - D(y-x) \\ &= 0 \quad \text{si } (x-y)^2 < 0 \quad (\rightarrow \text{exercice}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

La probabilité de propager de x à y s'annule avec la probabilité de propager de y à x , si l'intervalle lorentzien entre x et y est du genre espace.

Généralisation pour le champ scalaire *complexe* :

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = 0 \quad \text{si } (x-y)^2 < 0. \quad (3.33)$$

Probabilité d'une *particule* (créée par ϕ) de propager de x à y s'annule avec probabilité d'une *antiparticule* (créée par ϕ^\dagger) de propager de y à x .

Propagateur de Feynman

On définit

$$D_F(x-y) \equiv \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (3.34)$$

(*propagateur de Feynman*), avec

$$T(\phi(x)\phi(y)) \equiv \begin{cases} \phi(x)\phi(y) & x^0 \geq y^0 \\ \phi(y)\phi(x) & y^0 \geq x^0 \end{cases} \quad (3.35)$$

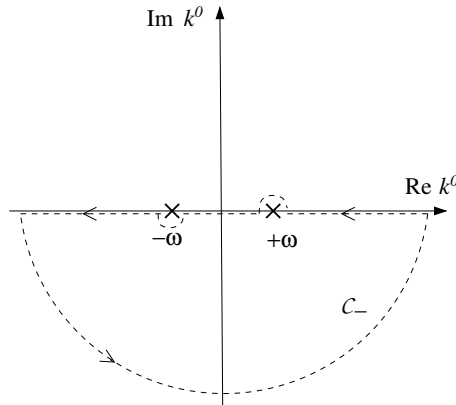
= produit d'opérateurs en *ordre chronologique*, indiqué par le symbole T ; se généralise de façon évidente aux produits de plusieurs opérateurs. Explicitement :

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \Theta(x^0 - y^0) D(x-y) + \Theta(y^0 - x^0) D(y-x) \\ &= \Theta(x^0 - y^0) \int \widetilde{d}k e^{-ik(x-y)} + \Theta(y^0 - x^0) \int \widetilde{d}k e^{ik(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \left(\Theta(x^0 - y^0) e^{-i\omega(x^0 - y^0)} + \Theta(y^0 - x^0) e^{i\omega(x^0 - y^0)} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

On cherche une expression manifestement covariante pour $D_F(x-y)$. On note d'abord que

$$\begin{aligned} \Theta(x^0 - y^0) \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} &= \Theta(x^0 - y^0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_-} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0 - y^0)}}{(k^0 - \omega)(k^0 + \omega)} \\ &= \Theta(x^0 - y^0) \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0 - y^0)}}{(k^0)^2 - \omega^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec la courbe C_- dans le plan complexe définie par



Explication : Voir annexe A pour un rappel du calcul des intégrales avec le théorème des résidus. La première égalité dans (3.37) s'obtient avec le résidu de la fonction $f(k^0) = \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0-\omega)(k^0+\omega)}$ à $k^0 = +\omega$:

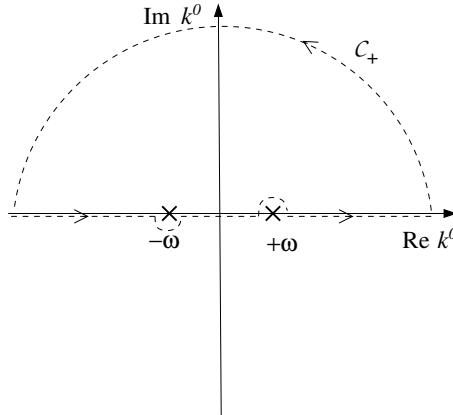
$$\text{res}(f, \omega) = \frac{e^{-i\omega(x^0-y^0)}}{2\omega}. \quad (3.38)$$

Le deuxième pôle à $k^0 = -\omega$ n'est pas inclus dans la courbe \mathcal{C}_- et ne contribue alors pas à l'intégrale. Pour obtenir la deuxième égalité, on note que $x^0 - y^0$ est positif grâce à la fonction Θ , alors l'intégrande décroît exponentiellement pour $|k^0| \rightarrow \infty$ si $\text{Im } k^0 < 0$. On peut alors fermer la courbe d'intégration dans le demi-plan complexe inférieur sans que l'arc à $|k^0| \rightarrow \infty$ contribue à l'intégrale ; le seul apport provient de l'axe réelle. Le "+i\epsilon" au dénominateur est simplement un moyen mnémotechnique pour rappeler que l'intégration sur k^0 est définie par le contournement du pôle à $-\omega$ par dessous et du pôle à $+\omega$ par dessus.

De même,

$$\begin{aligned} \Theta(y^0 - x^0) \frac{1}{2\omega} e^{i\omega(x^0-y^0)} &= -\Theta(y^0 - x^0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_+} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0-\omega)(k^0+\omega)} \\ &= \Theta(y^0 - x^0) \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \omega^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Même raisonnement mais maintenant la courbe \mathcal{C}_+ doit être fermée dans le demi-plan supérieur puisque $x^0 - y^0$ est négatif, donc l'intégrande décroît exponentiellement pour $\text{Im } k^0 > 0$. Elle inclut alors le pôle à $k^0 = -\omega$ au lieu de celui à $k^0 = +\omega$.



Insérer éqs. (3.37) et (3.39) dans éq. (3.36) :

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^0}{2\pi} i e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - \omega^2 + i\epsilon} \underbrace{(\Theta(x^0 - y^0) + \Theta(y^0 - x^0))}_{=1} \quad (3.40)$$

Utiliser $(k^0)^2 - \omega^2 = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 - m^2 = k^2 - m^2$:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}. \quad (3.41)$$

Exercice $\rightarrow iD_F(x-y)$ est une fonction de Green pour l'opérateur de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)D_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y). \quad (3.42)$$

(Rappel : si G est une fonction de Green pour l'opérateur D , $D_x G(x, y) = \delta(x-y)$, alors l'équation différentielle $D_x f = J$ a la solution $f(x) = \int dy J(y)G(x, y)$. Fonctions de Green différentes pour conditions aux limites différentes.)

Exercice \rightarrow propagateur avancé, propagateur retardé.

Chapitre 4

La formule de réduction de LSZ

4.1 La théorie libre vs. la théorie avec interactions

Avant : théorie libre sans interactions.

- $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \phi^2$
- équation de mouvement linéaire, $(\square + m_0^2)\phi = 0$
⇒ principe de superposition, pas de diffusion
- théorie exactement soluble, spectre = états à n particules
- première excitation : énergie au repos m_0
- décomposition en modes de Fourier : $a(\vec{k})$, $a^\dagger(\vec{k})$ ne dependent pas du temps, annihile / crée un état à une particule bien normalisé :

$$a^\dagger(\vec{k})|0\rangle = |k\rangle, \quad \langle k'|k\rangle = 2\omega(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').$$

Maintenant : théorie avec interactions,

- $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \phi^2 - \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)$ avec $\mathcal{V}_{\text{int}}(\phi) = \text{polynôme de degré } \geq 3$
- équation de mouvement non linéaire, $(\square + m_0^2)\phi = -\mathcal{V}'_{\text{int}}(\phi)$
(ou généralement : $(\square + m_0^2)\phi = J$ avec J une fonction non linéaire de ϕ et d'autres champs)
⇒ diffusion
- théories généralement non solubles, spectre = états à n particules, états liés, résonances instables...
- énergie au repos du premier niveau excité m différent de m_0 :
masse de la particule \neq paramètre m_0 du lagrangien
- on peut toujours définir des opérateurs a et a^\dagger par éq. (3.20) mais ils *ne seront plus indépendants du temps*. De surcroît :

$$a^\dagger(\vec{k}, t)|0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \dots \quad (4.1)$$

A priori $a^\dagger(\vec{k}, t)|0\rangle$ sera une combinaison linéaire de *tous les états* du spectre (en particulier, ne sera plus un état propre d'impulsion \vec{k}).

On veut utiliser la TQC pour décrire des processus de *diffusion*. Dans ces processus, aux temps $t \rightarrow -\infty$, les particules incidentes sont bien isolées les unes des autres = effectivement des particules libres. Pareil pour les particules émergentes à $t \rightarrow +\infty$. On va alors *redéfinir* ϕ de façon que pour $t \rightarrow \pm\infty$, $a^\dagger(\vec{k}, t)|0\rangle$ devient un état à une particule bien normalisé, au moins "au sens faible", c.-à-d. dans les produits scalaires avec d'autres états. Ensuite, aux temps asymptotiques, on pourra utiliser le formalisme de la théorie libre. La redéfinition de ϕ entrainera un changement correspondant de l'expression du lagrangien.

Evolution temporelle des opérateurs selon l'équation de Heisenberg :

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{itH} \phi(0, \vec{x}) e^{-itH}. \quad (4.2)$$

Généralisation relativiste :

$$\phi(x) = e^{iPx} \phi(0) e^{-iPx} \quad (4.3)$$

avec les impulsions $P^\mu = T^{0\mu}$ = les générateurs des translations en espace-temps, voir section 2.3.

Redéfinition des champs :

1. On souhaite que

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0. \quad (4.4)$$

En général,

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{iPx} \phi(0) e^{-iPx} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(0) | 0 \rangle = c \quad (\text{cte.}) \quad (4.5)$$

où on a utilisé l'invariance du vide par translations. Alors on redéfinit $\phi(x) \rightarrow \phi(x) - c$.

2. On souhaite que l'état $\phi(x)|0\rangle$ soit bien normalisé par rapport aux états normalisés à une particule $|p\rangle$ de quadri-impulsion p , $p^2 = m^2$:

$$\langle p | \phi(x) | 0 \rangle = e^{ipx}. \quad (4.6)$$

En général on aurait

$$\langle p | \phi(x) | 0 \rangle = \langle p | e^{iPx} \phi(0) e^{-iPx} | 0 \rangle = e^{ipx} \langle p | \phi(0) | 0 \rangle \equiv e^{ipx} Z \quad (4.7)$$

où $Z = \langle p | \phi(0) | 0 \rangle$ est une invariante de Lorentz (car Z peut dépendre seulement de $p^2 = m^2$). Dans la théorie libre, on a la relation souhaitée $Z = 1$:

$$\begin{aligned} Z &= \langle p | \phi(0) | 0 \rangle = \langle p | \int \widetilde{d\vec{k}} \left(a(\vec{k}) + a^\dagger(\vec{k}) \right) | 0 \rangle = \int \widetilde{d\vec{k}} \langle p | k \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}) = 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Mais on peut montrer que $Z = 1$ *uniquement* dans la théorie libre, alors pour une théorie avec interactions on redéfinit

$$\phi \rightarrow \phi / \sqrt{Z}, \quad (4.9)$$

impliquant un changement de la normalisation de tous les termes du lagrangien : “renormalisation de la fonction d’onde”.

3. On peut montrer (\rightarrow exercices) : Si $\langle \lambda_p |$ est un état lié où multiparticules avec impulsion p , alors

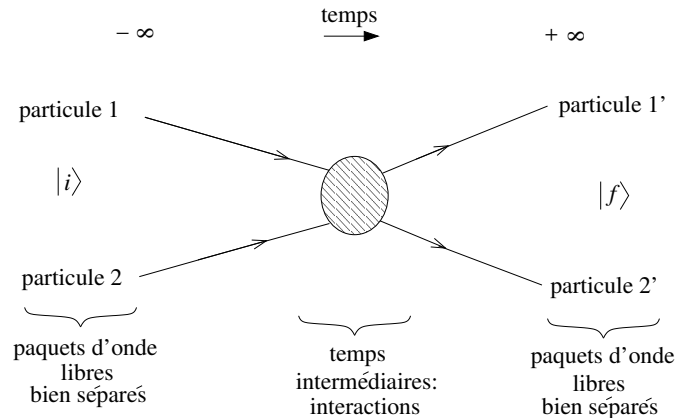
$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \lambda_p | a^\dagger(\vec{k}, t) | 0 \rangle = 0. \quad (4.10)$$

Après les redéfinitions 1. et 2. et avec la propriété 3. on conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} a^\dagger(\vec{k}, t) | 0 \rangle \text{ se comporte comme état à une particule bien normalisé.} \quad (4.11)$$

4.2 La formule de réduction de LSZ

Processus de diffusion idéalisé pour deux particules entrantes, deux particules dans l'état final :



Particules à $t \rightarrow \pm\infty$: paquets d'onde bien séparés, assimilés à des champs libres. Particules à t intermédiaire : interactions. On cherche l'amplitude de probabilité quantique $\langle f|i \rangle$ pour une transition de l'état initial $|i \rangle$ à l'état final $|f \rangle$.

Pour justifier les manipulations suivantes, on considère des paquets d'onde de largeur finie, c.-à-d. la convolution de $a(\vec{k}, t)$ et $a^\dagger(\vec{k}, t)$ avec des fonctions de test appropriées $f(\vec{k})$. Par exemple, pour un paquet d'onde gaussien localisé autour de k_1 dans l'espace des impulsions :

$$a_1^\dagger(t) \equiv \int d^3k f_1(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}, t), \quad f_1(\vec{k}) \propto \exp\left(-\frac{|\vec{k} - \vec{k}_1|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.12)$$

(largeur exacte σ pas importante — à la fin du calcul on prendra $\sigma \rightarrow 0$, $f_1(\vec{k}) \rightarrow \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_1)$). Alors on pose

$$\begin{aligned} |i \rangle &= \lim_{t \rightarrow -\infty} a_1^\dagger(t) a_2^\dagger(t) |0 \rangle, \\ |f \rangle &= \lim_{t \rightarrow +\infty} a_1^\dagger(t) a_2^\dagger(t) |0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

On utilise la définition des a et a^\dagger , voir éq. (3.20), pour calculer

$$\begin{aligned} &a_1^\dagger(+\infty) - a_1^\dagger(-\infty) \\ &= -i \int d^3k f_1(\vec{k}) \left(\lim_{x^0 \rightarrow \infty} \int d^3x \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \right) - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \int d^3x \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \right) \right) \\ &= -i \int d^3k f_1(\vec{k}) \int d^4x \partial_0 \left(e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \right) \quad (\text{théorème fondamental de l'analyse}) \\ &= -i \int d^3k f_1(\vec{k}) \int d^4x e^{-ikx} (-ik^0 \partial_0 + \partial_0^2 + (k^0)^2 + ik^0 \partial_0) \phi(x) \\ &= -i \int d^3k f_1(\vec{k}) \int d^4x e^{-ikx} (\partial_0^2 + |\vec{k}|^2 + m^2) \phi(x) \quad (\text{avec } m^2 = k^2 = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2) \\ &= -i \int d^3k f_1(\vec{k}) \int d^4x e^{-ikx} (\square + m^2) \phi(x) \quad (\text{IPP}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pour la dernière égalité, la convolution avec $f_1(\vec{k})$ garantit qu'il n'y a pas de terme de surface (décroissance exponentielle lorsque $|\vec{k}| \rightarrow \infty$). Dans une théorie libre, les a_i^\dagger seraient indépendants du temps car $(\square + m^2)\phi = 0$ (alors en particulier $a_1^\dagger(+\infty) = a_1^\dagger(-\infty)$), mais dans une théorie avec interactions, $(\square + m^2)\phi \neq 0$.

Par conjugaison :

$$a_1(+\infty) - a_1(-\infty) = i \int d^3k f_1(\vec{k}) \int d^4x e^{ikx} (\square + m^2) \phi(x) \quad (4.15)$$

On va utiliser ces relations pour réexprimer $\langle f|i \rangle$. Les opérateurs d'annihilation et de création dans $\langle f|i \rangle$ sont en ordre chronologique, donc on peut insérer le symbole T (voir éq. (3.35)) sans rien changer :

$$\begin{aligned} \langle f|i \rangle &= \langle 0| a_{1'}(+\infty) a_{2'}(+\infty) a_1^\dagger(-\infty) a_2^\dagger(-\infty) |0 \rangle \\ &= \langle 0| T a_{1'}(+\infty) a_{2'}(+\infty) a_1^\dagger(-\infty) a_2^\dagger(-\infty) |0 \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

On supposera que les impulsions $k_{1,2}$ sont différentes des impulsions $k_{1',2'}$ (sinon : diffusion vers l'avant, les particules n'interagissent pas). Dans ce cas on peut écrire

$$\langle f|i \rangle = \langle 0| T (a_{1'}(+\infty) - a_{1'}(-\infty)) (a_{2'}(+\infty) - a_{2'}(-\infty)) (a_1^\dagger(-\infty) - a_1^\dagger(+\infty)) (a_2^\dagger(-\infty) - a_2^\dagger(+\infty)) |0 \rangle \quad (4.17)$$

car les termes supplémentaires par rapport à (4.16) impliquent tous des facteurs soit de $a(-\infty)$ (annihilant $|0\rangle$ à droite) soit de $a^\dagger(\infty)$ (annihilant $\langle 0|$ à gauche). (Si par contre quelques-unes parmi les impulsions initiales sont égales aux impulsions finales, il y a des ambiguïtés d'ordre car $[a(\infty), a^\dagger(\infty)] \neq 0$ et pareil à $-\infty$. Ce cas de diffusion vers l'avant nécessite un traitement spécial que l'on ne discutera pas.)

Prenons maintenant la limite des impulsions précisément définies où les largeurs des paquets d'onde tendent vers zéro, $f_i(\vec{k}) \rightarrow \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_i)$. Avec (4.14) et (4.15) on obtient alors

$$\langle f|i\rangle = i^4 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_{1'} d^4x_{2'} e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2 + ik_{1'}x_{1'} + ik_{2'}x_{2'}} (\square_1 + m^2)(\square_2 + m^2)(\square_{1'} + m^2)(\square_{2'} + m^2) \langle 0| T \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_{1'})\phi(x_{2'})|0\rangle. \quad (4.18)$$

Formule de réduction de Lehmann-Symanzik-Zimmermann pour la diffusion $2 \rightarrow 2$, généralisable aux processus $n \rightarrow n'$ de façon évidente. Relation entre *amplitude de transition* $\langle f|i\rangle$ et *fonction de corrélation en ordre chronologique* $\langle 0| T \phi(x_1) \dots \phi(x_{n'})|0\rangle$.

Version équivalente après transformation de Fourier :

$$\langle f|i\rangle = (-i)^4 (k_1^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)(k_{1'}^2 - m^2)(k_{2'}^2 - m^2) G(k_1, k_2, -k_{1'}, -k_{2'}) \quad (4.19)$$

où

$$G(k_1, k_2, -k_{1'}, -k_{2'}) = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_{1'} d^4x_{2'} e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2 + ik_{1'}x_{1'} + ik_{2'}x_{2'}} \langle 0| T \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_{1'})\phi(x_{2'})|0\rangle. \quad (4.20)$$

- Sans la redéfinition des champs $\phi \rightarrow \phi/\sqrt{Z}$ (voir 4.1.2), on aurait obtenu une formule équivalente avec des facteurs explicites de \sqrt{Z} ; cette convention alternative est assez courante dans la littérature.
- Dans éq. (4.19) les particules sont sur couche de masse : $k_i^2 = m^2$, alors $k_i^2 - m^2 = 0$ avec $m =$ masse physique de la théorie avec interactions. Contribution à $\langle f|i\rangle$ non nulle seulement si la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $G(k_1, k_2, k_{1'}, k_{2'})$ a un pôle à $k_i^2 = m^2$. L'amplitude $\langle f|i\rangle$ est le résidu à ce pôle.
- Un grande partie de la TQC et du reste de ce cours : Calcul de $\langle 0| T \phi(x_1) \dots \phi(x_{n'})|0\rangle$ (ou bien $G(k_1, \dots, k_{n'})$). La formule de LSZ permet ensuite de faire le lien avec observation : section efficace = |(amplitude de transition $\langle f|i\rangle$)|² (aux facteurs cinématiques près).
- Deux stratégies équivalentes pour calculer fonctions de corrélation : passage à la *représentation d'interaction* dans le cadre du formalisme canonique (\rightarrow exercices), ou *quantification par l'intégrale de chemin* (\rightarrow chapitre suivant).

Chapitre 5

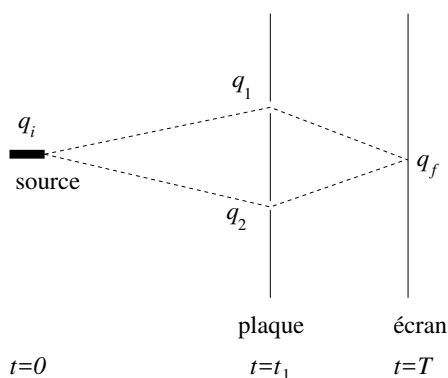
La quantification par l'intégrale de chemin

5.1 Les intégrales de chemin en mécanique quantique

Rappel : on travaille dans la représentation de Heisenberg où les opérateurs dépendent du temps et l'état d'un système est constant (hors mesures). On place un système dans l'état $|q_i\rangle$, un état propre de l'opérateur de position $\hat{q}(t)$ à $t = 0$ avec valeur propre q_i . On s'intéresse à son recouvrement avec l'état $|q_f, T\rangle$, un état propre de $\hat{q}(T) = e^{iHT}\hat{q}(0)e^{-iHT}$ avec valeur propre q_f , qui peut s'écrire $|q_f, T\rangle = e^{+iHT}|q_f\rangle$. Il ne faut pas confondre $|q_f, T\rangle$ avec un état de Schrödinger ! On a

$$\langle q_f, T | q_i \rangle = \langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle. \quad (5.1)$$

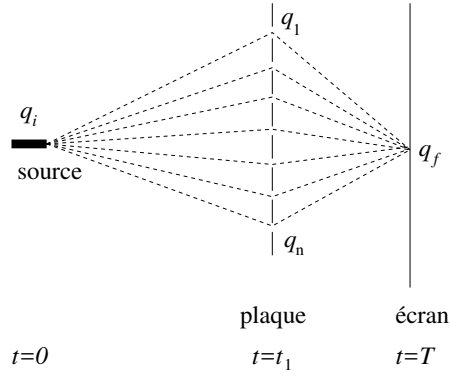
Expérience quintessenciée de la mécanique quantique : *fentes de Young*. On connaît la position d'une particule à la source à $t = 0$ et on la mesure encore sur l'écran à $t = T$. Entre la source et l'écran il y a une plaque impénétrable percée par des fentes. Pour deux fentes :



$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \langle q_f | e^{-iH(T-t_1)} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-iHt_1} | q_i \rangle + \langle q_f | e^{-iH(T-t_1)} | q_2 \rangle \langle q_2 | e^{-iHt_1} | q_i \rangle. \quad (5.2)$$

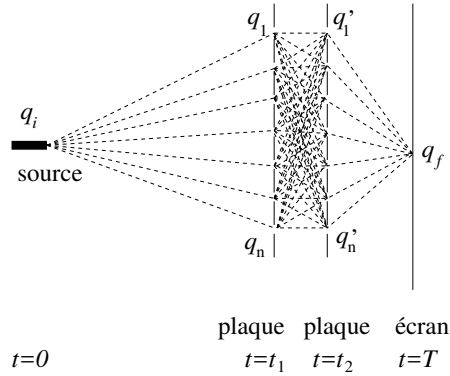
Superposition cohérente des amplitudes de probabilité.

n fentes :



$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \sum_k \langle q_f | e^{-iH(T-t_1)} | q_k \rangle \langle q_k | e^{-iHt_1} | q_i \rangle. \quad (5.3)$$

Deux plaques, chacune avec n fentes :

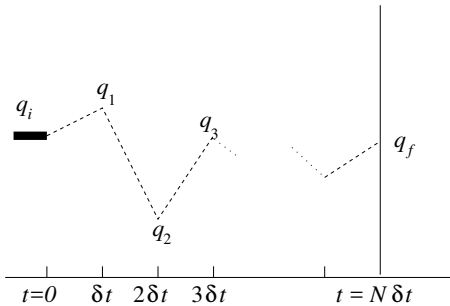


$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \sum_{mk} \langle q_f | e^{-iH(T-t_2)} | q'_k \rangle \langle q'_k | e^{-iH(t_2-t_1)} | q_m \rangle \langle q_m | e^{-iHt_1} | q_i \rangle. \quad (5.4)$$

Infiniment de plaques avec infiniment de fentes (= plus d'obstacle) :

$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ \text{possibles entre} \\ q_f \text{ et } q_i}} (\text{amplitude de suivre le chemin}). \quad (5.5)$$

Pour une discrétisation avec N pas en temps et $N \rightarrow \infty$, avec N intégrations sur des positions intermédiaires q_j :



$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} (dq_j) \langle q_f | e^{-iH \frac{T}{N}} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH \frac{T}{N}} | q_{N-2} \rangle \cdots \langle q_1 | e^{-iH \frac{T}{N}} | q_i \rangle. \quad (5.6)$$

Cas spécial : hamiltonien libre, $H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. On note les relations

$$\int dq |q\rangle\langle q| = 1, \quad \int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle\langle p| = 1, \quad \langle q|p\rangle = e^{ipq} \quad (5.7)$$

pour des états propres $|q\rangle$ de l'opérateur de position $\hat{q}(0)$ avec valeur propre q , et $|p\rangle$ de l'opérateur d'impulsion $\hat{p}(0)$ avec valeur propre p .

