Université de Montpellier | Année Universitaire 2023-24

Capes Interne de Mathématiques

Exemples de sujets d'arithmétique

Sujet 1 de la session 2018 :
Travail demandé : Le candidat ou la candidate choisira de présenter ce sujet au niveau collège ou au niveau lycée.
Dans le cadre d'une séance d'Accompagnement Personnalisé visant à renforcer la compétence " Raisonner ", un enseignant a préalablement sélectionné les trois énoncés fournis en annexe. Il souhaite les proposer à un petit groupe d'élèves plutôt en réussite au niveau de la maîtrise de cette compétence.
1) Présenter les différents types de raisonnement mis en jeu dans ces exercices.
2) Présenter la description d'une mise en œuvre possible de cette séance qui réponde aux objectifs fixés par l'enseignant. Préciser en particulier :
• le niveau de la classe choisi et les adaptations éventuelles des énoncés ;
• une brève description du déroulement de cette séance : modalités de travail des élèves, coups de pouce éventuels, utilisation du numérique.
3) [F] Rédiger, sur la fiche à remettre au jury, une correction de l'exercice 3 proposé en annexe telle qu'elle pourrait figurer dans le cahier des élèves à l'issue de cette séance.
4) a) Présenter un nouvel exercice dont la résolution permet de travailler la compétence " Raisonner " . Motiver le choix de cet exercice et préciser les sources et les objectifs visés.
b) [F] Rédiger sur la fiche à remettre au jury, ou vidéo-projeter lors de l'exposé, l'énoncé de cet exercice.

Annexe

Exercice 1 :
Après avoir complété le tableau ci-dessous, quelle conjecture peut être émise quant à la nature des nombres obtenus ? Cette conjecture est-elle vraie ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2 - n + 41$									

Exercice 2 :
" Le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de trois " Vrai ou faux ?
Exercice 3 :
Calculer $1 \times 2 \times 3 + 2$, puis $2 \times 3 \times 4 + 3$, puis $3 \times 4 \times 5 + 4$, et ainsi de suite jusqu'à $19 \times 20 \times 21 + 20$. Quelle conjecture peut être émise ? Cette conjecture est-elle vraie ?
Sujet 2 de la session 2018 :
Travail demandé :
L'énoncé présenté ci-dessous est un " Escape Game ", c'est-à-dire un jeu composé de différents défis déconnectés les uns des autres, proposé par un professeur à ses élèves.

Ce travail a été proposé à une classe répartie en groupes hétérogènes afin de réinvestir différentes notions. Les élèves ont à leur disposition des calculatrices et du matériel informatique. Des suggestions d'utilisation de logiciel sont présentes sur les défis sous la forme de logos.

Défi 1 :

On rappelle que la fonction « plancher » donne l'arrondi à l'entier par défaut, la fonction « plafond » donne l'arrondi à l'entier par excès. **Que fait ce programme, si on choisit comme nombre de départ la somme des diviseurs de 602 ?**	 *Ce programme est proposé en Annexe Numérique :* ***C16_Escape_Game.sb2***

Défi 2 :

Quelle est l'aire d'un hexagone régulier de côté 3,8 cm ?

(Réponse arrondie à 10^{-1} cm^2)

Défi 3 :

Frise A	
Frise B	
Frise C	
Frise D	

Ce programme Scratch permet de construire une des frises proposées. Laquelle ?

1) Situer à quel niveau peut être proposé cet " Escape Game " et préciser pour chaque défi en particulier les points du programme réinvestis.
2) Présenter les difficultés que pourrait rencontrer un élève ainsi que les coups de pouce éventuels que l'on peut envisager pour le défi 1.
3) [F] Rédiger, sur la fiche à remettre au jury, la correction du défi 2 telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève du niveau choisi.
4) a) Présenter un défi qui utilise un outil logiciel (tableur, géométrie dynamique ou programmation). Préciser les sources, les objectifs visés et la plus-value apportée par le logiciel.
b) [F] Rédiger sur la fiche à remettre au jury, ou vidéo-projeter lors de l'exposé, l'énoncé de ce défi.

