

## Solutions TD 2 : Nombres complexes

### Exercice 1.

$$(2 + 3i)(5 - 2i) + 6i = 10 - 4i + 15i - 6i^2 + 6i = 10 + 11i + 6 + 6i = 16 + 17i$$

$$(1-3i)^3 = (1-3i)(1-3i)(1-3i) = (1-6i-9)(1-3i) = 1-6i-9-3i+18i^2+27i = -26+i18.$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i+i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{2i}{2} = i.$$

**Exercice 2.** Soit  $Z = (1+i)z + 1 - i$  et soit  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$   
 Nous avons  $Z = (1+i)(x+iy) + 1 - i = x - y + 1 + i(x + y - 1)$ . Par suite,  $Re(Z) = x - y + 1$   
 puis  $Z$  est imaginaire pur si  $Re(Z) = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $x - y + 1 = 0$ .

L'ensemble des points d'affix  $Z$  tels que  $Z$  soit un imaginaire pur est la droite d'équation  $y = x + 1$ .

**Exercice 3.** (a) Soit  $z = x + iy$ .

$$(3-i)\bar{z} - 2 + 4i = 0 \iff (3-i)(x-iy) - 2 + 4i = 0 \iff \\ 3x - i3y - ix + yi^2 - 2 + 4i = 0 \iff 3x - y - 2 + i(-3y - x + 4) = 0.$$

Par identification des points réelles et imaginaires, nous cherchons les solutions au système :  $3x - y - 2 = 0$  et  $-3y - x + 4 = 0$ . La solution est donnée par  $x = y = 1$ . On trouve donc  $z = 1 + i$ .

(Deuxième méthode). On aurait pu procéder comme suit.

$$(3-i)\bar{z} - 2 + 4i = 0 \iff \overline{(3-i)\bar{z} - 2 + 4i} = 0 \iff (3+i)z - 2 - 4i = 0 \iff \\ z = \frac{2+4i}{3+i} = \frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{10+10i}{3^2+1^2} = 1+i$$

(b)

$$(1+i)z + (3-i)\bar{z} = 1 + 2i \iff (1+i)(x+iy) + (3-i)(x-iy) = 1 + 2i$$

En développant, on obtient  $(4x - 2y) + i(-2y) = 1 + 2i$ . Par identification des points réelles et imaginaires, nous cherchons les solutions au système :  $4x - 2y = 1$  et  $-2y = 2$ . La solution est donnée par  $x = -1/4$  et  $y = -1$ . On trouve donc  $z = -1/4 - i$ .

(c)

$$z\bar{z} + 4(z - \bar{z}) = 5 + 16i \iff (x + iy)(x - iy) + 4(x + iy - (x - iy)) = 5 + 16i$$

$$x^2 + y^2 + 4(i2y) = 5 + 16i \iff x^2 + y^2 + i8y = 5 + 16i$$

Par identification des points réelles et imaginaires, nous cherchons les solutions au système :  $x^2 + y^2 = 5$  et  $8y = 16$ . La solution est donnée par  $x = 1$  et  $y = 2$ . On trouve donc  $z = 1 + i2$ .

**Exercice 4.** Soient  $z_1 = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$  et  $z_2 = \sqrt{2}(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3)$ . Nous avons que  $r_1 = r_2 = \sqrt{2}$  et  $\theta_1 = \pi/4$  et  $\theta_2 = 4\pi/3$ .

(a) On a  $r_1 r_2 = 2$ ,  $\theta_1 + \theta_2 = 19\pi/12$  et donc

$$z_1 z_2 = 2(\cos(19\pi/12) + i \sin(19\pi/12))$$

(b) On a  $r_1/r_2 = 1$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = -13\pi/12 = 11\pi/12$  et donc

$$z_1/z_2 = (\cos(11\pi/12) + i \sin(11\pi/12))$$

(c) On rappelle que si  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  alors  $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$  Nous avons donc

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4)).$$

Remarquons que comme  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  et  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  alors  $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$ . On peut donc exprimer

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(7\pi/4) - i \sin(7\pi/4)).$$

**Exercice 5.**(a) Pour  $z = 1 - i$ , on a  $r = |z| = \sqrt{2}$ ,  $\alpha = \tan^{-1}(1/1) = \pi/4$  et comme  $a > 0$  et  $b < 0$  alors  $\theta = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$ . On obtient donc  $z = \sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4))$ .(b) Pour  $z = \sqrt{3} + i$ , on a  $r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ ,  $\alpha = \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}/3) = \pi/6$  et comme  $a, b > 0$  alors  $\theta = \pi/6$ . On obtient donc  $z = 2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6))$ .

(c) Pour  $z = 2$ , on a  $r = |z| = 2$ ,  $\alpha = \tan^{-1}(0/2) = \tan^{-1} 0 = 0$  et comme  $a > 0$ ,  $b = 0$  alors  $\theta = \alpha = 0$ . On obtient donc  $z = 2(\cos(0) + i \sin(0)) = 2 \cos(0) = 2$ .