Pour le pas entre q_j et q_{j+1} , avec $\delta t = T/N$:

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \exp\left(-i\delta t \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) | q_j \rangle &= \int \frac{dp}{2\pi} \langle q_{j+1} | \exp\left(-i\delta t \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) | p \rangle \langle p | q_j \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \exp\left(-i\delta t \frac{p^2}{2m}\right) \exp(ip(q_{j+1} - q_j)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Intégrale gaussienne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(\frac{1}{2}iax^2 + ibx\right) = \left(\frac{2\pi i}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-i\frac{b^2}{2a}\right) \quad (\rightarrow \text{exercices}), \quad (5.9)$$

alors

$$\langle q_{j+1} | \exp\left(-i\delta t \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) | q_j \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \delta t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{i\delta t m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}\right)^2\right). \quad (5.10)$$

Avec $q_0 \equiv q_i$ et $q_N \equiv q_f$:

$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k \exp\left(i\delta t \frac{m}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}\right)^2\right). \quad (5.11)$$

Pour $N \rightarrow \infty$ on remplace

$$\left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}\right)^2 \rightarrow \dot{q}^2, \quad \delta t \sum_j \rightarrow \int_0^T dt \quad (5.12)$$

et on définit la mesure de l'intégrale de chemin par

$$\int \mathcal{D}q \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k. \quad (5.13)$$

Expression compacte pour l'amplitude de transition :

$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q \exp\left(i \int_0^T dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2\right). \quad (5.14)$$

Prescription : intégrer sur tous les chemins possibles $q(t)$ avec $q(0) = q_i$ et $q(T) = q_f$, pondérer avec e^{iS} où S = action classique le long du chemin.

Cas plus général : hamiltonien séparable,

$$H(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}). \quad (5.15)$$

(Cas même plus généraux : Termes mixtes, p.ex. $\hat{p}\hat{q}$, donnent lieu aux ambiguïtés d'ordre. Termes d'ordre supérieur en $\hat{p} \Rightarrow$ intégrale sur p non gaussienne.) Selon la formule de Baker-Campbell-

Hausdorff,

$$\begin{aligned}
& \langle q_{j+1} | \exp \left(-i \delta t \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \right) \right) | q_j \rangle \\
&= \langle q_{j+1} | \exp \left(-i \delta t \frac{\hat{p}^2}{2m} \right) \exp(-i \delta t V(\hat{q})) \exp \left(\underbrace{\frac{\delta t^2}{4m} [\hat{p}^2, V(\hat{q})] + \mathcal{O}(\delta t^3)}_{\text{négligeable lorsque } \delta t \rightarrow 0} \right) | q_j \rangle \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} \langle q_{j+1} | \exp \left(-i \delta t \frac{\hat{p}^2}{2m} \right) | p \rangle \langle p | \exp(-i \delta t V(\hat{q})) | q_j \rangle + \mathcal{O}(\delta t^2) \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} \exp \left(-i \delta t \frac{p^2}{2m} + i(q_{j+1} - q_j)p \right) \exp(-i \delta t V(q_j)) + \mathcal{O}(\delta t^2) \\
&\stackrel{\text{int. gaussienne}}{=} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \delta t}} \exp \left(i \delta t \left(\frac{m}{2} \frac{(q_{j+1} - q_j)^2}{\delta t^2} - V(q_j) \right) \right) + \mathcal{O}(\delta t^2)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Dans la limite $\delta t \rightarrow 0$, les termes en parenthèses deviennent $\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) = L$ (le lagrangien) et $\int_0^T dt L(q, \dot{q}) = S[q]$. Résultat comme pour le cas libre :

$$\boxed{\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[q] \right)}. \tag{5.17}$$

Utilité de ce formalisme : Calcul des *éléments de matrice / insertions d'opérateurs*, par exemple

$$\begin{aligned}
& \langle q_f, t = T | \hat{q}(t = t_1) | q_i, t = 0 \rangle \\
&= \langle q_f | e^{-iH(T-t_1)} \hat{q}(0) e^{-iHt_1} | q_i \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_j dq_j \langle q_f | e^{-iH \delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH \delta t} | q_{N-2} \rangle \cdots \\
&\quad \cdots \langle q_{k+1} | e^{-iH \delta t} \underbrace{\hat{q}(0) | q_k \rangle}_{q_k | q_k} \langle q_k | e^{-iH \delta t} | q_{k-1} \rangle \cdots \langle q_1 | e^{-iH \delta t} | q_i \rangle \quad (\text{avec } t_1 = k \delta t) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_j dq_j q_k \langle q_f | e^{-iH \delta t} | q_{N-1} \rangle \cdots \langle q_1 | e^{-iH \delta t} | q_i \rangle \\
&= \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q q(t_1) e^{iS[q]}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

De même, pour une insertion de deux opérateurs,

$$\begin{aligned}
& \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q q(t_1) q(t_2) e^{iS[q]} \\
&= \begin{cases} \langle q_f, T | \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_i \rangle & \text{si } T > t_1 > t_2 > 0 \\ \langle q_f, T | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_i \rangle & \text{si } T > t_2 > t_1 > 0 \end{cases} \\
&= \langle q_f, T | T \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_i \rangle
\end{aligned} \tag{5.19}$$

ou pour n opérateurs :

$$\boxed{\int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q q(t_1) \cdots q(t_n) e^{iS[q]} = \langle q_f, T | T \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) | q_i, 0 \rangle}. \tag{5.20}$$

L'intégrale de chemin calcule les insertions des produits d'opérateurs entre $|q_i\rangle$ et $\langle q_f|$ *en ordre chronologique*. Il est important de noter que le membre de gauche d'éq. (5.20) *n'implique que des quantités classiques* qui commutent, tant que le membre de droite contient des opérateurs quantiques.

5.2 Fonctionnelle génératrice

On définit

$$S_J[q] \equiv S[q, J] \equiv \int_0^T dt (L(q, \dot{q}) + J(t)q(t)) . \quad (5.21)$$

Action en présence d'une *source* $J(t)$. Utilité :

$$\frac{\delta S_J}{\delta J(t)} = q(t) \quad (5.22)$$

$$\frac{\delta}{\delta J(t)} \exp(iS_J[q]) = \left(\frac{\partial}{\partial S} \exp(iS) \right) \frac{\delta S}{\delta J} = iq(t) \exp(iS_J[q]) , \quad (5.23)$$

(pour la définition de la dérivée fonctionnelle, voir l'annexe). Alors, sous l'intégrale de chemin

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t)} \int \mathcal{D}q e^{iS_J[q]} \Big|_{J=0} = \int \mathcal{D}q q(t) e^{iS[q]} \quad (5.24)$$

ou plus généralement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_n)} \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q e^{iS_J[q]} \Big|_{J=0} \\ &= \int_{q(0)=q_i}^{q(T)=q_f} \mathcal{D}q q(t_1) \cdots q(t_n) e^{iS[q]} \\ &= \langle q_f, t = T | \mathbb{T} \hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n) | q_i, t = 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.25)$$

la dernière égalité correspondant à éq. (5.20).

En TQC, il faudra évaluer éq. (5.25) pas entre $|q_i, t = 0\rangle$ et $\langle q_f, t = T|$ mais plutôt entre $|0, t \rightarrow -\infty\rangle$ et $\langle 0, t \rightarrow +\infty|$ afin de calculer les moyennes quantiques des produits d'opérateurs en ordre chronologique dans le vide.

5.3 Les intégrales de chemin en théorie quantique des champs

Objectif : calculer

$$\langle 0 | \mathbb{T} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle \quad (5.26)$$

pour obtenir $\langle f | i \rangle$ avec la formule de LSZ, éq. (4.18).

Pour un champ scalaire réel avec des interactions, on définit l'action en présence d'une source $J(x)$

$$S_J[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi) + J\phi \right) \quad (5.27)$$

et l'intégrale de chemin en présence de la source

$$\langle \phi_f(\vec{x}), t' | \phi_i(\vec{x}), t \rangle_J = \int_{\phi(t, \vec{x}) = \phi_i(\vec{x})}^{\phi(t', \vec{x}) = \phi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\phi e^{iS_J[\phi]} . \quad (5.28)$$

L'intégration est sur tous les chemins dans l'espace de configuration de ϕ . Comme avant on va ignorer le problème mathématique de la définition rigoureuse (comment définir la mesure sur l'espace des chemins... ?)

On choisit ϕ_i et ϕ_f de manière que $\langle \phi_f | 0 \rangle \neq 0$ et $\langle 0 | \phi_i \rangle \neq 0$. Quand $t \rightarrow -\infty$ et $t' \rightarrow +\infty$, seulement les projections de $|\phi_{i,f}\rangle$ sur l'état fondamental contribueront à l'intégrale. Pour démontrer cela, supposons que $H|0\rangle = 0$ (sinon on ajoute une constante à H) et insérons deux ensembles complets d'états propres de H , $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, dans l'expression de l'intégrale de chemin,

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\phi(-T, \vec{x}) = \phi_i(\vec{x})}^{\phi(+T, \vec{x}) = \phi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int_{-T}^T dt \int d^3x (\mathcal{L} + J\phi) \right) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \phi_f, T | \phi_i, -T \rangle_J \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{mn} \langle \phi_f, T | e^{-iHT} | n, T \rangle_J \langle n | m \rangle_J \langle m, -T | e^{iH(-T)} | \phi_i, -T \rangle_J \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{mn} e^{-i(E_n + E_m)T} \langle \phi_f, T | n, T \rangle_J \langle n, 0 | m, 0 \rangle_J \langle m, -T | \phi_i, -T \rangle_J.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

On donne à T une partie imaginaire $-i\epsilon T$, puis on pose $\epsilon \rightarrow 0$ après l'intégration (cette prescription fait partie de la définition de l'intégrale, voir intégrale gaussienne avec exposant imaginaire \rightarrow exercices). Alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \phi_f, T | \phi_i, -T \rangle_J = e^0 \langle \phi_f | 0 \rangle \langle 0 | 0 \rangle_J \langle 0 | \phi_i \rangle \tag{5.30}$$

Explication : Toutes les contributions à la somme de la dernière ligne de éq. (5.29) décroissent exponentiellement lorsque $|T| \rightarrow \infty$, sauf celle de l'état fondamental où $E_0 = 0$. De plus, on a $J \rightarrow 0$ à $T \rightarrow \pm\infty \Rightarrow$ les amplitudes $\langle \phi_f | 0 \rangle_J$ et $\langle 0 | \phi_i \rangle_J$ deviennent celles sans source. On trouve l'expression de l'amplitude de persistance du vide en présence de la source J :

$$\langle 0 | 0 \rangle_J = \frac{1}{N} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int_{-T}^T d^4x (\mathcal{L} + J\phi) \right) \equiv \frac{1}{N} Z[J] \tag{5.31}$$

$N = \langle \phi_f | 0 \rangle \langle 0 | \phi_i \rangle$ est une constante de normalisation indépendante de J ; pour que $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ il faut que $N = Z[0]$. $Z[J]$ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation à n points :

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{i \delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{i \delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0}. \tag{5.32}$$

Cf. physique statistique : moyenne thermique d'une observable donnée par la dérivée de la fonction de partition (fonction génératrice), par exemple

$$\langle H \rangle \propto \frac{\partial}{\partial \beta} Z, \quad Z = \text{tr} e^{-\beta H}. \tag{5.33}$$

Exemple : Propagateur de Feynman de la théorie libre

On va utiliser ce formalisme pour retrouver la fonction de corrélation à deux points dans la théorie libre. On connaît déjà le résultat, à savoir le propagateur de Feynman. L'action est

$$\begin{aligned}
iS_J &= i \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right) \\
&\stackrel{\text{IPP}}{=} -\frac{i}{2} \int d^4x (\phi(\square + m^2)\phi - 2J\phi) \\
&\stackrel{\text{Fourier}}{=} \frac{i}{2} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{i(p+q)x} \left(\tilde{\phi}(p)(q^2 - m^2)\tilde{\phi}(q) + 2\tilde{J}(p)\tilde{\phi}(q) \right) \\
&= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\tilde{\phi}(p)(p^2 - m^2)\tilde{\phi}(-p) + 2\tilde{J}(p)\tilde{\phi}(-p) \right) \\
&= \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\left(\tilde{\phi}(p) + \frac{1}{p^2 - m^2} \tilde{J}(p) \right) (p^2 - m^2) \left(\tilde{\phi}(-p) + \frac{1}{p^2 - m^2} \tilde{J}(-p) \right) \right. \\
&\quad \left. - \tilde{J}(p) \frac{1}{p^2 - m^2} \tilde{J}(-p) \right)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

On fait un changement de variable $\tilde{\phi}'(p) \equiv \tilde{\phi}(p) + \frac{1}{p^2 - m^2} \tilde{J}(p)$. A noter $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ (ajout de "constante" = d'un terme fonctionnellement indépendant de ϕ). On retrouve alors la même intégrale de chemin que pour $J = 0$ à un facteur près :

$$Z[J] = \exp \left(-\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2} \right) Z[0]. \tag{5.35}$$

A priori l'intégrande n'est pas définie à cause des pôles à $p^0 = \pm\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \equiv \pm\omega_{\vec{p}}$. Or, pour définir l'intégration de chemin dans $Z[J]$, nous avons remplacé $t \rightarrow t(1 - i\epsilon)$. En espace de Fourier : $p^0 \rightarrow p^0(1 + i\epsilon) \Rightarrow$ courbe de Feynman, évite le pôle à $-\omega_{\vec{p}}$ au-dessous et celui à $+\omega_{\vec{p}}$ au-dessus. Alors en fait

$$Z[J] = \exp \left(-\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) Z[0]. \tag{5.36}$$

Après inversion de la transformation de Fourier, on obtient enfin la *fonctionnelle génératrice pour un champ scalaire libre* :

$$\boxed{Z[J] = \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right) Z[0]} \tag{5.37}$$

avec l'expression de D_F comme avant (voir éq. (3.41)),

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \tag{5.38}$$

On applique éq. (5.32) pour trouver la fonction à deux points :

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z \Big|_{J=0} = D_F(x_1 - x_2) \tag{5.39}$$

ce qui est l'ancien résultat du chapitre 3.4.

Exemple : Fonctions à $n > 2$ points dans la théorie libre

Avec éqs. (5.32) et (5.37) on trouve pour la fonction à 3 points

$$\begin{aligned}
&\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) | 0 \rangle \\
&= \left(\frac{1}{i} \right)^3 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right) \Big|_{J=0} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Raison : l'exponentielle est paire en J , sa dérivée troisième est alors impaire et s'annule à $J = 0$.
Même raisonnement pour toutes les autres fonctions à $n = (2m + 1)$ points :

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_{2m+1}) | 0 \rangle = 0. \quad (5.41)$$

Fonction à quatre points : on développe l'exponentielle. La seule contribution vient des termes avec 4 facteurs de J (termes avec moins que 4 facteurs : zéro sous la quatrième dérivée fonctionnelle ; termes avec plus que 4 : zéro à $J = 0$). On trouve ainsi

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) | 0 \rangle \\ &= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Résultat général : *théorème de Wick*,

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_{2n}) | 0 \rangle = \sum_{\text{appariements}} D_F(x_{i_1} - x_{i_2}) \dots D_F(x_{i_{2n-1}} - x_{i_{2n}}). \quad (5.43)$$

Convergence et prolongement analytique

Nos intégrales de chemin sont pondérées avec une exponentielle $e^{iS[\phi]}$ dont l'exposant est purement imaginaire. Pour les définir il fallait donner une petite partie imaginaire au paramètre t . Explicitement : Séparer les parties positives et négatives de S ,

$$S = S_{\text{pos}} + S_{\text{neg}}, \quad S_{\text{pos}} = \int dt d^3x \frac{(\ddot{\phi})^2}{2}, \quad S_{\text{neg}} = - \int dt d^3x \left(\frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{2} + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi) \right) \quad (5.44)$$

(en supposant que \mathcal{V}_{int} possède une borne inférieure, alors est positif après ajout d'une constante). Avec $t \rightarrow t(1 - i\epsilon)$ on a $dt \rightarrow (1 - i\epsilon) dt$ et $\ddot{\phi} \rightarrow (1 - i\epsilon)^{-2} \ddot{\phi}$, donc au premier ordre

$$iS_{\text{pos}} \rightarrow (i - \epsilon) S_{\text{pos}}, \quad iS_{\text{neg}} \rightarrow (i + \epsilon) S_{\text{neg}}. \quad (5.45)$$

Par conséquent, $\text{Re}(iS)$ tend vers $-\infty$ lorsque $\|\phi\| \rightarrow \infty$ (cf. exercices pour les intégrales gaussiennes en dimension finie).

Procédure :

1. intégration complexe sur t avec la courbe d'intégration temporelle légèrement penchée par rapport à l'axe réelle, $t \rightarrow t(1 - i\epsilon)$
2. évaluer l'intégrale sur t et, en fonction de celle-ci, l'intégrale de chemin
3. poser $\epsilon = 0$.

Équivalent :

1. intégration complexe sur t avec la courbe d'intégration tournée par 90° par rapport à l'axe réelle, $t \rightarrow \tau \equiv -it$, $\partial_t \rightarrow \partial_\tau = i\partial_t$, $dt \rightarrow d\tau = -i dt$
2. évaluer l'intégrale et l'intégrale de chemin,
3. inverser la rotation si nécessaire.

Rotation de Wick. Donne le bon résultat si *pas de pôle touché* lors de la rotation de la courbe d'intégration.

Exemple, important plus tard :

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - \Delta^2 + i\epsilon)^n} \xrightarrow{p^0 \rightarrow ip^0} i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-(p^0)^2 - \vec{p}^2 - \Delta^2)^n} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} (-1)^n \int_0^\infty d|p| \frac{2\pi^2 |p|^3}{(|p|^2 + \Delta^2)^n} \\ &= (-1)^n \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \Delta^{4-2n} \quad (n > 2). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Dans l'intégrale de chemin, rotation de Wick $t \rightarrow \tau$ donne l'*intégrale de chemin euclidéenne*

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}, \quad S_E = \int d^4x_E \left(\frac{1}{2}(\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi) \right).$$

Souvent *mieux défini* (exposant réel, décroissant si $\|\phi\| \rightarrow \infty$) et *plus facile à évaluer* (approximation du point col \rightarrow exercice; méthodes numériques: TQC sur réseau). Concepts liés en TQC et physique statistique par la rotation de Wick :

TQC	physique statistique
intégrale de chemin	intégrale de chemin euclidéenne
équation de Schrödinger $i\partial_t \psi = \frac{1}{2m} \Delta \psi$	équation de diffusion $\partial_t u = D \Delta u$
opérateur d'évolution e^{iHt}	facteur de Boltzmann $e^{-\beta H}$
fluctuation quantique	fluctuation thermique

Chapitre 6

La théorie des perturbations et les diagrammes de Feynman

6.1 Fonctionnelle génératrice et diagrammes de Feynman

Simple exemple d'une théorie avec interactions : *théorie* ϕ^4 ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2 + \delta_{m^2})\phi^2 - \frac{\lambda + \delta_\lambda}{24}\phi^4 \quad (6.1)$$

avec $m^2 = \text{masse}^2$ du particule = énergie^2 au repos de la première excitation ; $\lambda =$ défini par une certaine section efficace de diffusion (détails plus tard). Les paramètres Z , δ_{m^2} , δ_λ doivent être choisis tel que le pôle de la fonction à deux points est à $p^2 = m^2$ avec résidu i et

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle k|\phi(x)|0\rangle = e^{ikx} \quad (6.2)$$

où $\langle k| =$ état à 1 particule bien normalisé (voir la dérivation de la formule de LSZ, section 4.2). Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, on s'attend que $Z \rightarrow 1$ et $\delta_{m^2} \rightarrow 0$, $\delta_\lambda \rightarrow 0$ (cas limite de la théorie libre). En fait on va bientôt trouver que $Z = 1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$, $\delta_{m^2} = \mathcal{O}(\lambda)$, $\delta_\lambda = \mathcal{O}(\lambda^2)$. Notre objectif sera de construire les fonctions à n points par un développement en λ .

Pour l'instant on pose $Z = 1$, $\delta_{m^2} = 0$, $\delta_\lambda = 0$ pour simplifier la notation. Attention : par conséquent, m , λ , \sqrt{Z} ne représentent pas la masse, le couplage, la normalisation du champ physique. On va revisiter ce point dans Section 6.3.