Sujet de la session 2016

Travail demandé :
1) Présenter une description de la mise en œuvre d'une séance, en classe de 3^e, utilisant le problème donné en annexe. Préciser en particulier :
• les objectifs de formation ;
• les modalités de travail des élèves : l'organisation de la classe, le déroulement, les temps de régulation, les coups de pouce éventuels...
2) [F] Rédiger, sur la fiche à remettre au jury, une correction de la question 3 du problème proposé en annexe.
3) a) Présenter deux exercices de niveau 3^e faisant appel à des diviseurs ou des multiples de nombres entiers, l'un au moins de ces exercices devra s'appuyer sur l'utilisation d'un outil numérique.
b) Préciser les sources et motiver le choix de ces exercices ainsi que la plus-value de l'utilisation d'un outil numérique
c) [F] Rédiger sur la fiche à remettre au jury, ou vidéo-projeter lors de l'exposé, l'énoncé de ces exercices.

Annexe

Problème de recherche :

1. Trouver quatre valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la fraction $\dfrac{n+17}{n-4}$ est un nombre entier.
2. Trouver toutes les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles l'expression $1+\dfrac{21}{n-4}$ est un nombre entier.
3. Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la fraction $\dfrac{n+17}{n-4}$ est un nombre entier.

Sujet de la session 2014

I. Travail à présenter à l'oral :

1. Indiquer en quoi il peut être pertinent de proposer l'activité donnée en annexe à des élèves de troisième, et à quel moment de la progression ?
2. Décrire une manière possible de mener cette activité en classe de troisième.
3. Quelle différenciation pourrait-on envisager pour des élèves qui rencontreraient des difficultés ?
4. Quelle synthèse peut être dégagée et rédigée à la suite de cette activité ?
5. Proposer un autre problème destiné à des élèves de troisième et qui permettrait de travailler des notions d'arithmétique des programmes de collège.

II. Travail à présenter à l'écrit sur la fiche :

1. Rédiger la synthèse qui pourrait figurer dans le cahier des élèves à l'issue de cette activité.
2. Rédiger l'énoncé du problème proposé dans la question I.5., en précisant votre source.

Annexe

Situation :

Louise, créatrice de bijoux, a acheté un lot de perles jaunes, vertes et bleues. Elle souhaite fixer ces perles à un modèle de bracelet qu'elle a créé. Elle désire utiliser toutes les perles de façon à réaliser un nombre maximal de bracelets identiques. Aidez Louise à déterminer le nombre de perles de chaque couleur que comptera un bracelet ainsi que le prix de vente minimal d'un bracelet sachant que pour que la vente de ces bracelets soit rentable, les coûts de fabrication (y compris l'achat des perles) ne doivent pas représenter plus des deux septièmes du prix de vente.

Le lot de perles achetées par Louise :

- 138 perles jaunes : 55,20 euros
- 184 perles vertes : 64,40 euros
- 230 perles bleues : 78,20 euros

La composition du bracelet :

- Une chaîne
- Un fermoir
- Des perles

Les coûts de fabrication :

- Coût de la chaîne pour un bracelet : 1,50 euros
- Coût du fermoir pour une bracelet : 2,40 euros
- Main d'œvre : 20 euros pour huit bracelets

Les exercices

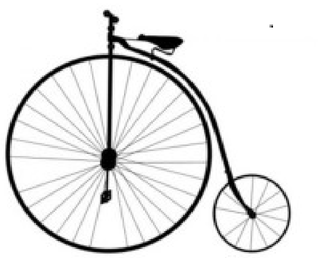
Les exercices marqués d'une étoile ★ sont issus des documents d'accompagnement.

I. Multiple et diviseur

Exercice 1 Critères de divisibilité :

1. Rappeler et montrer les critères de divisibilité par $2, 3, 4, 5$ et 9
2. Expliquer comment la preuve par 9 permet de détecter des erreurs dans les additions et les multiplications.
3. La preuve par 9 permet-elle de détecter toutes les erreurs ?
4. Montrer que si n est un entier naturel, alors $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.
5. En déduire un critère de divisibilité par 11.

