Problème 7 Calculer $\int x^2 \sin x \, dx$ et $\int x^2 (\sin x)^3 dx$.

(a) Pour $\int x^2 \sin x \, dx$

On fait une intégration par parties.

$$u = x^2 \qquad u' = 2x$$
$$v' = \sin x \qquad v = -\cos x$$

alors

$$\int x^2 \sin x \, dx = x^2(-\cos x) - 2\int x \cdot (-\cos x)\, dx$$
$$= -\cos(x) \cdot x^2 + 2\int x \cos x \, dx.$$

On fait une nouvelle intégration par parties.

$$u_1 = x \qquad u_1' = 1$$
$$v_1' = \cos x \qquad v_1 = \sin x$$

D'où

$$\int x^2 \sin x = -\cos(x) \cdot x^2 + 2\left(x \sin x - \int 1 \sin x \, dx\right)$$
$$= -\cos(x) \cdot x^2 + 2x \sin x - 2(-\cos x) + C$$
$$= (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + C$$

(b) Pour $\int x^2 (\sin x)^3 dx$

On écrit $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ (voir cours).

$$(\sin x)^3 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$= -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}$$

Donc $\displaystyle\int x^2 (\sin x)^3 dx = \int x^2 \left(\frac{3\sin x}{4} - \frac{\sin 3x}{4}\right) dx$

$$= \frac{3}{4}\int x^2 \sin x \, dx - \frac{1}{4}\int x^2 \sin(3x)\, dx$$

Pour $\int x^2 \sin(x)\, dx$. c'est fait (l'intégrale précédente (a)).

Pour $\int x^2 \sin 3x \, dx$ on fait un changement de variables

$u = 3x$

$du = 3dx$

$$\int x^2 \sin 3x \, dx = \int \left(\frac{u}{3}\right)^2 \sin u \,\frac{du}{3} = \frac{1}{27}\int u^2 \sin u \, du$$

et d'après (a) $= \dfrac{1}{27}\left((2-u^2)\cos u + 2u \sin u\right)$

$$= \frac{1}{27}\left((2-9x^2)\cos 3x + 6x \sin 3x\right) + C_1$$

Finalement,

$$\int x^2 (\sin x)^3 dx = \frac{3}{4}(2-x^2)\cos x + 2x\sin x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{27}\left((2-9x^2)\cos 3x + 6x\sin(3x)\right) + C_2$$