La fonctionnelle génératrice est donnée par

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int (\mathcal{L} + J\phi)\right). \quad (6.3)$$

On note que

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} e^{i \int J\phi} = \phi e^{i \int J\phi} \quad (6.4)$$

et plus généralement, pour une fonction f quelconque dont l'action sur des opérateurs différentiels est définie par sa série de Taylor,

$$f\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right) e^{i \int J\phi} = f(\phi) e^{i \int J\phi}. \quad (6.5)$$

En théorie ϕ^4 on définit $\mathcal{V}_{\text{int}}(\phi) = \frac{\lambda}{24}\phi^4$ le *potentiel d'interaction*. Alors

$$\exp\left(-i \int \mathcal{V}_{\text{int}}(\phi)\right) \exp\left(i \int J\phi\right) = \exp\left(-i \int \mathcal{V}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right)\right) \exp\left(i \int J\phi\right) \quad (6.6)$$

ou bien, en multipliant avec l'exponentielle de l'action libre et en intégrant sur ϕ ,

$$Z[J] = \exp\left(-i \int \mathcal{V}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right)\right) \underbrace{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + J\phi\right)\right)}_{Z_0[J]} \quad (6.7)$$

où $Z_0[J]$ est la fonctionnelle génératrice de la théorie libre sans interactions. En résumé :

$$\boxed{Z[J] = \exp\left(-i \int \mathcal{V}_{\text{int}}\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right)\right) Z_0[J]} \quad (6.8)$$

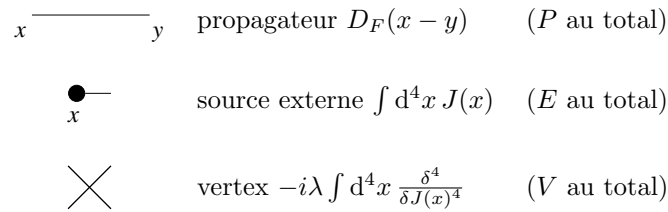
avec $Z_0[J]$ donné par éq. (5.37),

$$Z_0[J] = Z_0[0] \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)\right). \quad (6.9)$$

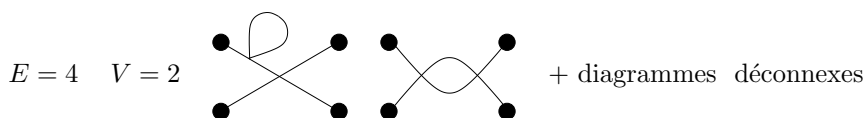
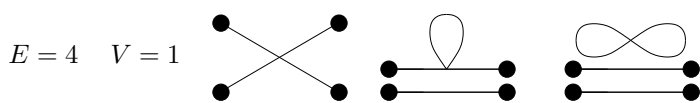
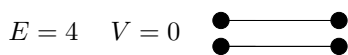
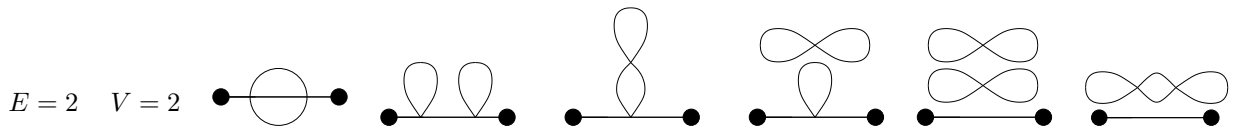
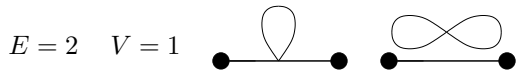
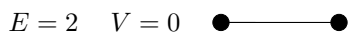
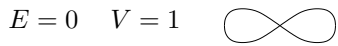
On insère l'expression de \mathcal{V}_{int} et on substitue les séries de Taylor des exponentielles :

$$Z[J] = Z_0[0] \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left(-\frac{i\lambda}{24} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}\right)^V \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{P!} \left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y)\right)^P \quad (6.10)$$

Après développement des sommes, un terme avec P et V fixe contient $E = 2P - 4V$ facteurs de J et peut donc contribuer à la fonction de corrélation à E points (car celle-ci est obtenue en prenant E dérivées fonctionnelles de Z par rapport à J , avant de poser $J = 0$). On organise les termes avec l'aide d'une notation diagrammatique, les *diagrammes de Feynman*. Pour chaque terme on trace



Exemples :



Nombre de termes dans éq. (6.10) qui correspondent à un diagramme donné :

- réarrangement des $4 \frac{\delta}{\delta J(x)}$ associés à un vertex \Rightarrow facteur $4! = 24$ qui supprime le facteur $\frac{1}{24}$ dans \mathcal{V}_{int}
- réarrangement des V vertex \Rightarrow facteur $V!$ qui supprime le facteur $\frac{1}{V!}$ de l'exponentielle
- réarrangement des sources aux extrémités des propagateurs \Rightarrow facteur $2!$ qui supprime le $\frac{1}{2}$ devant $\int J D J$
- réarrangement des P propagateurs \Rightarrow facteur $P!$ qui supprime le facteur $\frac{1}{P!}$ de l'autre exponentielle

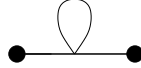
Conclusion :

$$Z[J] = Z_0[0] \cdot \sum (\text{diagrammes de Feynman}) \text{ modulo surcomptage}$$

“Surcomptage” car réarrangement des $\frac{\delta}{\delta J(x_i)}$ peut donner le même résultat qu'un réarrangement des $J(x_i)$: il faut diviser par un *facteur de symétrie* S du diagramme. Ce facteur doit être déterminé au cas par cas.

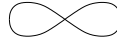
Exemples :

Le diagramme



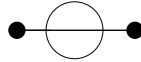
a $S = 4$: échanger les extrémités du propagateur interne donne le même diagramme. Pareil pour un échange simultané des extrémités des propagateurs externes (connectés aux sources) si au même temps on échange les deux sources.

Le diagramme



a $S = 8$: 2 (échanger les extrémités du propagateur à gauche) \times 2 (échanger les extrémités du propagateur à droite) \times 2 (échanger le propagateur à gauche avec celui à droite).

Le diagramme



a $S = 2 \cdot 3! = 12$ dont $3!$ pour une permutation des propagateurs internes, 2 pour échanger toutes les extrémités simultanément avec les sources.

Conclusion finale :

$$Z[J] = Z_0[0] \sum_{\text{diagrammes de Feynman}} (\text{diagramme } D) / (\text{facteur de symétrie } S(D)). \quad (6.11)$$

Chaque diagramme représente une expression algébrique qui dépend des J , des D_F et de λ .

Diagrammes connexes

D connexe \Leftrightarrow on peut relier tout point du diagramme à tout autre par un chemin. Diagramme D général = produit des sous-diagrammes connexes C_I , chacun avec son facteur de symétrie :

$$D = \frac{1}{S_D} \prod_I (C_I)^{n_I} \quad (6.12)$$

où $S_D =$ facteur de symétrie qui n'a pas encore été pris en compte par les C_I . On a

$$S_D = \prod_I n_I! \quad (6.13)$$

($n!$ venant des permutations des sous-diagrammes connexes de la même topologie). Donc

$$Z[J] \propto \sum_{\{n_I\}} D = \sum_{\{n_I\}} \prod_I \frac{1}{n_I!} (C_I)^{n_I} = \prod_I \sum_{n_I=0}^{\infty} \frac{(C_I)^{n_I}}{n_I!} = \prod_I \exp(C_I) = \exp\left(\sum_I C_I\right). \quad (6.14)$$

Ici on a laissé libre la normalisation de $Z[J]$ (on note que les fonctions de corrélation ne dépendent que de $Z[J]/Z[0]$). En conclusion, $Z[J] \propto$ (somme de tous les diagrammes) \propto (exponentielle de la somme des diagrammes connexes). On fixe la normalisation

$$Z[0] = 1 \quad (6.15)$$

en posant

$$Z[J] = e^{iW[J]} \quad (6.16)$$

où

$$iW[J] = \sum_{\substack{\text{diagrammes} \\ \text{connexes,} \\ E \neq 0}} C_I. \quad (6.17)$$

Avec cette normalisation, les *diagrammes de vide* où $E = 0$ sont exclus de la somme, alors $W[0] = 0$. $Z =$ fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation, $W =$ fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation connexes.

6.2 Les règles de Feynman pour la théorie ϕ^4

Pour le calcul des fonctions de corrélation à n points $\langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$, on note que l'action de la dérivée fonctionnelle

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_k)}$$

sur un diagramme de Feynman *supprime un facteur iJ et associe à l'extrémité du propagateur où J était attaché le point x_k* .

Fonction à un point

Notre dérivation de la formule de LSZ nécessite

$$\langle 0 | \phi(x_1) | 0 \rangle \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.18)$$

On a

$$\langle 0 | \phi(x_1) | 0 \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (6.19)$$

La seule contribution pourrait venir des diagrammes avec $E = 1$ mais ceux-ci n'existent pas dans $Z[J]$. Donc en fait

$$\langle 0 | \phi(x_1) | 0 \rangle = 0 \quad (6.20)$$

est garantie pour la théorie ϕ^4 (au moins pour le cas $m^2 > 0$ considéré ici).

Fonction à deux points

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] \Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} iW[J] \Big|_{J=0} + \underbrace{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} iW[J]}_{=0} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} iW[J] \Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} iW[J] \Big|_{J=0} \\
&= \sum (\text{diagrammes connexes avec } E=2, \text{ sources} \\
&\quad \text{enlevées et avec ses extrémités à } x_1 \text{ et } x_2) .
\end{aligned} \tag{6.21}$$

À l'ordre λ^0 ,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle &= \overline{x_1 \quad x_2} + \overline{x_2 \quad x_1} + \mathcal{O}(\lambda) \\
&= \frac{1}{2} D_F(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} D_F(x_2 - x_1) + \mathcal{O}(\lambda) \\
&= D_F(x_1 - x_2) + \mathcal{O}(\lambda) .
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Facteurs $\frac{1}{2}$ = facteurs de symétrie. Le résultat au premier ordre est donc le même que celui de la théorie libre (comme attendu).

Corrections jusqu'à $\mathcal{O}(\lambda^2)$:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle &= 2 \left(\overline{x_1 \quad x_2} + \overline{x_1 \quad y \quad x_2} + \overline{x_1 \quad y_1 \quad y_2 \quad x_2} \right. \\
&\quad \left. + \overline{x_1 \quad y_1 \quad y_2 \quad x_2} + \overline{x_1 \quad y_1 \quad y_2 \quad x_2} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right) \\
&= D_F(x_1 - x_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4 y D_F(x_1 - y) (-i\lambda) D_F(y - y) D_F(y - x_2) \\
&\quad + \frac{1}{4} \int d^4 y_1 d^4 y_2 D_F(x_1 - y_1) (-i\lambda) D_F(y_1 - y_1) D_F(y_1 - y_2) (-i\lambda) D_F(y_2 - y_2) D_F(y_2 - x_2) \\
&\quad + \frac{1}{4} \int d^4 y_1 d^4 y_2 D_F(x_1 - y_1) (-i\lambda) D_F(y_1 - y_2) (-i\lambda) D_F(y_2 - y_2) D_F(y_2 - y_1) D_F(y_1 - x_2) \\
&\quad + \frac{1}{6} \int d^4 y_1 d^4 y_2 D_F(x_1 - y_1) (-i\lambda) D_F(y_1 - y_2) D_F(y_1 - y_2) D_F(y_1 - y_2) (-i\lambda) D_F(y_2 - x_2) \\
&\quad + \mathcal{O}(\lambda^3)
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Explications : le facteur 2 devant la parenthèse de la première ligne vient de $x_1 \leftrightarrow x_2$, les facteurs devant les intégrales des facteurs de symétrie résiduels.

Fonction à n points

On peut traiter des diagrammes générales dans la même façon. Chaque vertex emporte un facteur $(-i\lambda) \int dy$, chaque propagateur un facteur D_F . En résumé, on obtient les *régles de Feynman dans l'espace des positions* pour traduire les diagrammes en expressions algébriques :

1. Pour chaque point externe, $\text{---}_x\text{---} = 1$
2. Pour chaque propagateur, $\text{---}_x\text{---}_y = D_F(x-y)$
3. Pour chaque vertex, $\text{---}_z = (-i\lambda) \int d^4z$
4. Diviser par le facteur de symétrie.

Normalement les calculs sont plus simples dans l'espace des impulsions. On rappelle l'expression de D_F et sa transformée de Fourier :

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (6.24)$$

Alors dans l'espace des impulsions chaque propagateur est associé à un p . Pour un vertex avec des impulsions entrantes $p_{1,2,3,4}$:

$$(-i\lambda) \int d^4z e^{-ip_1z} e^{-ip_2z} e^{-ip_3z} e^{-ip_4z} = (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (6.25)$$

alors l'impulsion est conservée à chaque vertex. On obtient ainsi les règles de Feynman dans l'espace des impulsions

1. Pour chaque point externe, $\text{---}_x^{\leftarrow P} = e^{-ipx}$
2. Pour chaque propagateur, $\text{---}_P\text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
3. Pour chaque vertex, $\begin{array}{c} p_1 \\ \swarrow \searrow \\ \text{---} \text{---} \\ \nwarrow \nearrow \\ p_3 \quad p_4 \end{array} = (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$
4. Intégrer toutes les impulsions.
5. Diviser par le facteur de symétrie.

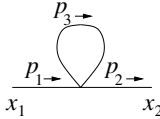
ou plus pratiquement

3. Pour chaque vertex, $\begin{array}{c} p_1 \\ \swarrow \searrow \\ \text{---} \text{---} \\ \nwarrow \nearrow \\ p_3 \quad p_4 \end{array} = -i\lambda$
- 4.a Imposer la conservation des impulsions à chaque vertex.
- 4.b Intégrer toutes les impulsions pas encore déterminées.
5. Diviser par le facteur de symétrie.

Dans la littérature, les "diagrammes de Feynman" que l'on rencontre le plus souvent ont déjà les sources supprimées, c.à.d. ils ne correspondent pas à un terme dans la fonctionnelle génératrice comme les diagrammes de section 6.1, mais à un terme dans la fonction de corrélation comme ceux de section 6.2.

Tentative d'exemple : La correction $\mathcal{O}(\lambda)$ à la fonction à deux points

On va essayer d'appliquer les règles de Feynman au calcul du diagramme



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} e^{ip_1 x} \frac{i}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2) \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_2 y} \\
&= -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-y)} \frac{1}{(p_1^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Pour évaluer l'intégrale de p_3 on effectue une rotation de Wick et on transforme aux coordonnées sphériques :

$$\int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{8\pi} \int_0^\infty \frac{|p|^3}{|p|^2 + m^2} d|p| \tag{6.27}$$

N'existe pas comme intégrale impropre (la primitive diverge comme $\sim |p|^2$ lorsque $|p| \rightarrow \infty$, *divergence quadratique*). Une complication de plus ; il faudra *renormaliser* la théorie.

Résumé provisoire : Calcul des observables en théorie de perturbations

Pour calculer la section efficace pour un processus $n \rightarrow m$:

1. Calculer et additionner tous les diagrammes de Feynman avec $n + m$ pattes externes jusqu'à un ordre fixe en λ pour obtenir la fonction à $n + m$ points $\langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_{n+m}) | 0 \rangle$. (Si quelques-uns des diagrammes divergent \rightarrow renormalisation, section 6.3.)
2. Choisir les paramètres libres du lagrangien de la sorte que les prérequis pour notre dérivation de la formule de LSZ sont remplis. (Lié avec la renormalisation, voir section 6.3 également.)
3. Obtenir l'amplitude de transition $\langle f | i \rangle$ selon la formule de LSZ (plus de détails : chapitre 7).
4. Enfin obtenir la section efficace en prenant compte des facteurs cinématiques (chapitre 7).

6.3 Un premier regard à la renormalisation

La fonction à deux points admet la *représentation spectrale* (voir p.ex. le livre de Weinberg) :

$$\int d^4 x \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle e^{ipx} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} + (\text{termes réguliers à } p^2 = m^2) \tag{6.28}$$

(formule *exacte*, non-perturbative)

m = énergie du premier état excité = masse de la particule = position du pôle

$Z = |\langle 1_0 | \phi(0) | 0 \rangle|^2$ = constante de renormalisation de la fonction d'onde = (résidu au pôle)/ i (avec $\langle 1_0 |$ = état à 1 particule au repos).

Rappel : On avait dérivé la formule de LSZ Eq. (4.18) pour des états incidents et émergents avec $p^2 = m^2$ ("sur couche de masse") et $Z = 1$, tel que $\langle k | \phi(x) | 0 \rangle = e^{ikx}$.

Par exemple, pour la théorie libre,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 \tag{6.29}$$

on a

$$\int d^4 x \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle e^{ipx} = \frac{i}{p^2 - m_0^2} \tag{6.30}$$

et alors $Z = 1$ et de plus $m = m_0$ (le paramètre du lagrangien est égal à la masse physique).

Contrairement, pour la théorie ϕ^4 ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{24} \phi^4 \tag{6.31}$$

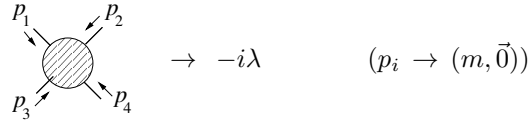
on trouve $Z \neq 1$ et $m \neq m_0$. Après les redéfinitions

$$\phi \rightarrow \frac{\phi}{\sqrt{Z}} \equiv \phi_r, \quad m_0^2 \equiv \frac{1}{Z}(m^2 + \delta_{m^2}), \quad \lambda_0 \equiv \frac{1}{Z^2}(\lambda + \delta_\lambda) \quad (6.32)$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi_r \partial^\mu \phi_r - \frac{1}{2} Z m_0^2 \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{24} Z^2 \phi_r^4 \\ &= \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi_r \partial^\mu \phi_r - \frac{1}{2} m^2 \phi_r^2 - \frac{\lambda}{24} \phi_r^4 - \frac{1}{2} \delta_{m^2} \phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{24} \phi_r^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_r \partial^\mu \phi_r - \frac{1}{2} m^2 \phi_r^2 - \frac{\lambda}{24} \phi_r^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta_Z \partial_\mu \phi_r \partial^\mu \phi_r - \frac{1}{2} \delta_{m^2} \phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{24} \phi_r^4 \end{aligned} \quad (6.33)$$

où $\delta_Z \equiv Z - 1$. Ici les *contre-terms* δ_Z , δ_{m^2} , δ_λ doivent être choisis tel que le pôle du propagateur est à $p^2 = m^2$ avec résidu i et tel que le couplage λ est le “couplage physique”.¹ Le couplage physique peut être défini par l’amplitude de transition à quatre points dans la limite cinématique où toutes les particules incidentes/émergentes sont au repos :



$\rightarrow -i\lambda \quad (p_i \rightarrow (m, \vec{0}))$

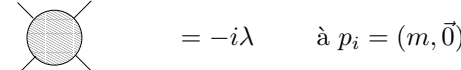
Du lagrangien Eq. (6.33) on obtient ainsi des nouvelles règles de Feynman avec deux nouveaux vertex à 2 et à 4 points pour les contre-terms. Dans l’espace des impulsions :


1. Propagateur : $\frac{p}{\text{---}} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
2. Vertex : $\times = -i\lambda$
3. Contre-terme à deux points : $\frac{p}{\text{---} \otimes \text{---}} = i(p^2 \delta_Z - \delta_{m^2})$
4. Contre-terme de vertex : $\otimes = -i\delta_\lambda$

Règles de Feynman en théorie des perturbations renormalisée. Détails \rightarrow exercices.

La procédure pour le calcul des amplitudes de transition est alors :


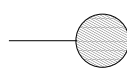
1. Calculer les corrections au propagateur et au vertex à un certain ordre en λ , en utilisant les règles de Feynman modifiées. Le résultat sont deux fonctions de λ , m^2 , δ_{m^2} , δ_λ , δ_Z et des impulsions externes.
2. Fixer les valeurs de δ_{m^2} , δ_λ , δ_Z avec les *conditions de renormalisation* :



$$= -i\lambda \quad \text{à } p_i = (m, \vec{0})$$


$$= \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{termes réguliers} \quad (\text{deux conditions : pôle et résidu})$$

3. Une fois les contre-terms connus, on peut calculer une fonction à n points avec n quelconque pour une configuration cinématique quelconque. Avec la formule de LSZ on en obtient l’expression de l’amplitude.

Problème : Le résultat que l’on trouve aux ordres supérieures pour  et  est donné par des intégrales impropres *divergentes* à grandes impulsions.

1. Cette définition de contre-terms, où *schéma de soustraction*, est le plus utile pour le calcul des amplitudes de diffusion avec la formule de LSZ. Cependant parfois d’autres schèmes de soustraction sont plus convenients même si la relation avec les amplitudes physiques est plus compliquée.

Solution :

1. *Régularisation.* Trouver une façon “intelligente” d’écrire ces intégrales comme

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{une fonction qui diverge lorsque } \epsilon \rightarrow 0).$$

Il n’y a pas de prescription universelle ni de définition précise de ce qui constitue une régularisation “intelligente”. Au moins le régulateur devrait conserver toutes les symétries de la théorie. Idéalement il affectera seulement la physique dans l’ultraviolet car l’objectif de la procédure est de cacher notre ignorance de la physique microscopique à courtes distances.

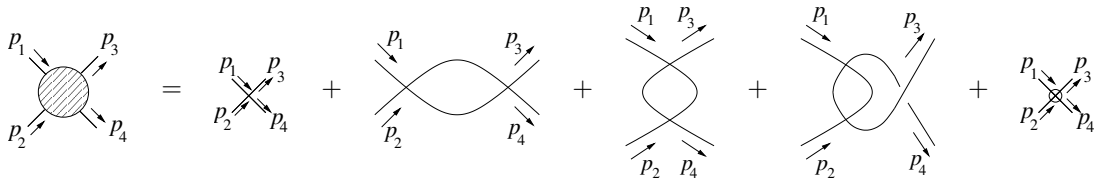
2. *Renormalisation.* Absorber les divergences dans les expressions des contre-termes.
3. Ensuite, toutes les observables physiques ne devraient plus dépendre de ϵ et, en particulier, rester finies lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Si cette procédure peut être effectuée, on dit que la théorie est *renormalisable*.

Pour un développement cohérent : on compte le nombre de *boucles* plutôt que les puissances de λ (car ces dernières dépendent du nombre de particules externes n , p.ex. la fonction à deux/quatre/six points au premier ordre est $\mathcal{O}(\lambda^0)/\mathcal{O}(\lambda)/\mathcal{O}(\lambda^2)$). Correction de $(k+1)$ -ème ordre en théorie des perturbations = diagrammes connexes à k boucles. Premier ordre = diagrammes sans boucles = “diagrammes d’arbre”.

Exemple : Renormalisation de la théorie ϕ^4 à une boucle

On commence avec la renormalisation du **vertex**. Au niveau des diagrammes *amputés* (c.à.d. sans compter les propagateurs externes que l’on trace seulement pour indiquer comment les impulsions $p_1 \dots p_4$ rentrent dans les vertex) :



On calcule d’abord où $p \equiv p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Selon les règles de Feynman il faut intégrer l’impulsion k :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (6.34)$$

Astuce de Feynman pour combiner les dénominateurs (voir exercices) :

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xkp + x p^2 - m^2)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)p^2 - m^2)^2} \quad (6.35)$$

avec $\ell \equiv k + xp$ (et donc $d^4k = d^4\ell$). Puisque l’intégrande ne dépend que de ℓ^2 , nous pouvons transformer l’intégrale en coordonnées sphériques après une rotation de Wick $t \rightarrow -it$:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)p^2 - m^2)^2} \\ &= \frac{i\lambda^2}{2} \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta^2(x))^2} \quad (\text{avec } \Delta^2(x) \equiv m^2 - x(1-x)p^2) \\ &\stackrel{?}{=} \frac{i\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^3}{(\ell_E^2 + \Delta^2(x))^2} \quad (\text{facteur } 2\pi^2 \text{ de l'intégration angulaire}). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Pour $\ell_E^2 \gg \Delta^2$ l'intégrande se comporte comme $1/\ell_E$, donc la primitive diverge lorsque $\ell_E \rightarrow \infty$: *divergence logarithmique*. Pour traiter cette divergence il faut *régulariser* et *renormaliser*.

1. *Régularisation*. On utilise la *régularisation dimensionnelle* : calculer le diagramme comme fonction analytique du nombre d de dimensions d'espace-temps (possible avec l'aide de la fonction Γ , voir annexe, même si d n'est pas entier). Seulement après renormalisation on va poser $d = 4$.