Exercice 2 ★ Le grand-bi de Jules est constitué d'une roue circulaire de longueur 450 cm (avant), et d'une roue circulaire de longueur 135 cm (arrière). On a peint un repère rouge sur chaque roue. Un observateur remarque qu'à 13 h 51 min, les deux repères rouges sont en contact avec le sol.



Quelle longueur doit parcourir Jules sur son grand-bi pour que les deux repères soient à nouveau en contact avec le sol au même instant ?

Exercice 3 Quel est le plus petit entier $n \geq 1$ divisible par tous les nombres de 1 à 10 ?

Exercice 4 ★ Je suis un nombre à trois chiffres non nuls. Je suis divisible par 94. Changez l'ordre de mes chiffres et je deviens divisible par 49. Qui suis-je ?

Exercice 5 Trouver un nombre n de trois chiffres tel que n soit multiple de 5 et de 14 et que la somme de ses chiffres soit égale à 14.

Exercice 6 Les énoncés suivants sont-ils vrais :

1. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad 3$ divise $n^3 - n$

2. Si deux entiers ne sont pas multiples de 3, alors leur produit n'est pas un multiple de 3.
3. $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n est pair, alors $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 24
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, 8 divise $(2n+1)^2 - 1$
5. Si a, b et c sont trois entiers non nuls tels que a et b divisent c, alors ab divise c.
6. Soient a, b et c sont trois entiers naturels non nuls. Si c divise ab, alors c divise a ou c divise b.
7. Si a et b sont deux entiers naturels tel que a divise à la fois $42b + 37$ et $7b + 4$, alors $a = 1$ ou $a = 13$.

Exercice 7 Déterminer tous les couples (p, q) d'entiers naturels telle que la somme de tous les diviseurs positifs de $2^p.5^q$ soit égale à 42.

Exercice 8 Les codes-barres EAN 13(European Article Numbering) :
Les codes EAN 13 sont des codes barres à 13 chiffres utilisés dans le monde entier sur l'ensemble des produits de grande consommation.
• les deux premiers chiffres correspondent au pays de provenance du produit ou à une classe normalisée de produits ;
• les quatre chiffres suivants correspondent au codage du fabriquant ;
• les six suivants forment le numéro d'article ;
• le treizième chiffre est une clé de contrôle calculée en fonction des douze précédents. La clé de contrôle sert à la vérification de la bonne saisie du code. Elle est calculée de telle sorte que la somme des chiffres de rang impair + 3×(somme des chiffres de rang pair) + la clé soit un multiple de 10.

1. Quelle est la clé du code-barres : 270073657029• ?
2. Le code-barres 3408627490042 est-il correct ?
3. Peut-on détecter une erreur si l'un des chiffres du code-barres est erroné ?
4. Peut-on détecter une erreur si on permute deux chiffres distincts lors de la saisie du code-barres ?

Exercice 9 $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel :

1. Justifier que $\sqrt{2}$ n'est pas un entier.
2. Justifier que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.
3. On se propose dans cette question de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. On suppose alors $\sqrt{2}$ égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels.
   (a) Justifier que $p^2 = 2q^2$
   (b) Quels sont les chiffres des unités possibles de p^2 ?
   (c) Quels sont les chiffres des unités possibles de $2q^2$?

(d) Conclure.

4. Proposer une autre preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

II. Division euclidienne

Exercice 10 ★ Charlotte adore la lecture et possède entre 400 et 450 romans. Elle décide de revendre ses livres sur internet pour en acheter d'autres. Lorsqu'elle regroupe ses livres par 3, par 4 ou par 5, il en reste toujours 1. Combien de romans Charlotte possède-t-elle exactement ?

Exercice 11 On range 461 pots de yaourt dans des caisses identiques. La règle est qu'on ne commence pas une caisse avant d'avoir fini la précédente. A la fin on a rangé les pots dans 14 caisses.