**Exercice 6.**

(a)  $e^{-i\pi/3} = 1(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3)) = \cos(\pi/3) - i \sin(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ .

(b)  $3e^{i\pi/4} = 3(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = 3(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)$ .

**Exercice 7.**

(a) Les racines de  $z^2 - 2z + 4 = 0$  sont  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ .

(b) En utilisant l'identité  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  nous avons  $z^3 + 8 = 0 \iff (z + 2)(z^2 - 2z + 4) = 0$ . D'après (a) on trouve que les solutions sont  $z_1 = -2$ ,  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ .

**Exercice 8.** D'après le théorème du binôme, on a

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Donc

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^5 &= \cos^5 \theta + 5 \cos^4 \theta i \sin \theta + 10 \cos^3 \theta i^2 \sin^2 \theta + 10 \cos^2 \theta i^3 \sin^3 \theta + 5 \cos \theta i^4 \sin^4 \theta + i^5 \sin^5 \theta \\ &= (\cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta) + i(5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta) \end{aligned}$$

D'après la formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

On en déduit (en utilisant  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ )

$$\cos(5\theta) = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$$

$$\sin(5\theta) = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$$

**Exercice 9.**

(a) On cherche un nombre complexe  $z$  tel que  $z^2 = 4 - 3i$ . Prenons  $z = x + iy$ , alors  $\Re(z^2) = x^2 - y^2 = 4$ ,  $|z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$  et le signe ( $\Im(z^2)$ ) est négatif, c'est-à-dire  $xy < 0$ . En additionnant les deux dernières égalités on obtient  $x^2 = 9/2$  et ensuite  $y^2 = 1/2$  et comme  $xy < 0$  alors les solutions sont  $(x, y) = (3/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  et  $(-3/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

(b) On cherche un nombre complexe  $z$  tel que  $z^2 = 1 + 5i$ . Prenons  $z = x + iy$ , alors  $\Re(z^2) = x^2 - y^2 = 1, |z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$  et le signe ( $\Im(z^2)$ ) est positif, c'est-à-dire  $xy > 0$ . En additionnant les deux dernières égalités on obtient  $x^2 = \frac{\sqrt{26}+1}{2}$  et ensuite  $y^2 = \frac{\sqrt{26}-1}{2}$  et comme  $xy > 0$  alors les solutions sont  $(x, y) = \left( \sqrt{\frac{\sqrt{26}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{26}-1}{2}} \right)$  et  $\left( -\sqrt{\frac{\sqrt{26}+1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{26}-1}{2}} \right)$

**Exercice 10.** Soit  $z = a + ib$ .

(a)  $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\Re(z)$  et  $z - \bar{z} = a + ib - (a - ib) = +i2b = 2i\Im(z)$ .

(b) On a  $z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0 \iff z = x = \bar{z}$

On sait que  $2\Re(z) = z + \bar{z}$  impliquant  $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  On également sait que  $z - \bar{z} = i2b$  impliquant  $\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = b = \Im(z)$ .

(c)  $z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0 \iff z = x = \bar{z}$ .

$z \in i\mathbb{R}$  ( $z$  est imaginaire pur)  $\iff \Re(z) = 0 \iff z = iy = -(-ib) = -\bar{z}$ .

**Exercice 11.** Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

(a)  $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2$ . En plus,  $0 = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  est vérifié si et seulement si  $x = y = 0$  et donc si et seulement si  $z = 0$ .

(b) Soit  $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$ . Alors

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z'\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z}' = |z|^2 + 2\Re(\bar{z}z') + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|\Re(\bar{z}z')| + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|\bar{z}z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|\bar{z}||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ &= (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

et donc  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  puisque  $|z + z'|$  et  $|z| + |z'|$  sont deux réels positifs.

**Exercice 12.** On va déterminer l'ensemble  $E = \left\{ z = \frac{1+ix}{1-ix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ .

Comme  $\Re(1 - ix) = 1 \neq 0$ ,  $z$  est bien définie et de plus  $|z| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = 1$  donc  $z \in U =$  l'ensemble de nombres complexes de module 1.

On va montrer que  $E = U \setminus \{-1\}$ . Soit  $z \in U$ , il existe  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)}$$

Si  $z \neq -1$  ce qui revient à dire  $\theta \neq \pi$  impliquant  $\theta \in [0, 2\pi[ \setminus \{\pi/2\}$  et donc  $\cos(\theta/2) \neq 0$ . On peut écrire

$$z = \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \cdot \frac{1 + i \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}}{1 - i \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}} = \frac{1 + i \tan(\theta/2)}{1 - i \tan(\theta/2)} = \frac{1 + ix}{1 - ix}$$

avec  $x = \tan(\theta/2) \in \mathbb{R}$  et donc  $z \in E$ .

Si  $z = -1$  alors pour  $x \in \mathbb{R}$

$$z = \frac{1+ix}{1-ix} \iff -1 = \frac{1+ix}{1-ix} \iff 1+ix = -(1-ix) \iff 0x = 2$$

La dernière équation n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$  et donc  $-1 \notin E$ .