L'expression

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2}$$

peut être évalué pour $d \notin \mathbb{N}$ par *prolongement analytique* :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2} &= \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{2} \int_0^\infty d(\ell_E^2) \frac{(\ell_E^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dy y^{1-\frac{d}{2}} (1-y)^{\frac{d}{2}-1} \quad \text{avec } y \equiv \frac{\Delta^2}{\ell_E^2 + \Delta^2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Avec les deux représentations de la fonction Bêta éqns. (A.13) et (A.14) on trouve enfin

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}. \quad (6.38)$$

Puisque $\Gamma(z)$ a des pôles simples à $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ alors $\Gamma(2 - \frac{d}{2})$ a des pôles à $d = 4, 6, 8, \dots$ mais l'expression Eq. (6.38) est bien définie pour tout autre d . On s'intéresse au résultat en $d = 4$, donc on pose $d = 4 - 2\epsilon$. Eq. (6.36) s'écrit alors

$$\text{Diagramme} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(\epsilon) \left(\frac{1}{\Delta^2(x)}\right)^\epsilon \quad (6.39)$$

où

$$(4\pi)^\epsilon = e^{\epsilon \log 4\pi} = 1 + \epsilon \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.40)$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.41)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^\epsilon = 1 - \epsilon \log \Delta^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.42)$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Diagramme} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx (1 + \epsilon \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon)\right) (1 - \epsilon \log \Delta^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \log \Delta^2(x)\right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \int_0^1 dx \log(m^2 - x(1-x)p^2)\right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

On rappelle qu'on avait posé $p = p_1 + p_2$. Evidemment le résultat sera le même pour les autres deux diagrammes à une boucle si on remplace $p \rightarrow p_1 - p_3$ ou $p \rightarrow p_1 - p_4$ respectivement :

$$\text{Diagramme} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \int_0^1 dx \log(m^2 - x(1-x)(p_1 + p_2)^2)\right), \quad (6.44)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \int_0^1 dx \log(m^2 - x(1-x)(p_1 - p_3)^2) \right), \quad (6.45)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \int_0^1 dx \log(m^2 - x(1-x)(p_1 - p_4)^2) \right). \quad (6.46)$$

2. *Rénormalisation.* La condition de renormalisation est que, pour $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = (m, \vec{0})$,

$$= -i\lambda \quad (6.47)$$

et alors

$$-i\lambda + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \int_0^1 dx \log(m^2 - x(1-x)4m^2) \right) + 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E - \log m^2 \right) + (-i\delta_\lambda) = -i\lambda. \quad (6.48)$$

Le contre-terme δ_λ est alors donné par l'expression divergente

$$\delta_\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{3}{\epsilon} - 3\gamma_E + 3\log(4\pi) - 2\log m^2 - \int_0^1 dx \log(m^2 - 4x(1-x)m^2) \right). \quad (6.49)$$

3. *Vertex renormalisé au niveau d'une boucle.* On combine ces résultats pour trouver

$$= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\log \frac{m^2 - x(1-x)(p_1 + p_2)^2}{m^2 - 4x(1-x)m^2} + \log \frac{m^2 - x(1-x)(p_1 - p_3)^2}{m^2} + \log \frac{m^2 - x(1-x)(p_1 - p_4)^2}{m^2} \right). \quad (6.50)$$

On pourrait évaluer l'intégrale sur x mais le résultat ne deviendra pas plus instructif ni plus simple. À noter que le résultat final ne dépend plus de ϵ et est évidemment fini; toutes divergences ont été absorbées dans le contre-terme (pas observable). Avec ce résultat on peut en fait calculer les amplitudes de transition pour la diffusion $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ au second ordre en λ pour toute configuration cinématique p_1, p_2, p_3, p_4 et obtenir un résultat fini.

On termine par la régularisation et renormalisation du **propagateur**. Au niveau d'une boucle,

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram: } p \rightarrow \text{circle with diagonal lines} = p \rightarrow + p \rightarrow \text{circle with diagonal lines and a loop on top} + p \rightarrow \text{circle with diagonal lines and a cross} \\
& = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left(1 + \frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + i(\delta_Z p^2 - \delta_{m^2}) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \quad (6.51)
\end{aligned}$$

Les conditions de renormalisation sont que le pôle de cette expression soit à $p^2 = m^2$ avec résidu $iZ = i$:

$$p \rightarrow \text{circle with diagonal lines} = \frac{i}{p^2 - m^2} + (\text{régulier}) \quad (6.52)$$

et donc

$$\delta_Z p^2 - \delta_{m^2} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} + (p^2 - m^2)^2 f(p^2, m^2) \quad (6.53)$$

avec une fonction régulière $f(p^2, m^2)$. En comparant les puissances de p , on voit que $f(p^2, m^2) = 0$, que

$$\delta_Z = 0 \quad (6.54)$$

et que

$$\delta_{m^2} = -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (6.55)$$

Le fait que la renormalisation de la fonction d'onde δ_Z s'annule au niveau d'une boucle est spécifique à la théorie ϕ^4 . Dans une théorie quantique des champs générale à une boucle, ainsi que dans la théorie ϕ^4 à partir de deux boucles, $\delta_Z \neq 0$. On va pourtant calculer δ_{m^2} explicitement :

1. *Régularisation.* L'intégrale Eq. (6.55) diverge quadratiquement dans $d = 4$ dimensions. Pour $d \neq 4$, une rotation de Wick donne

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = -i \int \frac{d^d q_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{q_E^2 + m^2} \quad (6.56)$$

et donc avec $d = 4 - 2\epsilon$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} &= -i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(-1 + \epsilon) (m^2)^{1-\epsilon} \\
&= \frac{i}{16\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 + \epsilon \log(4\pi)) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 \right) m^2 (1 - \epsilon \log m^2) \\
&= \frac{i m^2}{16\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) + 1 - \log m^2 \right). \quad (6.57)
\end{aligned}$$

2. *Renormalisation.* En suivant le raisonnement ci-dessus, on déduit

$$\delta_{m^2} = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) + 1 - \log m^2 \right). \quad (6.58)$$

3. *Propagateur renormalisé.* En résumé, la renormalisation du propagateur à une boucle dans la théorie ϕ^4 n'est pas très intéressante, parce que le seul diagramme à une boucle dépend de p de façon triviale : le contre-terme δ_{m^2} le supprime précisément, tant que $\delta_Z = 0$. Alors en fait

$$p \rightarrow \text{circle with diagonal lines} = p \rightarrow + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (6.59)$$

Remarques :

- On peut montrer : Avec les contre-termes δ_λ , δ_Z , δ_{m^2} ainsi déterminés, les fonctions à n points au niveau d'une boucle pour un n quelconque et avec des impulsions/positions externes quelconques peuvent être calculées sans tomber sur des divergences.
- Il suffit alors de mesurer deux quantités (la masse de la particule et la fonction à quatre points pour des particules au repos) pour calculer *toutes* observables. En général, une théorie est *renormalisable* s'il faut fixer un nombre *fini* de contre-termes par des conditions de renormalisation pour être prédictive.
- On peut montrer : Une théorie est renormalisable \Rightarrow tous les coefficients des termes dans le lagrangien sont de dimension ≥ 0 (condition *nécessaire* en général, *nécessaire et suffisante* pour des théories des champs scalaires, potentiellement après une redéfinition des champs).
- Ainsi le terme cinétique $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, le terme de masse $m^2\phi^2$ et le terme d'interaction $\lambda\phi^4$ peuvent figurer dans une théorie renormalisable ($[m^2] = 2$ et $[\lambda] = 0$); pareil pour des termes linéaires $f\phi$ ou cubiques $g\phi^3$ ($[f] = 3$ et $[g] = 1$). En revanche, si on inclut des termes comme $\frac{1}{\Lambda_1}\phi\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ ou $\frac{1}{\Lambda_2}\phi^5$, alors la théorie devient non-renormalisable.
- Divergences pour $|p| \rightarrow \infty$ ("divergences dans l'ultraviolet") à cause de l'extrapolation aux échelles de distance infiniment petites. La renormalisation sert à cacher les détails de la physique UV.
- Une autre classe de divergences, les *divergences dans l'infrarouge*, peut apparaître dans les théories avec des particules sans masse. Ses origines et leur traitement sont un peu différents.

Chapitre 7

Sections efficaces et taux de desintégration

7.1 Des fonctions de corrélation aux éléments de matrice

On rappelle la formule de LSZ du chapitre 4.2 pour la diffusion $2 \rightarrow 2$ dans la théorie ϕ^4 , afin de définir l'élément de matrice de transition \mathcal{M}_{fi} :

$$\begin{aligned} \langle f|i \rangle &= i^4 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2 e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ip'_1x'_1 + ip'_2x'_2} \\ &\quad (\square_1 + m^2)(\square_2 + m^2)(\square'_1 + m^2)(\square'_2 + m^2) \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x'_1)\phi(x'_2)|0 \rangle \\ &\equiv i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \mathcal{M}_{\text{fi}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

La fonction delta apparaît parce que l'impulsion totale est conservée. \mathcal{M}_{fi} est, en générale, une fonction des impulsions, de la masse et du couplage. Elle contient toutes les informations sur la dynamique du processus de diffusion. On peut l'obtenir directement des diagrammes de Feynman.

Au niveau de l'arbre : Un seul diagramme (les diagrammes non connexes ne contribuent pas, ils correspondent au cas où les particules se manquent)

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x'_1)\phi(x'_2)|0 \rangle &= \begin{array}{c} x_1 \quad x'_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_2 \quad x'_2 \end{array} \\ &= (-i\lambda) \int d^4y D_F(x_1 - y) D_F(x_2 - y) D_F(x'_1 - y) D_F(x'_2 - y). \end{aligned} \quad (7.2)$$

On utilise que $(\square + m^2)D_F(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y)$:

$$\begin{aligned} \langle f|i \rangle &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2 e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ip'_1x'_1 + ip'_2x'_2} \\ &\quad (-i\lambda) \int d^4y (-i)\delta^{(4)}(x_1 - y) (-i)\delta^{(4)}(x_2 - y) (-i)\delta^{(4)}(x'_1 - y) (-i)\delta^{(4)}(x'_2 - y) \\ &= -i\lambda \int d^4y e^{-i(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)y} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \end{aligned} \quad (7.3)$$

et alors on trouve

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -\lambda. \quad (7.4)$$

Aux ordres supérieurs : Schématiquement, la fonction à quatre points connexe peut se représenter comme

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x'_1) \phi(x'_2) | 0 \rangle = \text{Diagramme à 4 points} \quad (7.5)$$

où $\text{---} \circledast 2 \text{---}$ représente la fonction à deux points, y compris toutes les corrections à boucles, et similairement $\text{---} \circledast 4 \text{---}$ représente le vertex et toutes ses corrections quantiques :

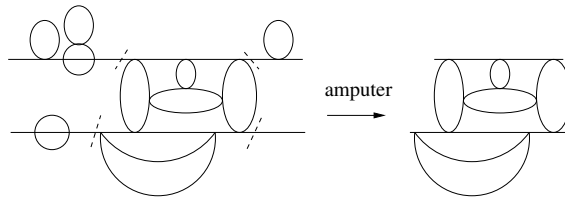
$$\begin{aligned} \text{---} \circledast 2 \text{---} &= \text{---} + \text{---} \text{ (boucle) } + \text{---} \otimes \text{---} + \text{---} \text{ (deux boucles) } + \text{---} \text{ (cercle) } + \text{---} \text{ (boucle avec croix) } + \dots \\ \text{---} \circledast 4 \text{---} &= \times + \text{---} \text{ (boucle) } + \text{---} \text{ (cercle) } + \text{---} \text{ (cercle avec croix) } + \dots \end{aligned}$$

Or on sait que $\text{---} \circledast 2 \text{---}$ a un pôle à $p^2 = m^2$ avec résidu i . Alors, en appliquant la formule LSZ, les facteurs $-i(p^2 - m^2)$ vont supprimer les pôles correspondantes aux pattes externes $i/(p^2 - m^2)$ (dans l'espace de positions, les opérateurs de Klein-Gordon $\square + m^2$ vont tomber sur les propagateurs externes renormalisés et produire des fonctions delta, comme on a vu au niveau de l'arbre).

On peut alors directement calculer \mathcal{M}_{fi} à partir des diagrammes *amputés* correspondants à $\text{---} \circledast 4 \text{---}$ (diagrammes connexes sans pattes externes, avec impulsions entrantes $p_1, p_2, -p'_1, -p'_2$) :

$$\boxed{\begin{aligned} &i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \mathcal{M}_{\text{fi}} \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2 e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ip'_1x'_1 + ip'_2x'_2} \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x'_1) \phi(x'_2) | 0 \rangle_{\text{amputé}} \end{aligned}} \quad (7.6)$$

Ici "patte externe" signifie un propagateur *renormalisé* connecté à un point externe du diagramme, c.-à.-d. $\text{---} \circledast 2 \text{---}$ incluant toutes les corrections à boucles à la fonction à deux points. Ainsi, un diagramme générique est amputé comme, par exemple,



Exemple à une boucle : Avec les *variables de Mandelstam*

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad (7.7)$$

$$t = (p_1 - p'_1)^2 \quad (7.8)$$

$$u = (p_1 - p'_2)^2 \quad (7.9)$$

on trouve, selon Eq. (6.50),

$$\mathcal{M}_{\text{fi}} = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\log \left(1 - \frac{s}{m^2} x(1-x) \right) + (s \leftrightarrow t) + (s \leftrightarrow u) + 2 \right). \quad (7.10)$$

La généralisation d'éq. (7.6) aux processus $2 \rightarrow n$ est évidente :

- plus de variables d'impulsion dans la fonction delta et dans l'exponentielle
- au lieu de la fonction à 4 points on prend la fonction à $2 + n$ points
- toutes les $2 + n$ pattes externes doivent être amputées.

7.2 La diffusion : les processus $2 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow n$

Les expérimentateurs ne mesurent pas directement les éléments de matrice de transition \mathcal{M}_{fi} mais des *sections efficaces* de diffusion. On introduit le volume V et le temps T du processus (dont le résultat final ne dépendra pas, alors ultérieurement on pourra les faire tendre $\rightarrow \infty$) et on définit

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{T\Phi} dP} \quad (7.11)$$

où Φ est le flux incident sur la cible et dP est la probabilité différentielle pour la diffusion dans une sous-région de l'espace des impulsions finales. Pour un processus $2 \rightarrow n$ avec impulsions initiales et finales

$$|i\rangle = |p_1\rangle|p_2\rangle, \quad \langle f| = \langle p'_1| \cdots \langle p'_n| \quad (7.12)$$

on a

$$dP = \frac{|\langle f|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} d\Pi \quad d\Pi = \prod_{k=1}^n \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p'_k. \quad (7.13)$$

La fraction $|\langle f|i\rangle|^2 / (\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle)$ contient des facteurs $\delta^{(3)}(\vec{0})$ et $\delta^{(4)}(0)$ qui sont régularisés par le volume V et temps T finis :

$$\delta^{(3)}(\vec{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 x e^{i\vec{x}\cdot\vec{0}} = \frac{V}{(2\pi)^3}, \quad \delta^{(4)}(0) = \frac{TV}{(2\pi)^4}. \quad (7.14)$$

En détail, on a

$$\begin{aligned} |\langle f|i\rangle|^2 &= \left((2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - \sum_k p'_k\right) \right)^2 |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - \sum_k p'_k\right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - \sum_k p'_k\right) (VT) |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \end{aligned} \quad (7.15)$$

ainsi que

$$\langle i|i\rangle = \langle p_1|p_1\rangle\langle p_2|p_2\rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}_1} \delta^{(3)}(\vec{0}) (2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}_2} \delta^{(3)}(\vec{0}) = 4 E_1 E_2 V^2, \quad (7.16)$$

$$\langle f|f\rangle = \prod_k (2 E'_k V). \quad (7.17)$$

Ensemble les éqs. (7.13), (7.15), (7.16) et (7.17) donnent

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - \sum_k p'_k\right) (2\pi)^4 TV}{4 E_1 E_2 V^2 \prod_k (2 E'_k V)} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \prod_k \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p'_k \\ &= \frac{T}{V} \frac{1}{4 E_1 E_2} \prod_k \widetilde{d^3 p'_k} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - \sum_k p'_k\right) |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

De plus on peut exprimer le flux Φ dans le référentiel du repos de la particule 1 par la 3-vitesse \vec{v}_2 de la particule 2,

$$\Phi = \frac{|\vec{v}_2|}{V} \quad (7.19)$$

ou plus généralement, pour un référentiel quelconque obtenu par un boost de Lorentz en direction $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$,

$$\Phi = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{V}. \quad (7.20)$$

On insère  qs. (7.18) et (7.20) dans éq. (7.11) pour enfin obtenir l'expression de la *section efficace différentielle pour la diffusion 2 → n* :

$$\boxed{d\sigma = \frac{1}{4 E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \prod_{k=1}^n \widetilde{dp}'_k (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_{k=1}^n p'_k \right) |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2}. \quad (7.21)$$

A noter que tous les facteurs de T et V se suppriment dans le résultat final. La *section efficace totale* est

$$\sigma = \int d\sigma. \quad (7.22)$$

Si l'état final contient n' particules indiscernables, il faut multiplier par un facteur $\frac{1}{n!'}$ pour ne pas surcompter des configurations équivalentes.

Cas spécial : diffusion 2 → 2. On choisit le référentiel du centre de masse où $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ ($= \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$). Dans ce référentiel,

$$\begin{aligned} \widetilde{dp}'_1 \widetilde{dp}'_2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) &= \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \\ &= \frac{d^3 p'_1}{16\pi^2 E'_1 E'_2} \delta(E'_1 + E'_2 - \sqrt{s}) = \frac{|\vec{p}'_1|^2 d|\vec{p}'_1| d\Omega}{16\pi^2 E'_1 E'_2} \delta(E'_1 + E'_2 - \sqrt{s}) \end{aligned} \quad (7.23)$$

où comme avant $s = (p_1 + p_2)^2$, et E'_1 et E'_2 sont donn es en fonction de $|\vec{p}'_1|$ comme

$$E'_1 = \sqrt{m_1'^2 + |\vec{p}'_1|^2}, \quad E'_2 = \sqrt{m_2'^2 + |\vec{p}'_1|^2}. \quad (7.24)$$

Pour transformer la fonction δ , on rappelle l'identité

$$\int dx \delta(f(x)) = \sum_{x_i : f(x_i)=0} \frac{1}{|f'(x_i)|}. \quad (7.25)$$

Ici l'argument de la fonction δ est

$$E'_1 + E'_2 - \sqrt{s},$$

ce qui s'annule à

$$|\vec{p}'_1| = \sqrt{\frac{(s - (m_1' + m_2')^2)(s - (m_1' - m_2')^2)}{4s}} \equiv p'_{\text{CM}} \quad (7.26)$$

et dont la d eriv e est

$$\frac{\partial}{\partial(|\vec{p}'_1|)} (E'_1 + E'_2 - \sqrt{s}) = \frac{|\vec{p}'_1|}{E'_1} + \frac{|\vec{p}'_1|}{E'_2} = \frac{|\vec{p}'_1| (E'_1 + E'_2)}{E'_1 E'_2} \Big|_{|\vec{p}'_1| \equiv p'_{\text{CM}}} = \frac{p'_{\text{CM}} \sqrt{s}}{E'_1 E'_2} \quad (7.27)$$

Si on insère dans éq. (7.23), on obtient

$$\widetilde{dp}'_1 \widetilde{dp}'_2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) = \frac{p'_{\text{CM}}}{16\pi^2 \sqrt{s}} \delta(|\vec{p}'_1| - p'_{\text{CM}}) |\vec{p}'_1| d\Omega \quad (7.28)$$

et alors

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{p'_{\text{CM}}}{\sqrt{s}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2. \quad (7.29)$$

Cette formule est valide généralement dans le référentiel du centre de masse, même pour des esp es de particules différentes. Si de plus les quatre masses sont identiques, on a

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = \left| \frac{\vec{p}_2}{E_2} - \frac{\vec{p}_1}{E_1} \right| = \frac{2|\vec{p}_1|}{E_1} = \frac{2p'_{\text{CM}}}{E_1} \quad (7.30)$$

et $E_1 = E_2 = \sqrt{s}/2$, d'où

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2}{64\pi^2 s}. \quad (7.31)$$

Par exemple, pour la diffusion $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ dans la théorie ϕ^4 au niveau de l'arbre, on a $|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \lambda^2$ et deux particules indiscernables dans l'état final, ce qui donne pour la section efficace totale

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{32\pi s}. \quad (7.32)$$

7.3 La désintégration : les processus $1 \rightarrow n$

Strictement le formalisme de LSZ ne s'appliquerait pas à ce cas car une particule instable ne peut pas exister à $T \rightarrow \pm\infty$. On peut ignorer cette complication et néanmoins arriver au résultat physique correct en généralisant Eq. (7.21) : Dans le référentiel où la particule est au repos, $\vec{p}_1 = 0$ et $E_1 = m_1$, alors la largeur différentielle est

$$\boxed{d\Gamma = \frac{1}{2m_1} \prod_{k=1}^n \widetilde{dp}'_k (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_1 - \sum_k p'_k\right) |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2}. \quad (7.33)$$

La largeur totale

$$\Gamma = \int d\Gamma \quad (7.34)$$

doit encore être multipliée par $1/n!$ pour tout ensemble de n' particules indiscernables dans l'état final.

Chapitre 8

Fermions

8.1 Le groupe et l'algèbre de Lorentz

Les transformations de Lorentz $x^\mu \rightarrow x'^{\mu'} = \Lambda_{\nu'}^{\mu'} x^\nu$ préservent le produit scalaire lorentzien $x^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, c.à.d. $\Lambda g \Lambda^T = g$. Toutes les transformations Λ forment le *groupe de Lorentz* $O(3, 1)$, un exemple d'un *groupe de Lie* (un groupe avec la structure d'une variété différentielle).

La composante connexe qui contient l'identité forme un sous-groupe, le groupe des *transformations de Lorentz propres orthochrones* $SO^\uparrow(3, 1)$.

Exemples de transformations propres orthochrones :

Rotation par un angle α dans le plan (x^1, x^2) :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \alpha & \sin \alpha & \\ & -\sin \alpha & \cos \alpha & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Boost avec rapidité η selon x^1 :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & & \\ \sinh \eta & \cosh \eta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

avec $\cosh \eta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\sinh \eta = \sqrt{\cosh^2 \eta - 1} = \beta\gamma$.