1. Combien de pots contiennent les caisses pleines ?
2. Combien de pots contient la dernière caisse ?

Exercice 12 ★ Hugo et ses 11 amis ont récupéré 109 chocolats pour son anniversaire. Les 12 amis se disputent pour le partage. Hugo dit alors : " Je me sacrifie, partagez-vous les chocolats équitablement, je prendrai ce qu'il reste "
Que penser de son sacrifice ?

Exercice 13 On divise un nombre par 15, on trouve 3 comme reste. Quel peu-être le reste de sa division par 5 ? Même question si le reste est 13.

Exercice 14 On divise un nombre par 5, on trouve 3 comme reste. Quel peu-être le reste de sa division par 15 ?

Exercice 15 En divisant un nombre par 122 et par 125, on trouve le même quotient et les restes respectifs 52 et 40. Quel est ce nombre ?

Exercice 16 Le code ISBN-10 (International Standard Book Number)
Le numéro international normalisé du livre à dix chiffres permet d'identifier chaque livre de manière unique dans le monde entier. Il sert notamment de numéro de référence dans des bases de données informatiques (bibliothèques, éditeurs).
Il comprend dix chiffres répartis en quatre groupes séparés par des tirets par exemple : ISBN $2 - 266 - 02612 - 7$
Le premier groupe correspond au pays de l'éditeur (2 pour la France), le deuxième groupe est le numéro de l'éditeur, le troisième celui du livre, enfin le dernier chiffre est une clé qui sert à vérifier qu'on n'a pas effectué d'erreur de saisie en rentrant le code dans une machine.
A partir des neuf premiers chiffres $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$, on calcule la somme :

$$S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + 8a_8 + 9a_9$$

La clé est le reste de la division euclidienne de S par 11. Il s'agit d'un entier compris entre 0 et 10 inclus ; s'il vaut 10 on l'écrit alors avec le chiffre romain X.

1. Déterminer la clé du livre américain dont le code ISBN est $0 - 19 - 857505 - \bullet$
2. Le code ISBN $2 - 70 - 031999 - 7$ est-il correct ?
3. Peut-on détecter une erreur si l'un des chiffres d'un code ISBN est erroné ?
4. Peut-on détecter une erreur si on permute deux chiffres distincts lors de la saisie des neuf premiers chiffres d'un code ISBN ?

Exercice 17 A la fin d'un cours d'arithmétique un professeur propose à sa classe la conjecture suivante : pour tout entier n le nombre $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 35.
Jean, un élève de la classe, répond que la conjecture est vraie et qu'il suffit de la vérifier, à l'aide d'un tableur, pour les entiers de 0 à 34.
Chloé, une élève de la classe, affirme aussi que la conjecture est vraie en avançant l'argument que $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 7 pour $n = 0, 1, 2$ et 3.

1. La conjecture est-elle vraie ?
2. Que dire des preuves proposées par Jean et Chloé ?

III. Nombres premiers

Exercice 18 Crible d'Eratosthène :

1. Montrer que tout entier supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.
2. Montrer que si n est un entier supérieur ou égal à 2 qui n'est pas premier, alors n possède un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
3. Expliquer comment utiliser le résultat de la question 2 ci-dessus pour dresser la liste de tous les nombres plus petits que 100

Exercice 19 Nombre premier de Pythagore :
On dit qu'un nombre premier est de Pythagore s'il est la somme de deux carrés parfaits. Par exemple les nombres premiers $2, 5$ et 13 sont de Pythagore car $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$

1. Quels sont les nombres de Pythagore plus petits que 50 ?
2. Que peut-on dire du reste de la division euclidienne de n^2 par 4 où n est un entier naturel ?
3. Que peut-on dire du reste de la division euclidienne d'un nombre de Pythagore par 4 ?

Exercice 20 Peut-on trouver un entier naturel tel que le reste de sa division euclidienne par $11, 13, 15, 17$ et 20 soit toujours égal à 1 ?