HAC310X Mathématiques pour la Chimie
Contrôle continu n°1

NOM :
Prénom :
Groupe :

Barème

Durée : 1h ; calculatrice non autorisée, aucun document autorisé.
Merci de répondre sur le sujet dans les cadres prévus à cet effet.

Exercice 1 [Calcul vectoriel].

1 (a) Soient $\mathbf{u} = (-1, 1, -2)$ et $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$. Trouver l'angle entre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

1 (b) Trouver un vecteur orthogonal à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

2 (c) Soient $\mathbf{s} = (\frac{1}{2}, -3)$ et $\mathbf{t} = (-2, 12)$. Les vecteurs $\mathbf{s}$ et $\mathbf{t}$ sont-ils parallèles ? orthogonaux ? aucun des deux ? (justifiez votre réponse)

a) $u \cdot v = (-1,1,-2)\cdot(1,2,-1) = -1+2+2 = 3$

$\|u\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\|v\| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

Donc, $3 = \sqrt{6}\sqrt{6}\cos(\widehat{uv}) = 6\cos(\widehat{uv}) \iff \frac{1}{2} = \cos(\widehat{uv}) \iff \widehat{uv} = \pi/3$

b) Calculons. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= i(-1-(-4)) - j(1-(-2)) + k(-2-1) = 3i-3j-3k$

Donc, un vector orthogonal à u et v est $(3,-3,-3)$.

c) $s\cdot t = (\frac{1}{2},-3)\cdot(-2,12) = -1-36 = -37 \neq 0 \Rightarrow$ s et t ne sont pas orthogonaux

$\|s\| = \sqrt{\frac{1}{4}+9} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$, $\|t\| = \sqrt{4+144} = \sqrt{148} = \sqrt{4\times37} = 2\cdot\sqrt{37}$

Donc, $-37 = \frac{\sqrt{37}}{2}\times 2\times\sqrt{37}\times\cos(\widehat{st}) = 37\cos(\widehat{st}) \iff -1 = \cos(\widehat{st}) \iff \widehat{st} = \pi$

$\Rightarrow$ s et t sont parallèles.

Exercice 2 [Matrice]. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2 (a) A est-elle inversible ?

1 (b) A est-elle orthogonale ?

(a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 1\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= 6-(-2) - 4(9-(-2)) + 0$

$= 6+2+36-8 = 8-44 = -36 \neq 0$

Donc A est inversible

(b) $A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 11 & -5 \\ 11 & 17 & 1 \\ -5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \neq I_3$

Donc, A n'est pas orthogonale

Exercice 3 [Valeurs et vecteurs propres]. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3 (a) Trouver les valeurs propres de A.

2 (b) Déterminer les vecteurs propres correspondants (c-à-d, les solutions avec chaque valeur propre).

(a)

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-4\right] - 2\left[2(2-\lambda)-4\right] + 2\left[4-2(2-\lambda)\right]$$

$$= (2-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-4) - 4(2-\lambda) + 8 + 8 - 4(2-\lambda).$$

$$= (2-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2) \cancel{-8+4\lambda+16-8+4\lambda}$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2 = -(\lambda-6)\lambda^2$$

$$= \cancel{-8\lambda}+2\lambda^2+4\lambda^2-\lambda^3+\cancel{8\lambda}$$

Donc $\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff -(\lambda-6)\lambda^2 = 0$

On obtient que les sol^{ns} sont : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$

(b) Si $\lambda = 0$ on a le système

$$\begin{cases} 2x+2y+2z = 0x \\ 2x+2y+2z = 0y \\ 2x+2y+2z = 0z \end{cases}$$

et donc $x = -y-z$. Il existe une infinité de sol^{ns} sous la forme $(-y-z, y, z)$. par exemple $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$.

Si $\lambda = 6$ on a

$$\begin{cases} 2x+2y+2z = 6x \\ 2x+2y+2z = 6x \\ 2x+2y+2z = 6x \end{cases} \iff \begin{cases} -4x+2y+2z = 0 \quad (1) \\ 2x-4y+2z = 0 \quad (2) \\ 2x+2y-4z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) - (2) on obtient $-6x+6y = 0 \Rightarrow x = y$. Similairement (1) - (3) $\Rightarrow x = z$ et (2) - (3) $\Rightarrow y = z$. Il existe donc une infinité de sol^{ns}, (x,x,x), par exemple $(1,1,1)$.

1 **Exercice 4 [Nombres complexes].**

(a) Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ le nombre $(\frac{1+i}{2-i})^2$.

2 (b) Soit $z = 2 - 2i$. Mettre z sous la forme exponentielle.

3 (c) Trouver les racines cubiques de z (c-à-d, un nombre complexe w tel que $w^3 = z$). Donner les solutions sous forme trigonométrique.

2 (d) Est-il vrai que le nombre $-1 - i$ est l'une des racines cubiques de z ?

a) $\frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{1+3i}{5}$ Donc $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = \frac{-8}{25} + \frac{6}{25} i$

b) $|z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Comme $a>0, b<0$

alors $\theta = 2\pi - \alpha = \frac{7\pi}{4}$

On a donc $z = \sqrt{8}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$

c) Soit $w = re^{i\theta}$, on cherche $(re^{i\theta})^3 = w^3 = z = \sqrt{8}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$

ou encore $r^3 e^{i3\theta} = \sqrt{8}\, e^{i7\pi/4}$. On en déduit que

$r^3 = \sqrt{8} = 8^{1/2} \iff r = (8^{1/2})^{1/3} = (8^{1/3})^{1/2} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$ et

$3\theta = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors,

pour $k=0$ $3\theta = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{12}$

$k=1$ $3\theta = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi = \frac{15}{12}\pi = \frac{5\pi}{4}$

$k=2$ $3\theta = \frac{7\pi}{4} + 4\pi \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi = \frac{23\pi}{12}$

Les racines sont :

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)$

d) Si $t = -1-i$ $|t| = \sqrt{2}$ et

$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Comme $a, b < 0$, $\theta = \pi + \alpha = \frac{5\pi}{4}$

Donc

$t = -1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = z_2$

et donc $-1-i$ est bien une racine cubique de z.