Les éléments de $SO^\uparrow(3, 1)$ peuvent se construire par l'application exponentielle,

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\kappa\lambda}M^{\kappa\lambda}\right) = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\kappa\lambda}M^{\kappa\lambda} + \mathcal{O}(\|\omega\|^2) \quad (8.3)$$

Ici $\omega_{\kappa\lambda}$ = matrice 4×4 réelle antisymétrique contenant les angles/rapidités. De plus, $M^{\kappa\lambda} = -M^{\lambda\kappa}$ = *générateurs* = ensemble de 6 matrices 4×4 avec les éléments

$$(M^{\kappa\lambda})_{\mu\nu} = i(\delta_\mu^\kappa \delta_\nu^\lambda - \delta_\nu^\kappa \delta_\mu^\lambda). \quad (8.4)$$

(il y en a 6 car avec deux indices antisymétriques $\kappa\lambda$ on a 6 objets indépendants). Les matrices $M^{\kappa\lambda}$ vérifient l'*algèbre de Lorentz*

$$\boxed{[M^{\kappa\lambda}, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\lambda\rho}M^{\kappa\sigma} - g^{\kappa\rho}M^{\lambda\sigma} - g^{\lambda\sigma}M^{\kappa\rho} + g^{\kappa\sigma}M^{\lambda\rho})}. \quad (8.5)$$

Algèbre de Lie = espace tangent à l'identité du groupe de Lie = "transformations infinitésimales". L'algèbre de Lie des $\omega_{\kappa\lambda}M^{\kappa\lambda}$, $\mathfrak{so}(3, 1)$, génère le groupe de Lie des $e^{-\frac{i}{2}\omega M}$, $SO^\uparrow(3, 1)$.

Une *représentation* n -dimensionnelle de $\mathfrak{so}(3,1)$ est un ensemble de 6 matrices $n \times n$ $\{\widetilde{M}^{01}, \widetilde{M}^{02}, \widetilde{M}^{03}, \widetilde{M}^{12}, \widetilde{M}^{13}, \widetilde{M}^{23}\}$ telles que

$$(\widetilde{M}^{\kappa\lambda}) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{M}^{01} & \widetilde{M}^{02} & \widetilde{M}^{03} \\ -\widetilde{M}^{01} & 0 & \widetilde{M}^{12} & \widetilde{M}^{13} \\ -\widetilde{M}^{02} & -\widetilde{M}^{12} & 0 & \widetilde{M}^{23} \\ -\widetilde{M}^{03} & -\widetilde{M}^{13} & -\widetilde{M}^{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

vérifie l'algèbre éq. (8.5).

Exemples :

- $\widetilde{M}^{\kappa\lambda} = M^{\kappa\lambda}$ comme dans éq. (8.4), dite la *représentation vectorielle* (parce qu'elle génère les transformations de Lorentz des vecteurs Λ_ν^μ).
- $\widetilde{M}^{\kappa\lambda} = 0$, la *représentation triviale* (non fidèle), génère seulement l'identité $e^0 = \mathbb{1}$.
- La *représentation de Dirac* : Soient $\gamma^\mu = (\gamma^{\mu\alpha})_\beta$ un ensemble de 4 matrices 4×4 telles que

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)_\beta^\alpha = 2 g^{\mu\nu} \delta_\beta^\alpha \quad (\text{algèbre de Clifford}) \quad (8.7)$$

alors les matrices

$$\widetilde{M}^{\kappa\lambda} = \frac{i}{4} [\gamma^\kappa, \gamma^\lambda] \equiv \gamma^{\kappa\lambda} \quad (8.8)$$

forment une représentation 4-dimensionnelle de l'algèbre de Lorentz (preuve : exercices). Cette représentation *n'est pas isomorphe à la représentation vectorielle*. Il se trouve que toutes les représentations des γ sont équivalents (liées par des transformations unitaires). Ici on va utiliser la *représentation de Weyl* de l'algèbre de Clifford,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

avec les $\sigma^i =$ les matrices 2×2 de Pauli, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour construire une TQC invariante par des transformations de Lorentz, les champs doivent *se transformer de façon covariante* = prendre ses valeurs dans un espace vectoriel n -dimensionnel qui porte une représentation n -dimensionnelle de $\mathfrak{so}(3,1)$.

Anciens exemples :

- champ scalaire, une composante, représentation triviale : $\phi \rightarrow \Lambda \phi$ avec $\Lambda = 1$.
- champ vectoriel, quatre composantes, représentation vectorielle : $A^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu A^\nu$, $\Lambda = \exp(-\frac{i}{2} \omega M)$.

8.2 Le champ de Dirac

Nouvel exemple :

- champ de Dirac (*spineur de Dirac*), quatre composantes, représentation de Dirac :

$$\psi^\alpha \rightarrow \Lambda_\beta^\alpha \psi^\beta, \quad \Lambda_\beta^\alpha = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\kappa\lambda} \gamma^{\kappa\lambda} \right)_\beta^\alpha. \quad (8.10)$$

Les premiers termes du lagrangien qui sont réels et invariants par Lorentz (\rightarrow exercices) :

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_\alpha \left(i (\gamma^\mu)_\beta^\alpha \partial_\mu - m \delta_\beta^\alpha \right) \psi^\beta \quad (8.11)$$

avec

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (8.12)$$

Équations de mouvement : *équation de Dirac*,

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0} \quad (8.13)$$

et son conjugué (où on a supprimé les indices des spineurs). L'équation de Dirac implique l'équation de Klein-Gordon car

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi \\ &= (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi \\ &= \left(\frac{1}{2} \underbrace{(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{2g^{\mu\nu}} \partial_\mu \partial_\nu + m^2\right)\psi \\ &= (\square + m^2)\psi \end{aligned} \quad (8.14)$$

mais elle est plus restrictive : un objet à quatre composantes qui sont toutes des solutions de l'équation de Klein-Gordon n'est en général pas une solution de l'équation de Dirac.

La représentation de Dirac est *réductible* : Si on pose

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{L1} \\ \psi_{L2} \\ \psi_{R1} \\ \psi_{R2} \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

les objets à deux composantes ψ_L et ψ_R ne sont pas mélangés par les transformations de Lorentz propres. Ils sont dits *spineurs de Weyl* (à main gauche, “left-handed”, et à main droite, “right-handed”). Pour l'*opérateur de chiralité*

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (8.16)$$

on trouve les vecteurs propres et valeurs propres

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

γ^5 commute avec les générateurs de Lorentz (\rightarrow Ex.) ce qui montre que ψ_L et ψ_R se transforment indépendamment, par les représentations de Weyl à main gauche et à main droite (irréductibles à leur tour).

Les spineurs de Weyl décrivent des fermions *sans masse*. Pour écrire un terme de masse¹ il en faut toujours deux que l'on peut arranger dans un spineur de Dirac, donc on va désormais utiliser des spineurs de Dirac exclusivement.

Les solutions de l'équation de Dirac

Les solutions de l'équation de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\psi^\alpha = 0 \quad (8.18)$$

sont les superpositions des ondes planes ; par exemple les ondes planes progressives

$$\psi^\alpha(x) = u^\alpha(\vec{p})e^{-ipx} \quad \text{avec } p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (8.19)$$

En insérant cette solution dans l'équation de Dirac on trouve la contrainte supplémentaire

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\vec{p}) = 0.} \quad (8.20)$$

1. Plus précisément, un terme de masse “de Dirac” — pour des spineurs dits “de Majorana” il existe un autre type de terme de masse.

Dans le référentiel du repos, $p = (m, \vec{0})$ et

$$0 = (m\gamma^0 - m\mathbb{1})u(\vec{0}) = m \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} u(\vec{0}) \quad (8.21)$$

donc

$$u(\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

avec $\xi =$ un spineur à deux composantes quelconque, normalisation conventionnelle $\xi^\dagger \xi = 1$. Pour une solution de l'équation de Dirac, il y a alors seulement *deux degrés de liberté* indépendants contenus dans le spineur $u(\vec{p})$ (on trouvera plus tard qu'ils correspondent aux états de spin de la particule).

Dans un référentiel quelconque on obtient $u(\vec{p})$ par un boost appliqué à $u(\vec{0})$. Les générateurs des boost de la représentation de Dirac dans la direction des x^i sont les matrices $K^i \equiv \gamma^{0i}$. Avec

$$\hat{p} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (8.23)$$

un vecteur unitaire en direction de l'impulsion et

$$\eta = \sinh^{-1} \frac{|\vec{p}|}{m} = \tanh^{-1} \frac{|\vec{p}|}{p^0} \quad (8.24)$$

la *rapidité* qui paramètre le boost, on a alors pour la transformation de Lorentz

$$\Lambda = e^{-i\eta \hat{p} \cdot \vec{K}} \quad (8.25)$$

et

$$u(\vec{p}) = e^{-i\eta \hat{p} \cdot \vec{K}} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

On peut décomposer $u(\vec{p})$ en *spineurs de base* en choisissant une base dans l'espace des ξ : avec $\xi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\xi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a

$$u_s(\vec{p}) = e^{-i\eta \hat{p} \cdot \vec{K}} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} \quad (s = +, -). \quad (8.27)$$

Un autre type de solution de l'équation de Dirac sont les ondes planes regressives

$$\psi = v(\vec{p}) e^{+ipx} \quad \text{avec } p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (8.28)$$

Les mêmes considérations qu'avant donnent la contrainte

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu + m)v(\vec{p}) = 0} \quad (8.29)$$

et les spineurs de base

$$v_s(\vec{p}) = e^{-i\eta \hat{p} \cdot \vec{K}} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_s \\ -\xi_s \end{pmatrix} \quad (s = +, -). \quad (8.30)$$

On va établir quelques identités utiles pour les spineurs de base v_s et u_s ainsi que pour $\bar{u}_s \equiv u_s^\dagger \gamma^0$ et $\bar{v}_s \equiv v_s^\dagger \gamma^0$. Notons que

$$\gamma^0 K^i \gamma^0 = \frac{i}{4} \gamma^0 [\gamma^0, \gamma^i] \gamma^0 = \frac{i}{4} ((\gamma^0)^2 \gamma^i \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^i (\gamma^0)^2) = -\frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = -K^i = (K^i)^\dagger \quad (8.31)$$

et donc

$$\gamma^0 K^i = (K^i)^\dagger \gamma^0 \quad (8.32)$$

d'où on déduit

$$\bar{u}(\vec{p}) = u^\dagger(\vec{p})\gamma^0 = \left(e^{-i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}} u(\vec{0}) \right)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger(\vec{0}) e^{+i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}^\dagger} \gamma^0 = \bar{u}(\vec{0}) e^{i\eta\hat{p}\cdot\vec{K}}. \quad (8.33)$$

Alors les exponentielles se suppriment dans les combinaisons bilinéaires comme $\bar{u}(\vec{p})u(\vec{p})$ et on obtient

$$\bar{u}_r(\vec{p})u_s(\vec{p}) = \bar{u}_r(\vec{0})u_s(\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_r \\ \xi_r \end{pmatrix}^\dagger \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = 2m \delta_{rs}. \quad (8.34)$$

De même,

$$\begin{aligned} \bar{v}_r(\vec{p})v_s(\vec{p}) &= -2m \delta_{rs}, \\ \bar{u}_r(\vec{p})v_s(\vec{p}) &= 0, \\ \bar{v}_r(\vec{p})u_s(\vec{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Plus tard on aura besoin des *sommes de spins* qui s'écrivent, dans le référentiel du repos,

$$\begin{aligned} \sum_{s=+,-} u_s(\vec{0})\bar{u}_s(\vec{0}) &= m\gamma^0 + m, \\ \sum_{s=+,-} v_s(\vec{0})\bar{v}_s(\vec{0}) &= m\gamma^0 - m. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Dans un référentiel général on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{s=+,-} u_s(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p}) &= \not{p} + m, \\ \sum_{s=+,-} v_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p}) &= \not{p} - m. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Ici on a introduit la notation du *slash de Feynman*, $p_\mu\gamma^\mu \equiv \not{p}$, $\gamma^\mu\partial_\mu \equiv \not{\partial}$ etc.

8.3 La quantification canonique du champ de Dirac libre

On ne peut pas suivre le même chemin que pour le champ scalaire : décomposition de Fourier + relations de commutation canoniques. Il se trouve que soit l'unitarité est perdue (plus de conservation de probabilité) soit on tombe sur un hamiltonien sans borne inférieure (plus d'état fondamental). A la place des relations de commutation on impose plutôt les *relations de anticommutation* (anticommutateur : $\{A, B\} \equiv AB + BA$) entre ψ et son moment conjugué $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi} = i\psi^\dagger$:

$$\boxed{\begin{aligned} \{\psi^\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\delta_\beta^\alpha, \\ \{\psi^\alpha(t, \vec{x}), \psi^\beta(t, \vec{x}')\} &= \{\psi_\alpha^\dagger(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} = 0. \end{aligned}} \quad (8.38)$$

En général : *Théorème spin-statistique*. Représentations de Lorentz de spin demi-entier \Leftrightarrow relations de anticommutation \Leftrightarrow statistique de Fermi-Dirac, principe d'exclusion de Pauli, *fermions*. Représentations de Lorentz de spin entier \Leftrightarrow relations de commutation \Leftrightarrow statistique de Bose-Einstein, *bosons*.

On décompose en modes de Fourier :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_s \int \widetilde{d}p (a_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + b_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_s \int \widetilde{d}p (b_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p})e^{-ipx} + a_s^\dagger(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p})e^{ipx}). \end{aligned} \quad (8.39)$$

$a^\dagger, b^\dagger, a, b$ = opérateurs de création / annihilation. Comme pour le champ scalaire complexe (\rightarrow Ex.) il faut distinguer deux types d'excitations, *particules/antiparticules*. Des éq. (8.38) et (8.39)

on obtient les règles d'anticommutation

$$\begin{aligned} \{a_s(\vec{p}), a_r^\dagger(\vec{p}')\} &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') 2\omega_{\vec{p}} \delta_{rs}, \\ \{b_s^\dagger(\vec{p}), b_r(\vec{p}')\} &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') 2\omega_{\vec{p}} \delta_{rs}, \\ (\text{autres anticommuteurs}) &= 0. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Le hamiltonien est (\rightarrow ex.)

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi = \sum_s \int \widetilde{d\vec{p}} \omega_{\vec{p}} (a_s^\dagger(\vec{p})a_s(\vec{p}) - b_s(\vec{p})b_s^\dagger(\vec{p})) \quad (8.41)$$

On note le signe $-$ par rapport au cas bosonique. En utilisant les relations d'anticommutation on trouve l'expression manifestement positive

$$H = \sum_s \int \widetilde{d\vec{p}} \omega_{\vec{p}} (a_s^\dagger(\vec{p})a_s(\vec{p}) + b_s^\dagger(\vec{p})b_s(\vec{p})) + E_0 \quad (8.42)$$

avec $E_0 =$ constante (divergente), pas observable.

Espace de Fock :

- vide $|0\rangle$ annihilé par tous les $a_s(\vec{p})$ et $b_s(\vec{p})$
- $a_s^\dagger(\vec{p})$ crée un état à une particule de "type a ", impulsion \vec{p} , spin s
- $b_s^\dagger(\vec{p})$ crée un état à une particule de "type b ", impulsion \vec{p} , spin s

Interprétation : "type a " = fermion, "type b " = antifermion.

L'identification $s \leftrightarrow$ spin

Moment cinétique = générateur de rotations = charge conservée associée à l'invariance par rotations (théorème de Noether, voir sec. 2.3).

Transformation de Lorentz linéarisée :

$$\Lambda = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\|\omega\|^2) \quad (8.43)$$

Rotations générées par

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}}_{\text{rotation avec axe } x^k} \quad (8.44)$$

Pour une rotation par un angle θ autour de l'axe des z :

$$\Lambda = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \theta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|\theta|^2) \quad (8.45)$$

Transformation du champ ψ :

$$\begin{aligned} \psi(t, x, y, z) &\rightarrow \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2} \theta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \right) \psi(t, x + \theta y, y - \theta x, z) + \mathcal{O}(|\theta|^2) \\ &= \psi(t, x, y, z) - \frac{i}{2} \theta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \psi(t, x, y, z) - \theta(x\partial_y - y\partial_x)\psi(t, x, y, z) + \mathcal{O}(|\theta|^2). \end{aligned} \quad (8.46)$$

La variation du champ est alors

$$\delta\psi = - \left((x\partial_y - y\partial_x + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}) \right) \psi \quad (8.47)$$

ou, au cas général d'une rotation autour de l'axe défini par un vecteur unitaire \hat{r} ,

$$\delta\psi = - \left(\vec{x} \wedge \vec{\nabla} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \right) \cdot \hat{r} \psi \quad (8.48)$$

Le courant conservé est

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta \psi - \hat{J}^\mu \quad (8.49)$$

où $\partial_\mu \hat{J}^\mu$ est la variation du lagrangien ; puisque la rotation n'affecte pas le temps, on a $\hat{J}^0 = 0$.

Il y a alors trois charges de Noether $\int d^3x J^0$ (une par axe de rotation indépendante) constituant le *vecteur du moment cinétique* :

$$\vec{J} = \int d^3x \psi^\dagger \vec{\Sigma} \psi, \quad \vec{\Sigma} = \underbrace{\vec{x} \wedge (-i\vec{\nabla})}_{\text{"MC orbital"}} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}}_{\text{"MC intrinsèque"}} \quad (8.50)$$

On calcule le moment cinétique en direction des z d'un état à une particule au repos :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_z a_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle &= [\mathcal{J}_z, a_s^\dagger(\vec{0})] |0\rangle && \text{car } \mathcal{J}_z |0\rangle = 0, \text{ vide invariant} \\ &= \sum_{r,r'} \int d^3x \int \widetilde{d\vec{p}} \widetilde{d\vec{p}'} \left[(a_r^\dagger(\vec{p}) u_r^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} + b_r(\vec{p}) v_r^\dagger(\vec{p}) e^{-ipx}) \Sigma_z \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (a_{r'}(\vec{p}') u_{r'}(\vec{p}') e^{-ip'x} + b_{r'}^\dagger(\vec{p}') v_{r'}(\vec{p}') e^{ip'x}) \right] a_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle \\ &= \sum_{r,r'} \int d^3x \int \widetilde{d\vec{p}} \widetilde{d\vec{p}'} (a_r^\dagger(\vec{p}) u_r^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} + b_r(\vec{p}) v_r^\dagger(\vec{p}) e^{-ipx}) \Sigma_z u_{r'}(\vec{p}') e^{-ip'x} \cdot \\ &\quad \cdot \underbrace{\{a_{r'}(\vec{p}'), a_s^\dagger(\vec{0})\}}_{2m(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}') \delta_{r's}} |0\rangle \\ &= \sum_r \int d^3x \int \widetilde{d\vec{p}} a_r^\dagger(\vec{p}) u_r^\dagger(\vec{p}) e^{i\omega_{\vec{p}}x^0 - i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-imx^0} \Sigma_z u_s(\vec{0}) |0\rangle && \text{car } b_r(\vec{p}) |0\rangle = 0 \\ &= \sum_r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}} a_r^\dagger(\vec{p}) u_r^\dagger(\vec{p}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}) e^{i(\omega_{\vec{p}}-m)x^0} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} u_s(\vec{0}) |0\rangle \\ &= \frac{1}{4m} \sum_r u_r^\dagger(\vec{0}) \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} u_s(\vec{0}) a_r^\dagger(\vec{0}) |0\rangle \\ &= \sum_{r=+,-} \left(\xi_r^\dagger \frac{\sigma^3}{2} \xi_s \right) a_r^\dagger(\vec{0}) |0\rangle \\ &= \pm \frac{1}{2} a_s^\dagger(\vec{0}) |0\rangle && (s = \pm). \end{aligned} \quad (8.51)$$

Ici on a utilisé que $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ et que $\{a^\dagger, a^\dagger\} = \{b, a^\dagger\} = \{b^\dagger, a^\dagger\} = 0$. On a ultérieurement pu remplacer Σ_z par l'opérateur de spin $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}$ car l'opérateur différentiel qui correspond au moment cinétique orbital n'agit que sur une constante après évaluation de la fonction delta venant de $\{a_{r'}(\vec{p}'), a_s^\dagger(\vec{0})\}$.

On conclut que le fermion créé par a_\pm^\dagger possède un moment cinétique au repos ("spin") de $\pm \frac{1}{2}$. Le même calcul pour les antifermions montre que $b_\pm^\dagger(\vec{0}) |0\rangle$ possède le moment cinétique $\mp \frac{1}{2}$.

Le propagateur de Dirac

Calcul des fonctions à deux points, en utilisant que $b_s|0\rangle = 0$ et $\langle 0|b_s^\dagger = 0$:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi^\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle &= \sum_{ss'} \int \widetilde{d\mathbf{p}} \widetilde{d\mathbf{p}'} e^{ip'y - ipx} u_s(\vec{p}) \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \langle 0|a_s(\vec{p})a_{s'}^\dagger(\vec{p}')|0\rangle \\
&= \int \widetilde{d\mathbf{p}} \underbrace{\sum_s u_s(\vec{p})^\alpha \bar{u}_s(\vec{p})_\beta}_{(\not{p}+m)_\beta^\alpha} e^{-ip(x-y)} \\
&= \int \widetilde{d\mathbf{p}} (\not{p}+m)_\beta^\alpha e^{-ip(x-y)}
\end{aligned} \tag{8.52}$$

et de même

$$\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi^\alpha(x)|0\rangle = - \int \widetilde{d\mathbf{p}} (\not{p}+m)_\beta^\alpha e^{-ip(y-x)}. \tag{8.53}$$

Définition de l'ordre chronologique pour les fermions : signe moins si on change l'ordre de deux opérateurs fermioniques,

$$\mathbb{T} \psi(x)\bar{\psi}(y) \equiv \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y), & x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x), & x^0 < y^0 \end{cases} \tag{8.54}$$

Un calcul équivalent à celui du cas bosonique (voir sec. 3.4) donne la représentation

$$\langle 0|\mathbb{T} \psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \int \frac{d^4\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}+m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \equiv S_F(x-y). \tag{8.55}$$

Notation : vu que

$$(\not{p}+m)(\not{p}-m) = \not{p}^2 - m^2 \mathbb{1} = (p^2 - m^2) \mathbb{1} \tag{8.56}$$

on écrit parfois pour la transformée de Fourier de S_F

$$\widetilde{S}_F = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \tag{8.57}$$

même si strictement parlant $\not{p} - m$ est une matrice.

La formule de LSZ pour les champs de Dirac

Similaire au cas du champ scalaire mais avec quelques complications : il faut distinguer fermions dans l'état initial u , antifermions dans l'état initial \bar{v} , fermions dans l'état final \bar{u} , antifermions dans l'état final v . Avec impulsions entrantes p_i ($i = 1 \dots m$) et impulsions émergentes p'_j ($j = 1 \dots n$), et l'opérateur $(-i \overleftarrow{\not{p}} - m)$ agissant vers la gauche, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle f|i\rangle &= \int d^4x_1 \dots d^4x'_n e^{-i(p_1x_1 + \dots + p_mx_m - p'_1x'_1 - \dots - p'_nx'_n)} \\
&\quad (-i)\bar{u}_{r'_1}(\vec{p}'_1)(i\not{p} - m)_{x'_1} \dots i\bar{v}_{s_m}(\vec{p}_m)(i\not{p} - m)_{x_m} \\
&\quad \langle 0|\mathbb{T} \psi(x_1) \dots \psi(x'_1) \dots \bar{\psi}(x_m) \dots \bar{\psi}(x'_n)|0\rangle \\
&\quad (-i)(-i \overleftarrow{\not{p}} - m)_{x_1} u_{s_1}(\vec{p}_1) \dots i(-i \overleftarrow{\not{p}} - m)_{x'_n} v_{r'_n}(\vec{p}'_n).
\end{aligned} \tag{8.58}$$

La formule suppose que $m =$ masses physiques (pôles des propagateurs), ainsi que

$$\langle 0|\psi(x)|0\rangle = 0 \tag{8.59}$$

(garanti par invariance de Lorentz),

$$\langle p, s, \text{fermion}|\psi(x)|0\rangle = 0 = \langle p, s, \text{antifermion}|\bar{\psi}(x)|0\rangle \tag{8.60}$$

pour tout état à un (anti)fermion avec impulsion p et spin s (garanti pour des Fermions de Dirac par la conservation du nombre fermionique), et enfin que

$$\begin{aligned}\langle p, s, \text{fermion} | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle &= \bar{u}_s(\vec{p}) e^{-ipx} \\ \langle p, s, \text{antifermion} | \psi(x) | 0 \rangle &= v_s(\vec{p}) e^{-ipx}\end{aligned}\tag{8.61}$$

(à assurer par des conditions de renormalisation dans les théories avec interactions).

8.4 Les intégrales de chemin pour les fermions

Champs bosoniques \leftrightarrow relations de *commutation*, commutent au cas limite classique. On dérive les amplitudes de transition dans la théorie quantique des intégrales de chemin = des intégrales sur l'espace de configuration des champs classiques commutants.

Champs fermioniques \leftrightarrow relations d'*anticommutation*. Pour définir l'intégrale de chemin, il faut des objets qui *anticommutent* au cas limite classique : $\psi\chi = -\chi\psi$. *Nombres de Grassmann*.

Algèbre de Grassmann = algèbre libre associative, réelle ou complexe, générée par l'identité 1 et par $\{\theta_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, modulo la relation $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$.

Exemple important (en topologie et géométrie différentielle, aussi dans le traitement mathématique des théories de jauge classiques) avec un nombre fini de générateurs : algèbre extérieure sur un espace vectoriel, en particulier des formes différentielles (= champs tensoriels antisymétriques) sur l'espace tangent d'une variété de dimension n . Produit = \wedge , générateurs = $\{dx^i\}$ par rapport à un système de coordonnées locales $\{x^i\}$, éléments $\sum_{k=0}^n \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

A terme on va considérer un nombre *infini* de générateurs (même des familles \mathcal{I} non dénombrables) : $\theta_i \rightarrow \theta(x)$.

Propriétés :

$$\theta_i^2 = 0 \tag{8.62}$$

$$[\theta_i\theta_j, \theta_k] = 0 \tag{8.63}$$

où plus généralement : les produits d'un nombre pair des θ commutent avec tous les éléments de l'algèbre.

Des *fonctions* sont définies par leur développement limité, nécessairement fini :

$$f(\theta) = A + \theta B + \underbrace{\theta^2 C + \dots}_{=0 \text{ car } \theta^2=0} \tag{8.64}$$

La *dérivée* (de gauche) $\frac{\partial}{\partial \theta}$ est définie par les propriétés

- linéarité
- $\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, \theta \right\} = 1$ (cf. nombres commutants où on a $\left[\frac{\partial}{\partial x}, x \right] = 1$)

Il en résulte

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (A + \theta B) = B. \tag{8.65}$$

L'opérateur d'intégration (impropre) $\int d\theta$ est définie par les propriétés

- linéarité
- $\int d\theta f(\theta + \eta) = \int d\theta f(\theta)$ (invariance par un changement de variables additif)
- $\int d\theta \theta = 1$ (normalisation)

Il en résulte

$$\int d\theta (A + \theta B) = B \int d\theta \theta = B. \tag{8.66}$$

Alors intégration et différentiation sont effectivement la même opération.

Complexification : définie de manière évidente. On traite θ_i et θ_i^* comme variables indépendants (plutôt que leurs parties réelles et imaginaires). On note la règle pour le conjugué des nombres de Grassmann :

$$(\theta_i \theta_j)^* = \theta_j^* \theta_i^* = -\theta_i^* \theta_j^*. \quad (8.67)$$

Intégrales de Gauss :

$$\int d\theta^* d\theta e^{-\theta^* a \theta} = \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* a \theta) = \int d\theta^* d\theta (1 + \theta a \theta^*) = \int d\theta^* a \theta^* = a \quad (8.68)$$

À comparer avec le cas de nombres commutants, $\int \frac{dz dz^*}{2\pi} e^{-z^* a z} = \frac{1}{a}$. En plusieurs dimensions (\rightarrow exercices) :

$$\underbrace{\prod_{i=1}^n \int d\theta_i^* d\theta_i}_{\equiv \int d^n \theta^* d^n \theta} e^{-\theta_j^* A_{jk} \theta_k} = \det A \quad (8.69)$$

À comparer avec le cas de nombres commutants, $\int \frac{d^n z d^n z^*}{(2\pi)^n} e^{-z^\dagger A z} = \frac{1}{\det A}$. Plus généralement,

$$\int d^n \theta^* d^n \theta e^{-\theta^\dagger A \theta + \eta^\dagger \theta + \theta^\dagger \eta} = (\det A) e^{\eta^\dagger A^{-1} \eta}. \quad (8.70)$$

Intégrales de chemin :

On suit largement le cas bosonique, voir section 5.3, avec quelques modifications. Les champs $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ et les sources $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ sont des champs de Grassmann. La fonctionnelle génératrice de la théorie libre est

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \int \mathcal{D}\psi \exp \left(i \int d^4 x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) \quad (8.71)$$

Après un changement de variable d'intégration :

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = Z[0, 0] \exp \left(- \int d^4 x d^4 y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) \right) \quad (8.72)$$

On calcule les fonctions de corrélation en prenant les dérivées fonctionnelles par rapport aux sources (attention à l'ordre des champs de Grassmann!). Par exemple,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{Z[0, 0]} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \right) Z[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \exp \left(- \int d^4 x d^4 y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) \right) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= - \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \exp \left(- \int d^4 x d^4 y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) \right) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= S_F(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (8.73)$$

comme il faut.

8.5 La théorie de Yukawa

En quatre dimensions on ne peut pas écrire une théorie renormalisable avec interactions qui ne contient que des fermions. En fait la dimension du lagrangien est $4 = [\mathcal{L}] = [i\bar{\psi} \not{\partial} \psi]$, alors la dimension du champ ψ est $[\psi] = \frac{3}{2}$ et tout terme d'interaction est de dimension > 4 (par exemple, $[(\bar{\psi}\psi)^2] = 6$), non renormalisable.

La théorie renormalisable la plus simple qui contient des fermions et des interactions : un fermion de Dirac ψ , un scalaire réel ϕ . *Théorie de Yukawa*.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{scalaire}} + y \phi \bar{\psi} \psi. \quad (8.74)$$

Ici le couplage y est sans dimension. Modèle pour les interactions du boson de Higgs avec les fermions du modèle Standard, ou (avec un facteur de γ^5) pour les interactions entre pions et nucléons.

Fonctionnelle génératrice :

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m_\psi) \psi - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + y \phi \bar{\psi} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + J \phi \right) \\ &= \exp \left(i y \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) \right) Z_0[\eta, \bar{\eta}, J] \end{aligned} \quad (8.75)$$

où on a séparé le terme d'interaction avec le même raisonnement que dans section 6.1, avec Z_0 donné par

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}, J] = \mathcal{N} \exp \left(- \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) \right) \exp \left(- \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) D_F(x-y) J(y) \right). \quad (8.76)$$

Diagrammes de Feynman :

On développe les exponentielles et on représente chaque terme par un diagramme de Feynman, composé des éléments suivants :

	source externe J :	$i \int d^4x J(x)$
	source externe η :	$i \int d^4x \eta(x)$
	source externe $\bar{\eta}$:	$i \int d^4x \bar{\eta}(x)$
	propagateur de fermion :	$S_F(x-y)$
	propagateur de scalaire :	$D_F(x-y)$
	vertex :	$\int d^4x \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)}$

Les propagateurs des fermions sont *orientés* (indiqué par la flèche). Pour les propagateurs attachés aux sources externes, la direction est toujours $\bigcirc \rightarrow$ et $\bullet \leftarrow$; aux vertex, il y a toujours une flèche qui entre et une qui sort. Indication du *flux de nombre fermionique* à travers le diagramme.

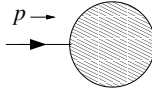
Représentation diagrammatique de la fonctionnelle génératrice :

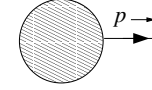
$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = Z_0[0, 0, 0] \sum_{\text{diagrammes } D} \frac{D}{\text{facteur de symétrie } S(D)} \quad (8.77)$$

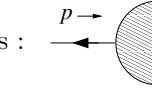
Règles de Feynman pour le calcul des amplitudes

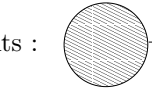
Même que pour le cas du champ scalaire : les dérivées fonctionnelles par rapport aux sources enlèvent les $J, \eta, \bar{\eta}$, extrémités des propagateurs correspondants labellisés par x_i . Règles dans

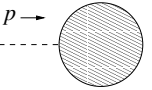
l'espace d'impulsions obtenus par transformation de Fourier. Les pattes externes sont enlevés selon la formule LSZ, voir chapitre 7. Sans démontrer les détails :

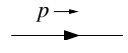
1.a Fermions incidents :  = $u_s(\vec{p})$

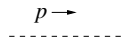
1.b Fermions émergents :  = $\bar{u}_s(\vec{p})$


1.c Antifermions incidents :  = $\bar{v}_s(\vec{p})$

1.d Antifermions émergents :  = $v_s(\vec{p})$

1.e Scalaires externes :  = 1

2.a Propagateurs de fermion :  = $\frac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}$

2.b Propagateurs de scalaire :  = $\frac{i}{p^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$

3. Vertex :  = $-iy$

4. Conservation des impulsions à chaque vertex.

5. Intégrer sur toutes les impulsions pas encore déterminées.

6. Diviser par le facteur de symétrie.

7. Déterminer le signe total du diagramme :

- boucle fermionique \Rightarrow facteur de (-1)
- deux pattes externes fermioniques échangées \Rightarrow facteur de (-1)

Chapitre 9

L'électrodynamique quantique

9.1 La quantification du champ électromagnétique

On rappelle que le *champ électromagnétique* est représenté par un tenseur antisymétrique, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, qui est contraint par la relation

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} = 0 \quad (9.1)$$

(*identités de Bianchi*). Les équations de mouvement sont

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (9.2)$$

avec $J = (\rho, \vec{j})$ le courant électromagnétique. Les éqs. (9.1) et (9.2) sont les *équations de Maxwell*.

Une solution de la contrainte (9.1) est

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (9.3)$$

avec un vecteur A_μ , le *quadri-potentielle*. On utilise alors A_μ comme variable fondamentale ; les éqs. (9.2) sont les équations d'Euler-Lagrange $\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \int d^4x \mathcal{L} = 0$ avec

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu. \quad (9.4)$$

Deux choix de A_μ sont toutefois équivalents physiquement s'ils sont liés par une *transformation de jauge*

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (9.5)$$

avec $\alpha(x)$ une fonction quelconque, car $F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}$. Cette redondance de description pose des difficultés pour la quantification de la théorie.

Problème : la quantification canonique naïve donne lieu aux contradictions. Le moment conjugué à A_μ est

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F_{\mu 0} \quad (9.6)$$

donc $\Pi_0 = 0$ et on ne peut pas imposer les relations de commutation canoniques

$$[A_0(t, \vec{x}), \Pi_0(t, \vec{x}')] \stackrel{?}{=} (\text{autre que } 0). \quad (9.7)$$

Une possibilité d'éviter ce problème est de "fixer la jauge". Classiquement on imposerait une *condition de jauge* telle que, pour chaque configuration de champs, il existe un A_μ unique qui la remplit. Exemples : $n^\mu A_\mu = 0$ pour un vecteur n^μ fixe (jauge axiale/du cône lumière/temporelle

selon le signe de n^2 , non covariante), $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (jauge de Coulomb, non covariante), $\partial_\mu A^\mu = 0$ (jauge de Lorenz, covariante).

Pour la jauge de Lorenz, l'équation de mouvement devient

$$\square A^\mu = J^\mu. \quad (9.8)$$

On obtient la même équation de mouvement du lagrangien modifié

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (9.9)$$

en posant $\xi = 1$ ("jauge de Feynman"), que l'on peut prendre comme point de départ pour une quantification canonique du champ électromagnétique. Le moment conjugué est maintenant

$$\Pi_\mu = -\dot{A}_\mu \quad (9.10)$$

et les relations canoniques de commutation sont

$$[A^\mu(t, \vec{x}), \Pi_\nu(t, \vec{x}')] = i\delta_\nu^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (9.11)$$

Si on poursuit cette approche canonique, on va tomber sur un espace de Hilbert avec une *norme indéfinie*, mais la projection sur la partie avec une norme définie positive donne une théorie cohérente (*formalisme de Gupta-Bleuler*, quantification canonique du champ électromagnétique). Ce formalisme étant plus difficile à généraliser aux théories de jauge non-abéliennes, on va plutôt poursuivre une approche différente, basée sur les intégrales de chemin.

Problème équivalent en langage des intégrales de chemin :

$$Z \stackrel{?}{=} \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \quad (9.12)$$

On intègre sur des configurations physiquement équivalentes (se déduisant l'une de l'autre par une transformation de jauge). En fait

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k) \quad (9.13)$$

et si on pose $\tilde{A}_\mu(k) = k_\mu \alpha(k)$ (avec $\alpha(k)$ une fonction quelconque : configuration "pure jauge", équivalente à $A_\mu = 0$) :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k) \Big|_{\tilde{A}_\mu(k)=k_\mu \alpha(k)} &= 0 \\ \Rightarrow e^{iS[A]} \Big|_{\tilde{A}_\mu(k)=k_\mu \alpha(k)} &= 1 \end{aligned} \quad (9.14)$$

alors pour toutes les α on n'intègre pas une fonction gaussienne/oscillatoire mais une constante : divergence grave (même si toutes ces configurations ne représentent qu'une seule configuration physique) ! Il faut alors trouver un moyen de ne compter toute configuration physique qu'une fois.

Astuce de Faddeev-Popov :

On considère une fonction $G(A)$ (*condition de jauge*) dont on va préciser la forme ci-dessous. On insère 1 dans l'intégrale de chemin sous la forme

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta[G(A^{(\alpha)})] \det \left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha} \right). \quad (9.15)$$

Ici $A_\mu^{(\alpha)}$ est obtenu de A_μ par une transformation de jauge,

$$A_\mu^{(\alpha)}(x) \equiv A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x). \quad (9.16)$$

Eq. (9.15) est la généralisation fonctionnelle de l'identité

$$1 = \int d^n y \delta^{(n)}(y) = \int d^n x \det \left(\frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \right) \delta^{(n)}(y(x)) . \quad (9.17)$$

Pour l'ensemble des conditions de jauge

$$G(A) = \partial_\mu A^\mu - \omega(x) \quad (9.18)$$

avec $\omega(x)$ une fonction fixe, on obtient

$$G(A^{(\alpha)}) = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \alpha - \omega \quad (9.19)$$

et alors

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \square \quad (9.20)$$

qui est *indépendant de A_μ* (en QED — plus compliqué pour les théories non-abeliennes). En insérant eq. (9.15) dans l'intégrale de chemin on obtient

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} &= \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \int \mathcal{D}\alpha \delta[G(A^{(\alpha)})] \det \left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha} \right) \\ &= \det \left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha} \right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta[G(A^{(\alpha)})] \\ &= \det \left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha} \right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A^{(\alpha)} e^{iS[A^{(\alpha)}]} \delta[G(A^{(\alpha)})] \\ &= \det \left(\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha} \right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta[G(A)] \\ &= \det(\square) \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta[\partial_\mu A^\mu - \omega] \end{aligned} \quad (9.21)$$

Dans la deuxième ligne on a utilisé que le déterminant est indépendant de α . Dans la troisième ligne on a exploité l'invariance de jauge de l'action et le fait que $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^{(\alpha)}$. Dans la quatrième on a renommé la variable d'intégration. Dans la cinquième on s'est servi des eqs. (9.18) et (9.20). À noter que l'intégrale de chemin a été restreinte aux A_μ qui vérifient une condition de Lorenz généralisée $\partial_\mu A^\mu = \omega$. On a pu faire sortir le déterminant fonctionnel de Jacobi ("déterminant de Faddeev-Popov") de l'intégrale.

Pour progresser il convient de ne pas considérer seulement une fonction ω mais d'intégrer sur tous ω avec une pondération gaussienne (classe de jauges dite *jauges R_ξ*)

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} &= N(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \det(\square) \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta[\partial_\mu A^\mu - \omega] \\ &= N(\xi) \det(\square) \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} e^{-i \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2} \\ &= N(\xi) \det(\square) \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{gf}})} . \end{aligned} \quad (9.22)$$

Ici ξ est une constante, $N(\xi)$ est un facteur de normalisation et

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 . \quad (9.23)$$

L'expression finale contient toujours plusieurs facteurs divergents / mal définis, comme $\det(\square)$ ou $\int \mathcal{D}\alpha$, mais ils apparaissent *en facteur*. De conséquence, pour le calcul des fonctions de corrélation, ces facteurs se suppriment dans la fonctionnelle génératrice normalisée

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \frac{\int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{gf}} + J_\mu A^\mu)}}{\int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{gf}})}} \quad (9.24)$$

Les observables physiques doivent être indépendants du choix de *paramètre de jauge* ξ . Pour des calculs en pratique, le choix

$$\xi = 1 \quad (9.25)$$

est souvent le plus convenant (*jauge de Feynman*). Parfois d'autres choix comme $\xi \rightarrow 0$ (*jauge de Landau*) peuvent convenir selon le problème sous étude.

Propagateur du photon :

Nous pouvons maintenant calculer la fonction à deux points pour le photon en jauge R_ξ générale :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle &= \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\nu(y)} \frac{Z[J]}{Z[0]} \right) \Big|_{J=0} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (9.26)$$

La "pure" électrodynamique étant une théorie libre, toutes les autres fonctions de corrélation sont triviales (déconnectées). On obtient une théorie beaucoup plus intéressante et importante si on couple le photon aux autres champs.

9.2 L'électrodynamique quantique

- Exercices : $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$ invariant de jauge si $\partial_\mu J^\mu = 0$ (courant conservé).
- Théorème de Noether (sec. 2.3) : Si $S[\Phi_i] = S[\Phi'_i]$ (symétrie continue avec $\Phi_i \rightarrow \Phi'_i = \Phi_i + \alpha \delta\Phi_i + \mathcal{O}(|\alpha|^2)$) et $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \hat{J}^\mu + \mathcal{O}(|\alpha|^2)$, alors le courant

$$J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \delta\Phi_i - \hat{J}^\mu \quad (9.27)$$

est conservé.

On considère alors

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \quad (9.28)$$

et la transformation

$$\psi \rightarrow e^{ie\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-ie\alpha}. \quad (9.29)$$

Ici e dans l'exposant est une constante. Si α est constant, alors $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{Dirac}}$, par conséquent $\hat{J} = 0$ et S est invariant. On a $\delta\psi = ie\psi$, $\delta\bar{\psi} = -ie\bar{\psi}$ et le courant de Noether est

$$J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (9.30)$$

On va identifier la constante e avec la *charge électrique élémentaire* et la charge $\int d^3x J^0$ avec la *charge électrique* portée par le champ ψ .

J^μ n'est plus une "source externe" (= un moyen auxiliaire pour calculer les fonctions de corrélation qui ne figure plus dans le résultat final) mais une source *physique* : les électrons sont la source du champ électromagnétique, le courant est construit des champs quantifiés.

Tout ensemble :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \\ &= \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (9.31)$$

où la *dérivée covariante de jauge* est

$$\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu \equiv \gamma^\mu (\partial_\mu + ie A_\mu). \quad (9.32)$$

On note que éq. (9.31) est invariant par des rotations de phase *locales* où $\alpha = \alpha(x)$:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-ie\alpha(x)} \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}\tag{9.33}$$

car

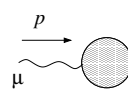
$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \rightarrow \underbrace{\bar{\psi}e^{-ie\alpha}(i\not{\partial} - m)e^{ie\alpha}\psi}_{\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}(\not{\partial}\alpha)\psi} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}e^{-ie\alpha}(A - (\not{\partial}\alpha))e^{ie\alpha}\psi = \mathcal{L}_{\text{QED}}.\tag{9.34}$$

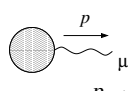
Dit autrement, l'invariance du lagrangien de Dirac par des *transformations de jauge* locales nécessite un couplage à un champ de jauge (le photon). Le lagrangien (9.31) qui résulte est celui de l'*électrodynamique quantique*.

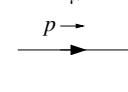
Règles de Feynman pour la QED

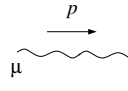
Dans l'espace des impulsions, jauge de Feynman $\xi = 1$, sans preuve :

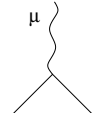
1.a (Anti)fermions externes : voir théorie de Yukawa, section 8.5

1.b Photons incidents :  = $\varepsilon_\mu(p)$

1.c Photons émergents :  = $\varepsilon_\mu^*(p)$

2.a Propagateur de fermion :  = $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

2.b Propagateur de photon :  = $\frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$

3. Vertex :  = $-ie\gamma^\mu$

4. Conservation des impulsions à chaque vertex.

5. Intégrer sur toutes les impulsions pas encore déterminées.

(6. Diviser par le facteur de symétrie — toujours 1 en QED spinorielle.)

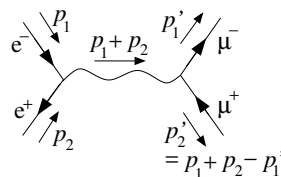
7. Déterminer le signe total du diagramme.

Ici $\varepsilon_\mu(p)$ = quadrivecteur de *polarisation* du photon, $\varepsilon_\mu(p) = (0, \vec{\varepsilon}(p))$ avec $|\vec{\varepsilon}| = 1$ et $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p} = 0$ (polarisation transverse).

9.3 Processus élémentaires au niveau des arbres

La diffusion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Jauge de Feynman :



$$\begin{aligned}
&= \bar{v}_{s_2}(p_2)(-ie\gamma^\mu)u_{s_1}(p_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2} \right) \bar{u}_{s'_1}(p'_1)(-ie\gamma^\nu)v_{s'_2}(p'_2) \\
&= \frac{ie^2}{(p_1+p_2)^2} (\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\mu u_{s_1}(p_1)) (\bar{u}_{s'_1}(p'_1)\gamma_\mu v_{s'_2}(p'_2)) = i\mathcal{M}_{\text{fi}}.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

On a

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(v^\dagger\gamma^0)^\dagger = u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v \tag{9.36}$$

et donc

$$|\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} (\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma^\mu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma_\nu v_{s_2}(p_2)) (\bar{u}_{s'_1}(p'_1)\gamma_\mu v_{s'_2}(p'_2)\bar{v}_{s'_2}(p'_2)\gamma^\nu u_{s'_1}(p'_1)) \tag{9.37}$$

On calcule la section efficace *non polarisée* : on prend la *moyenne* $\frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}$ des spins incidents et la *somme* $\sum_{s'_1}\sum_{s'_2}$ des spins émergents. Avec m, M les masses de l'électron et du muon :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \\
&= \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} \bar{v}_{s_2\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta} u_{s_1\beta} \bar{u}_{s_1\gamma}\gamma_\nu\gamma_\delta v_{s_2\delta} \bar{u}_{s'_1\alpha'}\gamma_\mu\alpha'\beta' v_{s'_2\beta'} \bar{v}_{s'_2\gamma'}\gamma^\nu_{\gamma'\delta'} u_{s'_1\delta'} \\
&= \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} \frac{1}{4} (\not{p}_2 - m)_{\delta\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} (\not{p}_1 + m)_{\beta\gamma} \gamma_\nu\gamma_\delta (\not{p}'_1 + M)_{\delta'\alpha'} \gamma_\mu\alpha'\beta' (\not{p}'_2 - M)_{\beta'\gamma'} \gamma^\nu_{\gamma'\delta'} \\
&\approx \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} \frac{1}{4} \text{tr}(\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma_\nu) \text{tr}((\not{p}'_1 + M)\gamma_\mu(\not{p}'_2 - M)\gamma^\nu)
\end{aligned} \tag{9.38}$$

On a utilisé $\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m$ et $\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} - m$. Dans la dernière ligne on a négligé m par rapport à M . Les identités pour les traces des matrices de Dirac

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\
\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\
\text{tr}(\text{produit d'un nombre impair de } \gamma) &= 0
\end{aligned} \tag{9.39}$$

permettent de simplifier

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^4}{(p_1+p_2)^4} 4(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} p_1 p_2) 4(p'_{1\mu} p'_{2\nu} + p'_{1\nu} p'_{2\mu} - g_{\mu\nu} (p'_1 p'_2 + M^2)) \\
&= \frac{8e^4}{(p_1+p_2)^4} ((p_1 p'_1)(p_2 p'_2) + (p_1 p'_2)(p_2 p'_1) + M^2 p_1 p_2).
\end{aligned} \tag{9.40}$$

Dans le référentiel du centre de masse on a, toujours en négligeant la masse de l'électron,

$$\begin{aligned}
p_1 &= (E, 0, 0, E) \\
p_2 &= (E, 0, 0, -E) \\
p'_1 &= (E, \vec{k}) \\
p'_2 &= (E, -\vec{k})
\end{aligned} \tag{9.41}$$

avec $\vec{k}^2 = E^2 - M^2$ et $\vec{k} \cdot \vec{e}_z = |\vec{k}| \cos\theta$. Dans ce référentiel,

$$\begin{aligned}
(p_1+p_2)^2 &= 4E^2 \\
p_1 p_2 &= 2E^2 \\
p_1 p'_1 &= p_2 p'_2 = E^2 - E|\vec{k}| \cos\theta \\
p_1 p'_2 &= p_2 p'_1 = E^2 + E|\vec{k}| \cos\theta.
\end{aligned} \tag{9.42}$$

et alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 &= \frac{8 e^4}{16 E^4} \left(E^2 (E - |\vec{k}| \cos \theta)^2 + E^2 (E + |\vec{k}| \cos \theta)^2 + 2 M^2 E^2 \right) \\ &= e^4 \left(\left(1 + \frac{M^2}{E^2} \right) + \left(1 - \frac{M^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Pour calculer la section efficace avec éq. (7.21), on simplifie d'abord les facteurs cinétiques avec éqs. (9.41) et avec $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2$. On note que

$$dk \delta(f(k)) = dk \sum_{k_i : f(k_i)=0} \frac{1}{|f'(k_i)|} \delta(k - k_i) \quad (9.44)$$

et en particulier

$$dk \delta(2E - 2\sqrt{k^2 + M^2}) = dk \left(\frac{2k}{E} \right)^{-1} \delta(k - \sqrt{E^2 - M^2}) \quad (9.45)$$

ce qui nous permet de poser

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{d^3 p'_1}{2 E'_1 (2\pi)^3} \frac{d^3 p'_2}{2 E'_2 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}'_1 - \vec{p}'_2) \\ &= \frac{1}{2E^2} \frac{k^2 dk d\Omega}{4 E'_1 E'_2} \frac{1}{16\pi^2} \delta(2E - 2\sqrt{k^2 + M^2}) \\ &= \frac{1}{2E^2} \frac{k^2 dk d\Omega}{4E^2} \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2k}{E} \right)^{-1} \delta(k - \sqrt{E^2 - M^2}) \\ &= \frac{1}{256\pi^2} \frac{\sqrt{E^2 - M^2}}{E^3} d\Omega \\ &= \frac{1}{256\pi^2} \frac{1}{E^2} \sqrt{1 - \frac{M^2}{E^2}} d\Omega. \end{aligned} \quad (9.46)$$

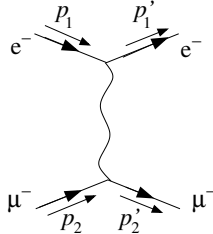
Enfin, selon éqs. (7.21), (9.43) et (9.46),

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16 E^2} \sqrt{1 - \frac{M^2}{E^2}} \left(\left(1 + \frac{M^2}{E^2} \right) + \left(1 - \frac{M^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right)} \quad (9.47)$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$. La section efficace totale est donnée par

$$\boxed{\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi \alpha^2}{3E^2} \sqrt{1 - \frac{M^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{E^2} \right)}. \quad (9.48)$$

La diffusion $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ (diffusion de Coulomb)



Même diagramme après une rotation par $90^\circ \Rightarrow$ même résultat pour $\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2$ si on remplace $p_2 \leftrightarrow -p'_1$:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = \frac{8 e^4}{(p_1 - p'_1)^4} \left((p_1 p_2)(p'_1 p'_2) + (p_1 p'_2)(p_2 p'_1) - M^2 p_1 p'_1 \right). \quad (9.49)$$

Exemple de *symétrie de croisement* des amplitudes :

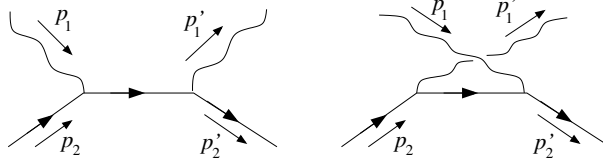
$$\mathcal{M}_{\text{fi}}(\phi(p) + \dots \rightarrow \dots) = \mathcal{M}_{\text{fi}}(\dots \rightarrow \dots + \bar{\phi}(-p)) \quad (9.50)$$

avec $\bar{\phi}$ = antiparticule de ϕ .

Cinématique \rightarrow exercices.

La diffusion de Compton $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$

Deux diagrammes :



Sans écrire explicitement les indices de spin :

$$\begin{aligned} i \mathcal{M}_{\text{fi}} &= \bar{u}(p_2')(-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(p_1') \frac{i(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(p_1)u(p_2) \\ &\quad + \bar{u}(p_2')(-ie\gamma^\nu)\varepsilon_\nu(p_1) \frac{i(\not{p}_2 - \not{p}_1' + m)}{(p_2 - p_1')^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu)\varepsilon_\mu^*(p_1')u(p_2) \\ &= -ie^2\varepsilon_\mu^*(p_1')\varepsilon_\nu(p_1)\bar{u}(p_2') \left(\frac{\gamma^\mu(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)\gamma^\nu}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\not{p}_2 - \not{p}_1' + m)\gamma^\mu}{(p_2 - p_1')^2 - m^2} \right) u(p_2) \quad (9.51) \\ &= -ie^2\varepsilon_\mu^*(p_1')\varepsilon_\nu(p_1)\bar{u}(p_2') \left(\frac{\gamma^\mu(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)\gamma^\nu}{2p_1p_2} - \frac{\gamma^\nu(\not{p}_2 - \not{p}_1' + m)\gamma^\mu}{2p_2p_1'} \right) u(p_2) \\ &= -ie^2\varepsilon_\mu^*(p_1')\varepsilon_\nu(p_1)\bar{u}(p_2') \left(\frac{\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p_2^\nu}{2p_1p_2} + \frac{\gamma^\nu\not{p}_1'\gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_2^\mu}{2p_2p_1'} \right) u(p_2). \end{aligned}$$

Pour la troisième égalité on a utilisé $p_1^2 = p_1'^2 = 0$ et $p_2^2 = m^2$. Pour la quatrième égalité on a utilisé l'algèbre de Clifford et $(\not{p}_2 - m)u(p_2) = 0$.

Pour calculer la section efficace non polarisée on prend la somme sur les spins et polarisations dans l'état final et la moyenne sur ceux dans l'état initial. Pour la somme des polarisations des photons on va se servir de l'*identité de Ward* :

Si \mathcal{M}_{fi} est une amplitude avec un photon extérieur d'impulsion p qui peut donc s'écrire $\mathcal{M}_{\text{fi}} = \mathcal{M}^\mu(p)\varepsilon_\mu^*(p)$, alors $\mathcal{M}^\mu(p)p_\mu = 0$.

Preuve \rightarrow exercices. L'identité de Ward est une manifestation de l'invariance de jauge des amplitudes.

On en déduit

$$\sum_{\text{polarisations}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = -g_{\mu\nu}\mathcal{M}^\mu(p)\mathcal{M}^{*\nu}(p) \quad (9.52)$$

Preuve : on choisit un référentiel avec \vec{p} en direction des z , $(p^\mu) = (p, 0, 0, p)$. Puisque la polarisation du photon est transverse, elle est donnée par une combinaison linéaire de $(\varepsilon_1^\mu) = (0, 1, 0, 0)$ et $(\varepsilon_2^\mu) = (0, 0, 1, 0)$, et

$$\begin{aligned} \sum_\varepsilon |\varepsilon_\mu^*(p)\mathcal{M}^\mu(p)|^2 &= |\mathcal{M}^1(p)|^2 + |\mathcal{M}^2(p)|^2 \\ &= |\mathcal{M}^1(p)|^2 + |\mathcal{M}^2(p)|^2 + \underbrace{|\mathcal{M}^3(p)|^2 - |\mathcal{M}^0(p)|^2}_{0 \text{ selon l'identité de Ward}} = -g_{\mu\nu}\mathcal{M}^\mu(p)\mathcal{M}^{*\nu}(p). \end{aligned} \quad (9.53)$$

(On note que l'identité de Ward dans ce référentiel est $p\mathcal{M}^0(p) - p\mathcal{M}^3(p) = 0$.)

Conclusion : pour la diffusion de Compton,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\substack{\text{spins,} \\ \text{polarisations}}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \text{tr} \left((\not{p}'_2 + m) \left(\frac{\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p_2^\nu}{2p_1 p_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}'_1 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_2^\mu}{2p_2 p'_1} \right) \right. \\
&\quad \left. (\not{p}_2 + m) \left(\frac{\gamma^\sigma \not{p}'_1 \gamma^\rho + 2\gamma^\sigma p_2^\rho}{2p_1 p_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}'_1 \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho p_2^\sigma}{2p_2 p'_1} \right) \right) \\
&= 4e^4 \left(\frac{4m^4 - 2m^2 p_2 p'_2 + 4m^2 p_1 p_2 - 2m^2 p_1 p'_2 + 2(p_1 p_2)(p'_1 p'_2)}{(2p_1 p_2)^2} \right. \\
&\quad + \frac{4m^4 - 2m^2 p_2 p'_2 - 4m^2 p'_1 p_2 + 2m^2 p'_1 p'_2 + 2(p'_1 p_2)(p_1 p'_2)}{(2p'_1 p_2)^2} \\
&\quad \left. - \frac{4m^4 + 2m^2 p_1 p_2 + 2m^2 p'_1 p_2}{(2p_1 p_2)(2p_2 p'_1)} \right). \tag{9.54}
\end{aligned}$$

La deuxième égalité suit d'un long calcul où on utilise les identités pour les matrices de Dirac de façon répétée. Enfin si on pose $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$ on obtient

$$\frac{1}{4} \sum_{\substack{\text{spins,} \\ \text{polarisations}}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = 2e^4 \left(\frac{p_2 p'_1}{p_2 p_1} + \frac{p_2 p_1}{p_2 p'_1} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p'_1 p_2} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p'_1 p_2} \right)^2 \right). \tag{9.55}$$

Exercices → *formule de Klein-Nishina* pour la section efficace,

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right), \tag{9.56}$$

avec ω et ω' les énergies des photons et θ l'angle entre eux.

L'annihilation électron-positron : $e^- e^+ \rightarrow \gamma\gamma$

Liée à la diffusion de compton par symétrie de croisement (on remplace $p_1 \leftrightarrow -p'_2$) :

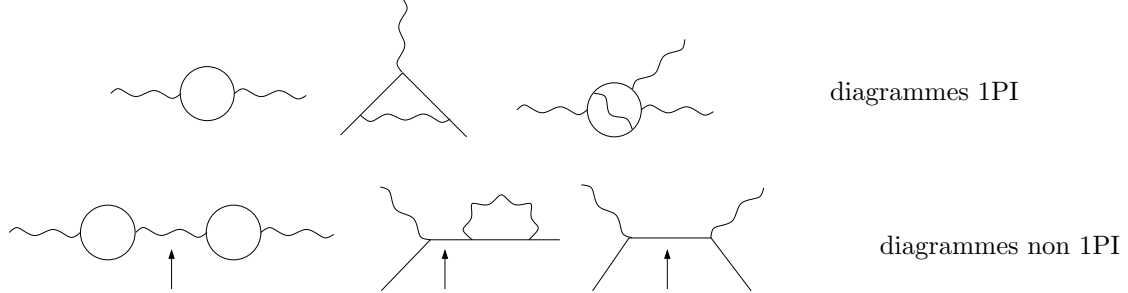
$$\frac{1}{4} \sum_{\substack{\text{spins,} \\ \text{polarisations}}} |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 = -2e^4 \left(\frac{p_2 p'_1}{p_2 p_2} + \frac{p_2 p'_2}{p_2 p'_1} + 2m^2 \left(\frac{1}{p'_2 p_2} + \frac{1}{p'_1 p_2} \right) - m^4 \left(\frac{1}{p_2 p'_2} + \frac{1}{p'_1 p_2} \right)^2 \right). \tag{9.57}$$

Cinématique : voir p.ex. le livre de Peskin/Schroeder.

9.4 L'électrodynamique quantique à une boucle

Définition : un diagramme de Feynman connexe est *irréductible à une particule* (1PI, "1-particle irreducible") \Leftrightarrow : le diagramme reste connexe si on coupe un des propagateurs internes.

Exemples :



(les flèches indiquent où on peut couper en deux).

Le degré de divergence superficiel

Expression algébrique pour un diagramme typique en QED :

$$(\text{diagramme}) \propto \int \frac{d^4 p_1 \dots d^4 p_n}{(\not{p}_1 - m) \dots (\not{p}_j - m) p_{j+1}^2 \dots p_n^2}.$$

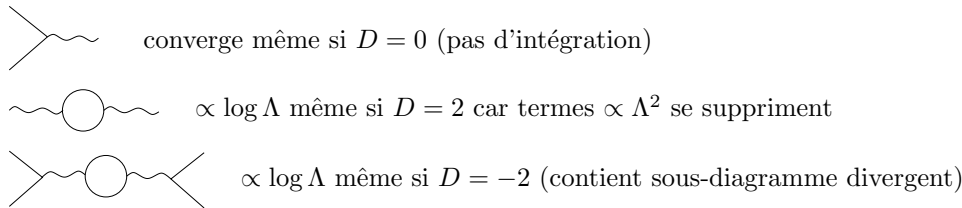
On appelle D le *degré de divergence superficiel* = (la puissance des p au numérateur) - (la puissance des p au dénominateur),

$$D = 4L - P_e - 2P_\gamma \quad (9.58)$$

avec L = nombre de boucles (chacune contribuant $d^4 p_i$), P_e = nombre de propagateurs d'électron (chacun contribuant $\frac{1}{\not{p}_j - m}$), P_γ = nombre de propagateurs de photon (chacun contribuant $\frac{1}{p_k^2}$).
Première estimation du comportement UV si on intègre les impulsions jusqu'à $|p| = \Lambda$ avec $\Lambda \rightarrow \infty$:

- $D = 0$: divergence *logarithmique* $\propto \int^\Lambda \frac{dp}{p} \propto \log \Lambda$
- $D > 0$: divergence de *puissance* $\propto \int^\Lambda p^{D-1} dp \propto \Lambda^D$
- $D < 0$: *convergence* $\propto \int^\Lambda \frac{dp}{p^{1-D}}$

Cette estimation peut être *erronée*. Contrexemples typiques :



Les divergences des *diagrammes réductibles* ont toujours leur origine dans ses *sous-diagrammes* 1PI \Rightarrow on étudiera les divergences des diagrammes 1PI.

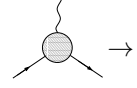
En QED, on a pour chaque diagramme

$$\begin{aligned} L &= P_e + P_\gamma - V + 1 \\ V &= 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e) \end{aligned} \quad (9.59)$$

avec $L, P_{e,\gamma}, V, N_{e,\gamma}$ = le nombre des boucles, des propagateurs d'électron/photon, des vertex, des électrons/photons externes. Donc

$$D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e \quad (9.60)$$

IV. pour l'énergie du photon $\rightarrow 0$ et les deux fermions sur couche de masse, $-ie\gamma^\mu$ (ce qui fixe la charge de l'électron = e).



Cette dernière condition est un peu subtile à cause d'une complication que l'on trouve dans des théories avec des particules sans masse : lorsque les impulsions des photons extérieurs se rapprochent à 0 on tombe sur des *divergences infrarouges*. Une définition judicieuse des observables physiques permet de s'en débarrasser. Ici on ne les discutera pas mais on les régularisera avec une masse fictive $\mu \neq 0$ pour le photon ; à la fin du calcul on posera $\mu = 0$.

Propagateur de l'électron

On définit la *auto-énergie* de l'électron $-i\Sigma(\not{p}) = -\text{1PI}$ (la somme des tous diagrammes 1PI avec un électron entrant et un électron sortant, sans compter les propagateurs de Dirac externes). La fonction à deux points exacte est alors

$$\begin{aligned}
 \text{---} \text{---} \text{---} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \\
 &\quad + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)^n \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \left(1 - \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)^{-1} \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p}) + i\epsilon}
 \end{aligned} \tag{9.69}$$

On vérifie facilement que :

$$(\text{Condition de renormalisation I.}) \Leftrightarrow \Sigma(\not{p})|_{\not{p}=m} = 0 \tag{9.70}$$

$$(\text{Condition de renormalisation II.}) \Leftrightarrow \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} = 0 \tag{9.71}$$

Calcul de $-i\Sigma(\not{p})$ au premier ordre : au niveau d'une boucle il n'y a que deux diagrammes,

$$-i\Sigma(\not{p}) = \underbrace{\text{---} \text{---} \text{---}}_{\equiv I} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (\text{diagrammes amputés}) \tag{9.72}$$

Selon les règles de Feynman, avec une masse fictive μ pour le photon :

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) \frac{-i g_{\mu\nu}}{(q-p)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\
 &= -e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu + \gamma^\mu \gamma_\mu m}{(q^2 - m^2)((q-p)^2 - \mu^2)} \\
 &= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu + \gamma^\mu \gamma_\mu m}{(q^2 - 2pqx + x^2 p^2 - x^2 p^2 + xp^2 - (1-x)m^2 - x\mu^2)^2} \\
 &= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu (\ell^\nu + xp^\nu) + \gamma^\mu \gamma_\mu m}{(\ell^2 - \Delta^2)^2} \\
 &= -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \gamma_\mu m + xp^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu}{(\ell^2 - \Delta^2)^2} .
 \end{aligned} \tag{9.73}$$

On a utilisé l'astuce de Feynman pour combiner les dénominateurs, changé la variable d'intégration $q \rightarrow \ell = q - px$, introduit $\Delta^2 = x(x-1)p^2 + (1-x)m^2 + x\mu^2$ et utilisé que $\int d^4\ell \ell^\mu f(\ell^2) = 0$ (invariance de Lorentz). Le résultat diverge dans l'ultraviolet, il faut alors *régulariser* et *renormaliser*.

Comme dans la section 6.3 on va utiliser la *régularisation dimensionnelle* : la dimension d'espace-temps sera $d = 4 - 2\epsilon$ et

$$I \rightarrow -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu \gamma_\mu m + xp^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu}{(\ell^2 - \Delta^2)^2}. \quad (9.74)$$

Dans $d = 4 - 2\epsilon$ dimensions les identités pour les matrices γ sont modifiées car $\delta^\mu_\mu = d$:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \quad (d = 4), \quad \gamma^\mu \gamma_\mu = 4 - 2\epsilon \quad (d = 4 - 2\epsilon) \quad (9.75)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = -2\gamma_\nu \quad (d = 4), \quad \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = (2\epsilon - 2)\gamma_\nu \quad (d = 4 - 2\epsilon) \quad (9.76)$$

Alors

$$I = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{(4 - 2\epsilon)m + (2\epsilon - 2)x\cancel{p}}{(\ell^2 - \Delta^2)^2}. \quad (9.77)$$

On va appliquer la *formule universelle pour l'évaluation des intégrales à une boucle en régularisation dimensionnelle*, généralisation d'éq. (6.38) qui prend déjà en compte la rotation de Wick :

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^\beta}{(q^2 - \Delta^2)^\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} i (4\pi)^{-\frac{d}{2}} (\Delta^2)^{\beta-\alpha+\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\beta + \frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - \beta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\alpha)}. \quad (9.78)$$

$$\Rightarrow I = -\frac{ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left((4 - 2\epsilon)m - 2(1 - \epsilon)x\cancel{p} \right) (4\pi)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^\epsilon. \quad (9.79)$$

Avec éq. (A.11) et $A^\epsilon = 1 + \epsilon \log A + \mathcal{O}(\epsilon^2)$:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{ie^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left((4 - 2\epsilon)m - (2 - 2\epsilon)x\cancel{p} \right) (1 + \epsilon \log(4\pi)) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \right) (1 - \epsilon \log \Delta^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\frac{ie^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} (4m - \cancel{p}) + \cancel{p} - 2m + 2 \int_0^1 dx (x\cancel{p} - 2m) \log \Delta^2(x, \cancel{p}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (9.80)$$

où $\frac{1}{\epsilon} \equiv \frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E$.

On impose la condition de renormalisation II., éq. (9.71) :

$$0 = -i \frac{d}{d\cancel{p}} \Sigma(\cancel{p}) \Big|_{\cancel{p}=m} = \frac{d}{d\cancel{p}} (I + i(\cancel{p}\delta_2 - \delta_m)) \Big|_{\cancel{p}=m} = \frac{dI}{d\cancel{p}} \Big|_{\cancel{p}=m} + i\delta_2 \quad (9.81)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\cancel{p}} \Big|_{\cancel{p}=m} &= \frac{ie^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 - 2 \int_0^1 dx \left(x \log \Delta^2 + (x\cancel{p} - 2m) \frac{d}{d\cancel{p}} \log \Delta^2 \right) \right) \Big|_{\cancel{p}=m} \\ &= \frac{ie^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 - 2 \int_0^1 dx \left(x \log \left((x-1)^2 m^2 + x\mu^2 \right) + 2 \frac{x(x-1)(x-2)m^2}{(x-1)^2 m^2 + x\mu^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.82)$$

Donc le contre-terme δ_2 est donné par

$$\delta_2 = -\frac{e^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 - 2 \int_0^1 dx \left(x \log \left((x-1)^2 m^2 + x\mu^2 \right) + 2 \frac{x(x-1)(x-2)m^2}{(x-1)^2 m^2 + x\mu^2} \right) \right), \quad (9.83)$$

ou en retenant seulement les parties non nulles lorsque $\mu \rightarrow 0$

$$\delta_2 = -\frac{e^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + 2 \log \mu^2 - 3 \log m^2 + 4 \right). \quad (9.84)$$

On a défini $\ell = q + px$ et $\Delta^2 = x(x-1)p^2 + m^2$. Le (-1) de la première ligne vient de la boucle fermionique. En $d = 4 - 2\epsilon$ dimensions, grâce à l'invariance de Lorentz on peut remplacer, sous l'intégrale $\int d^d\ell$,

$$\ell_\kappa \ell_\lambda \rightarrow \frac{\ell^2 g_{\kappa\lambda}}{d} = \frac{\ell^2 g_{\kappa\lambda}}{4 - 2\epsilon} \quad (9.93)$$

donc

$$\text{Diagram} = 4 e^2 \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \left(\frac{1 - \epsilon}{2 - \epsilon} \frac{\ell^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2 - \Delta^2)^2} + \frac{x(1-x)(2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - m^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2 - \Delta^2)^2} \right). \quad (9.94)$$

L'intégrale du premier terme est, selon éq. (9.78),

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1 - \epsilon}{2 - \epsilon} \frac{\ell^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2 - \Delta^2)^2} \\ &= -\frac{i}{16\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \Delta^2 (1 + \epsilon \log 4\pi) (1 - \epsilon \log \Delta^2) \frac{\Gamma(3 - \epsilon)\Gamma(-1 + \epsilon)}{\Gamma(2 - \epsilon)} \frac{1 - \epsilon}{2 - \epsilon} \\ &= -\frac{i}{16\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \Delta^2 (1 + \epsilon \log 4\pi) (1 - \epsilon \log \Delta^2) \Gamma(-1 + \epsilon)(1 - \epsilon) \\ &= \frac{i}{16\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \Delta^2 (1 + \epsilon \log 4\pi) (1 - \epsilon \log \Delta^2) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 \right) (1 - \epsilon) \\ &= \frac{i}{16\pi^2} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \Delta^2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \log \Delta^2 \right) \\ &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx (x(1-x)p^2 g^{\mu\nu} - m^2 g^{\mu\nu}) \left(\frac{1}{\epsilon} - \log \Delta^2 \right) \end{aligned} \quad (9.95)$$

où on a utilisé éqs. (A.8) et (A.12), et toujours $\frac{1}{\epsilon} \equiv \frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E$. L'intégrale du deuxième terme dans éq. (9.94) est, selon éq. (9.78),

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)(2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - m^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2 - \Delta^2)^2} \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx (1 + \epsilon \log 4\pi) (1 - \epsilon \log \Delta^2) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \right) (x(1-x)(2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - m^2 g^{\mu\nu}) \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx (x(1-x)(2p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) - m^2 g^{\mu\nu}) \left(\frac{1}{\epsilon} - \log \Delta^2 \right). \end{aligned} \quad (9.96)$$

Dans la somme des intégrales (9.95) et (9.96), les termes qui ne sont pas proportionnels à $(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$ se suppriment et éq. (9.94) devient

$$\text{Diagram} = i(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \widehat{\Pi}(p^2) \quad (9.97)$$

où

$$\widehat{\Pi}(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \left(\frac{1}{6} \frac{1}{\epsilon} - \int_0^1 dx x(1-x) \log \Delta^2 \right). \quad (9.98)$$


On impose la condition de renormalisation III. qui implique

$$\delta_3 = \widehat{\Pi}(0) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \left(\frac{1}{6} \frac{1}{\epsilon} - \int_0^1 dx x(1-x) \log m^2 \right) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \log m^2 \right). \quad (9.99)$$

Tout ensemble, on a trouvé l'auto-énergie du photon à une boucle

$$\boxed{\Pi(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(x-1) \log \frac{x(x-1)p^2 + m^2}{m^2}}. \quad (9.100)$$

Remarques :

- Des divergences “quadratiques” (\Rightarrow renormalisation de masse pour le photon, brisure d’invariance de jauge) sont absentes grace à l’identité de Ward mais cela *n’est pas garanti* indépendamment du schéma de régularisation.¹ On a *choisi* la régularisation dimensionnelle qui preserve l’invariance de jauge / l’identité de Ward.
- Le logarithme en tant que fonction complexe a une *coupure* à $x(x-1)p^2 + m^2 = 0$ qui commence à $p^2 = 4m^2$, car $x(x-1) \geq \frac{1}{4}$ si $x \in [0, 1]$. Interprétation : seuil cinématique pour production d’un pair électron-positron réel. A partir de cette énergie, les fermions dans la boucle de  peuvent devenir réels.
- On peut utiliser éq. (9.100) pour calculer le *potentiel électrostatique* dans la limite non relativiste :

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right) \quad (9.101)$$

Premier terme = terme de Coulomb. Correction : à courtes distances (\lesssim longueur d’onde de Compton de l’électron) la force électromagnétique devient *plus forte*. Intuitivement : “polarisation du vide” par les paires virtuels de $e^+ e^-$ à longue distance. Un électron suffisamment énergétique peut pénétrer le “nuage d’électrons virtuels”.

Vertex

Pour renormaliser le vertex on définit

$$\begin{array}{c} \mu \\ \downarrow q = p' - p \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \uparrow p \quad \downarrow p' \end{array} \equiv -ie\Gamma^\mu(p, p') \quad (9.102)$$

avec e = charge physique de l’électron. Formulation précise de la condition de renormalisation IV. : on met les électrons externes sur couche de masse, $p^2 = p'^2 = m^2$, et on demande pour $q \rightarrow 0$ que

$$\bar{u}_s(\vec{p}')\Gamma^\mu(p, p')u_r(\vec{p}) \Big|_{p^2=p'^2=m^2, q=0} = \bar{u}_s(\vec{0})\gamma^\mu u_r(\vec{0}) \quad (9.103)$$

(Avec cette définition on obtient la loi de Coulomb habituelle comme cas limite de la diffusion de Coulomb à basse énergie, voir chap. 9.3.)

Décomposition de la structure tensorielle avec les électrons (pas le photon) sur couche de masse :

$$\Gamma^\mu(p, p') \Big|_{p^2=p'^2=m^2} = \gamma^\mu A(q^2) + (p^\mu + p'^\mu) B(q^2) + q^\mu C(q^2) \quad (9.104)$$

avec A, B, C des fonctions scalaires. Selon l’identité de Ward,

$$q_\mu \bar{u}(\vec{p}')\Gamma^\mu(p, p')u(\vec{p}) \Big|_{p^2=p'^2=m^2} = 0 \quad (9.105)$$

et alors

$$0 = (\bar{u}(\vec{p}')\not{q}u(\vec{p})A + (p'^2 - p^2)B\bar{u}(\vec{p}')u(\vec{p}) + q^2 C\bar{u}(\vec{p}')u(\vec{p})) \Big|_{p^2=p'^2=m^2} \quad (9.106)$$

Le premier terme du membre de droite d’éq. (9.106) s’annule car

$$\bar{u}(\vec{p}')\not{q}u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}')(\not{p}' - \not{p})u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}')(\not{p}' - m - (\not{p} - m))u(\vec{p}) = 0. \quad (9.107)$$

Le deuxième terme du membre de droite d’éq. (9.106) s’annule car $p^2 = m^2 = p'^2$. Conclusion : pour vérifier éq. (9.105) il faut que

$$C(q^2) = 0 \quad (9.108)$$

1. Plus précisément : Il n’y a jamais de divergence quadratique en régularisation dimensionnelle, mais a priori il aurait pu y avoir une divergence $\propto g^{\mu\nu}$ venant de l’intégrale (9.95) sans un terme $\propto p^\mu p^\nu$ correspondant. Le fait que la régularisation respecte l’identité de Ward garantie que ce n’est pas le cas.

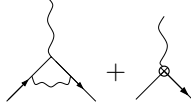
mais les deux fonctions $A(q^2)$ et $B(q^2)$ restent à déterminer. Il est pratique courante d'employer deux autres fonctions équivalentes F_1 et F_2 qui sont liées à A et B par l'*identité de Gordon* (\rightarrow ex.)

$$\bar{u}(\vec{p}')\gamma^\mu u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}') \left(\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\gamma^{\mu\nu}q_\nu}{m} \right) u(\vec{p}) \quad (9.109)$$

tel que

$$\Gamma^\mu(p, p') \Big|_{p^2=p'^2=m^2} = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\gamma^{\mu\nu}q_\nu}{m} F_2(q^2). \quad (9.110)$$

Les $F_{1,2}$ s'appellent *facteurs de forme*. Au niveau de l'arbre on a $F_1 = 1$ et $F_2 = 0$.

Au niveau d'une boucle : calculer  , régulariser, renormaliser.

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\rho) \\ &= -e^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (9.111)$$

Astuce de Feynman pour combiner 3 dénominateurs :

$$\frac{1}{((k-p)^2)(k'^2 - m^2)(k^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{2}{D^3} \quad (9.112)$$

avec

$$D = x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k-p)^2 \equiv \ell^2 - \Delta^2, \quad \ell = k + yq - zp, \quad \Delta^2 = -xyq^2 + (1-z)^2 m^2. \quad (9.113)$$

On transforme également le numérateur :

$$\begin{aligned} &\gamma^\nu(\not{k} + \not{q} + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu \\ &= \gamma^\nu(\not{\ell} - y\not{q} + z\not{p} + \not{q} + m)\gamma^\mu(\not{\ell} - y\not{q} + z\not{p} + m)\gamma_\nu \\ &= \gamma^\nu(\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell}\gamma_\nu + \gamma^\nu(\not{q} - y\not{q} + z\not{p} + m)\gamma^\mu(-y\not{q} + z\not{p} + m)\gamma_\nu + \underbrace{\text{(termes linéaires en } \ell)}_{0 \text{ sous l'intégrale}} \end{aligned} \quad (9.114)$$

Tout ensemble :

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= -e^3 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int dx dy dz \delta(1-x-y-z) \\ &\quad \left(\underbrace{\frac{2\gamma^\nu\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell}\gamma_\nu}{(\ell^2 - \Delta^2)^3}}_{\text{divergent}} + \underbrace{\frac{2\gamma^\nu(\not{q} - y\not{q} + z\not{p} + m)\gamma^\mu(-y\not{q} + z\not{p} + m)\gamma_\nu}{(\ell^2 - \Delta^2)^3}}_{\text{convergent dans l'UV}} \right). \end{aligned} \quad (9.115)$$

La partie divergente donne lieu à la renormalisation du vertex en QED. Divergences UV et IR : introduire masse du photon μ , évaluer en régularisation dimensionnelle, appliquer condition de renormalisation IV. pour déterminer contre-terme $\delta_1 \dots$

- Résultat final :

$$\delta_1 = \delta_2. \quad (9.116)$$

- Significance de ce résultat : $Z_1 = Z_2$. Dans le lagrangien éq, (9.65)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3 F_{r\mu\nu} F_r^{\mu\nu} + Z_2 \bar{\psi}_r (i \not{\partial} - m_0) \psi_r - e Z_1 \bar{\psi}_r \gamma^\mu \psi_r A_{r\mu} \quad (9.117)$$

les termes $\not{\partial}$ et ieA forment la dérivée covariante \not{D} après corrections radiatives :
L'invariance de jauge est préservée.

Le facteur de forme F_2 peut s'extraire de la partie finie :

$$F_2(q^2) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy}. \quad (9.118)$$

Evaluation à $q^2 = 0$:

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{(1-z)} \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \\ &= 0.0011614. \end{aligned} \quad (9.119)$$

Cette quantité correspond à une contribution d'ordre supérieur au *moment magnétique de l'électron*. En fait, pour le lagrangien effectif au premier ordre en dérivées

$$\mathcal{L} = e F_1(0) \bar{\psi} A \psi + \frac{e}{2m} F_2(0) F_{\mu\nu} \bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \psi + \dots \quad (9.120)$$

et un champ externe classique $F_{\mu\nu}$ dérivé du potentiel $A = (0, 0, Bx, 0)$ (alors $F_{12} = -F_{21} = B$, toutes autres composantes 0 \rightarrow champ magnétique en direction des z) on trouve le hamiltonien d'interaction

$$H_I = -eB \int d^3x \bar{\psi} \left(x\gamma^2 + \frac{\alpha}{2\pi m} \gamma^{12} \right) \psi + \dots \quad (9.121)$$

Le premier terme correspond au couplage du spin \vec{S} de l'électron au champ magnétique de la mécanique quantique. Il donne un moment magnétique $\vec{\mu} = g \frac{e}{2m} \vec{S}$ avec $g = 2$. Cette valeur de g reçoit une correction de $F_2(0)$ par le deuxième terme. La valeur expérimentelle est en fait

$$g = 2.0011597 \quad (9.122)$$

en bon accord avec notre calcul (on s'attendait un écart de l'ordre $\alpha^2 \approx 10^{-4}$, correspondant aux termes d'ordre supérieur en théorie des perturbations).

Les calculs les plus récents de $g-2$ prennent en compte des corrections à 5 boucles, $\mathcal{O}(10\,000)$ diagrammes de Feynman, et incluent aussi des corrections des autres particules du modèle standard. Parce qu'il est également possible de mesurer $g-2$ à une très grande précision, cette observable est idéale pour comparer théorie et expérience. La conclusion de ces expériences (ainsi que de nombreuses autres) est que, jusqu'à ce jour :

La TQC fonctionne.

Annexe A

Annexe mathématique

A.1 Le théorème des résidus

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $\{a_1 \dots a_n\} \subset D$ un ensemble fini de points, $f : D \setminus \{a_1 \dots a_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, et γ un lacet dans $D \setminus \{a_1 \dots a_n\}$. Alors

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n I(\gamma, a_k) \text{res}(f, a_k). \quad (\text{A.1})$$

Ici $I(\gamma, a_k)$ est l'indice du lacet γ par rapport à a_k (le nombre de tours de γ autour le point a_k dans le sens de rotation mathématique) et $\text{res}(f, a_k)$ est le résidu de f en a_k , défini comme (-1) -ème coefficient de la série de Laurent autour de a_k :

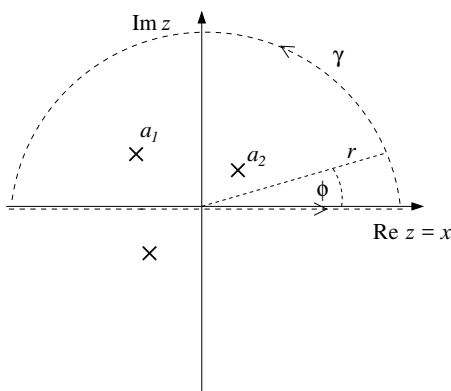
$$f(a_k + z) = \dots + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{\text{res}(f, a_k)}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (\text{A.2})$$

Calcul des intégrales impropres avec le théorème des résidus : on cherche

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (\text{A.3})$$

Si f permet un prolongement méromorphe au plan complexe, et si $\lim_{r \rightarrow \infty} f(re^{i\phi}) = 0$ pour $\phi \in [0, \pi]$ avec une décroissance suffisamment rapide, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{pôles } a_k : \text{Im } a_k > 0} \text{res}(f, a_k). \quad (\text{A.4})$$



Similairement : Si $\lim_{r \rightarrow \infty} f(re^{-i\phi}) = 0$ pour $\phi \in [0, \pi]$ (suffisamment vite), alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{pôles } a_k : \text{Im } a_k < 0} \text{res}(f, a_k). \quad (\text{A.5})$$

On compte toujours la somme de tous les pôles à l'intérieur de la courbe d'intégration — pour ceux à l'extérieur, $I(\gamma, a_k) = 0$.

Exemple : pour calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

on note que $(1+z^2)^2 = (i-z)^2(-i-z)^2$, alors la fonction $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ a un double pôle à $z = i$. On trouve $f(i+z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4i}\frac{1}{z} + \mathcal{O}(z^0)$, alors $\text{res}(f, i) = \frac{1}{4i}$. De plus, $|f(re^{i\phi})|$ tend vers 0 comme $1/r^4$ lorsque $r \rightarrow \infty$, donc l'intégrale de $f(z)$ sur l'arc à rayon r tend vers 0 également. Le théorème des résidus donne enfin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \text{res}(f, i) = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

La *fonction Gamma d'Euler* $\Gamma(z)$ est une fonction méromorphe (holomorphe sauf pour un ensemble de pôles isolés) sur \mathbb{C} . Elle est la généralisation continue de la factorielle, $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Sa restriction sur \mathbb{R}_+^* est donnée par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.7})$$

Après intégration par parties on obtient l'équation fonctionnelle fondamentale

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (\text{A.8})$$

Une représentation alternative, valable sur tout $\mathbb{C} \setminus (\text{entiers non-positifs})$, est le produit infini

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma_E z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \quad (\text{A.9})$$

avec $\gamma_E = 0.577\dots$ la *constante d'Euler-Mascheroni*. $\Gamma(z)$ a des *pôles simples* à $z \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ et est holomorphe ailleurs. Proche des pôles son développement de Laurent est donné par

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{A.10})$$

alors le résidu à $z = -n$ est $(-1)^n/n!$. En particulier, on a

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{A.11})$$

et

$$\Gamma(-1 + \epsilon) = - \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{A.12})$$

La *fonction Bêta d'Euler* $B(x, y)$ est définie par

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (\text{A.13})$$

Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ elle peut être représentée par l'intégrale

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (\text{A.14})$$

Enfin on note la relation entre la fonction Gamma et le volume de la sphère unité S^{n-1} en n dimensions $\int d\Omega_n$: On a

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^n &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \right)^n = \int d^n x e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} = \int d\Omega_n \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr \\ &= \left(\int d\Omega_n \right) \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (r^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-r^2} d(r^2) = \left(\int d\Omega_n \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

et donc

$$\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (\text{A.16})$$

A.3 Fonctionnelles

Cette section sera moins rigoureuse car on ne va pas préciser les prérequis pour les espaces de fonctions sur lesquels nos affirmations sont valables. On regarde alors un certain sous-ensemble T de l'espace $C^0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues réelles sur \mathbb{R}^n . Cet espace T , dit l'espace des "fonctions test", contiendra au moins les fonctions C^∞ à support compact (non nulles seulement sur un ensemble borné et infiniment dérivables). Souvent on aimerait inclure toutes les fonctions lisses qui tendent vers 0 exponentiellement à l'infini (permettant d'intégrer par parties la fonction et toutes ses dérivées sans terme de surface). La précise formulation des critères sur T pour pouvoir bien définir toutes les notions que l'on va seulement esquisser ici est le sujet de l'analyse fonctionnelle.

On peut généraliser tout ce qui suit pour des fonctions et fonctionnelles complexes sans problème.

Définitions : Une *fonctionnelle réelle* est une application $F : T \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto F[f]$. Une fonctionnelle est *linéaire* si $F[f + \lambda g] = F[f] + \lambda F[g]$ pour toutes fonctions f, g et tout scalaire λ . Elle est *continue* si pour toute suite convergente de fonctions $f_n \rightarrow f$ on a $F[f_n] \rightarrow F[f]$. Une fonctionnelle linéaire et continue s'appelle aussi une *distribution*.

Exemples :

1. Une fonction $g \in T$ peut elle-même être interprétée comme fonctionnelle linéaire par le *produit scalaire* (de L^2) sur T :

$$g[f] = g \cdot f = \int d^n x g(x) f(x).$$

2. L'application qui associe $f \mapsto f(0)$ est une distribution désignée par $\delta[f]$. On la représente souvent par une notation intégrale :

$$\delta[f] = \int d^n x \delta^{(n)}(x) f(x)$$

mais la "fonction delta de Dirac dans n dimensions" $\delta^{(n)}(x)$ qui figure ici n'est pas en fait une fonction, sa valeur en 0 n'étant pas définie.

3. Soit \mathcal{L} une fonction analytique en plusieurs variables et $x \in \mathbb{R}^n$ fixe. Alors

$$\mathcal{L}_x[f] = \mathcal{L}(x, f(x), \partial_\mu f(x), \partial_\mu \partial_\nu f(x), \dots)$$

définit une fonctionnelle (généralement non linéaire). On appelle *locale* une fonctionnelle F qui peut être représentée comme une intégrale d'un tel \mathcal{L}_x :

$$F[f] = \int d^n x \mathcal{L}_x[f]. \quad (\text{A.17})$$

Définition : Soit F une fonctionnelle. La *dérivée fonctionnelle* $\frac{\delta F}{\delta f}$ est une fonctionnelle linéaire avec la propriété

$$F[f + h] = F[f] + \frac{\delta F}{\delta f}[h] + \mathcal{O}(\|h\|^2). \quad (\text{A.18})$$

On supposera que $\frac{\delta F}{\delta f}$ existe et soit unique où on en a besoin, sans en discuter les conditions.

Observations :

- Si F est une fonctionnelle linéaire, on a

$$F[f + h] = F[f] + F[h] \quad (\text{A.19})$$

et alors

$$\frac{\delta F}{\delta f} = F. \quad (\text{A.20})$$

En particulier,

$$\frac{\delta \delta[f]}{\delta f}[h] = \delta[h] = h(0). \quad (\text{A.21})$$

- Si F est une fonctionnelle locale donnée dans la forme d'éq. (A.17), un développement limité donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x[f + h] &= \mathcal{L}(x, f(x) + h(x), \partial_\mu f(x) + \partial_\mu h(x), \partial_\mu \partial_\nu f(x) + \partial_\mu \partial_\nu h(x), \dots) \\ &= \mathcal{L}_x[f] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} h(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu f)} \partial_\mu h(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu f)} \partial_\mu \partial_\nu h(x) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Par conséquent, après intégration par parties,

$$\frac{\delta F}{\delta f}[h] = \int d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}(x) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu f)}(x) + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu f)}(x) - \dots \right) h(x). \quad (\text{A.23})$$

Comme dans l'exemple 1. on peut alors identifier la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta F}{\delta f}$ avec une fonction $\frac{\delta F}{\delta f}(x)$ (parfois aussi désignée $\frac{\delta F}{\delta f(x)}$) qui est donné par la dérivée d'Euler-Lagrange de \mathcal{L} . Similairement, la dérivée de la fonctionnelle δ éq. (A.21) est parfois exprimée avec l'aide de la "fonction delta" (en identifiant $\delta[f] = f(0)$) de façon suivante :

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta^{(n)}(x - y). \quad (\text{A.24})$$

Comparaison avec le cas de dimension finie : Pour les espaces vectoriels $V \simeq \mathbb{R}^n$ de dimension finie n

- les fonctionnelles correspondent aux fonctions $V \rightarrow \mathbb{R}$,
- les fonctionnelles linéaires correspondent aux *formes linéaires*,
- par le produit scalaire euclidéen on peut identifier chaque vecteur v avec une forme linéaire qui envoie $u \mapsto v \cdot u$ (et contrairement aux cas de dimension infinie, l'espace des formes linéaires sur V est ainsi isomorphe à V),
- pour un indice fixe j on peut définir une forme linéaire $\delta_j : v \rightarrow v^j$ qui est plus communément représentée par la matrice δ_i^j , en écrivant $(v^i) \rightarrow \delta_i^j v^i = v^j$,
- la dérivée fonctionnelle correspond à la dérivée ordinaire : soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$f(v + h) = f(v) + (\nabla f)(v) \cdot h + \mathcal{O}(|h|^2) \quad (\text{A.25})$$

- l'équivalent d'éq. (A.24) est

$$\frac{\partial v^i}{\partial v^j} = \delta_j^i \quad (\text{A.26})$$