Filtrage numérique

Olivier Company *

GMP, Semestre 4, année 2016-2017

1 Introduction

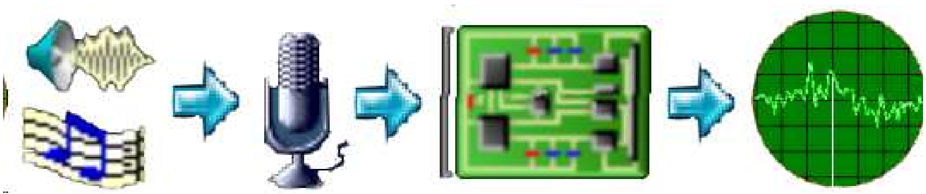
Les grandeurs physiques, comme par exemple le son, le déplacement ou la température, sont des phénomènes continus. Pour les enregistrer sur un support et deux solutions sont possibles :

— soit on enregistre le signal de façon continue, et c'est un enregistrement analogique. Par exemple pour un signal sonore cassette audio ou disque vinyle

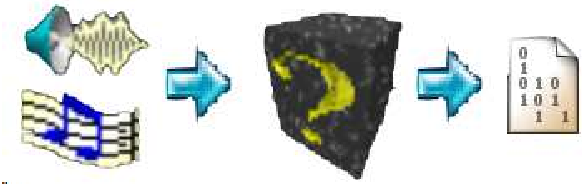
— soit on n'enregistre que certaines valeurs de ce signal, et on parle alors de signal numérique. Par exemple pour le son, CD audio ou fichiers wav.

Pour illustrer le propos, nous pouvons imaginer une personne dansant en plein soleil : celui-ci diffuse une lumière continue et tous les mouvements du danseur peuvent être perçus. C'est l'analogique. Maintenant imaginons ce même danseur sous une lumière stroboscopique : cette dernière n'éclaire le danseur que par à coups, et le mouvement n'est pas perçu de façon continue. C'est le numérique. Il faut donc que le stroboscope éclaire le danseur à une fréquence très élevée, afin qu'on ne distingue pas vraiment de différence avec l'éclairage par le soleil. Et c'est aujourd'hui ce qu'offre le numérique.

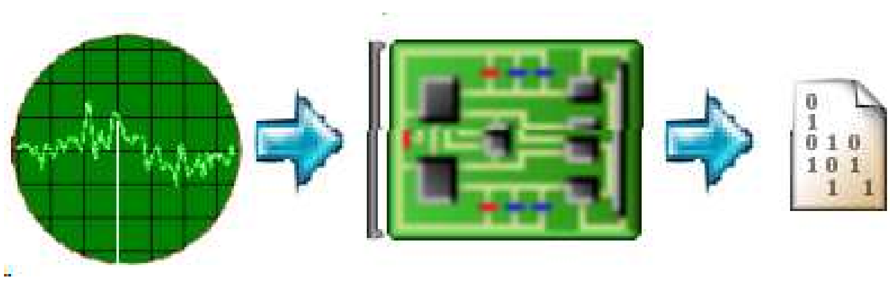
Pour un phénomène sonore, notre problème est présenté sur la figure 1.



(a) Capture analogique



(b) Principe de la capture numérique



(c) Passage de l'analogique au numérique

FIGURE 1 – Capture d'un son

Nous allons donc maintenant étudier le passage d'un signal analogique à un signal numérique.

*IUT Nîmes, Département GMP, Université de Montpellier (company@lirmm.fr)

2 Numérisation d'un signal

Nous distinguons donc plusieurs types de de signaux :
- un signal à temps continu (signal analogique) $x(t)$ correspond à une grandeur dont la valeur existe à chaque instant t
- un signal à temps discret $x[n]$ correspond à une grandeur dont la valeur n'est disponible qu'à certains instants t
- un signal échantillonné est un cas particulier de signal discret, obtenu en faisant une mesure à intervalles de temps réguliers d'une grandeur analogique $x[n] = x(nTe)$

La numérisation d'un signal comporte deux étapes :
- La quantification
- La discrétisation temporelle (échantillonnage)

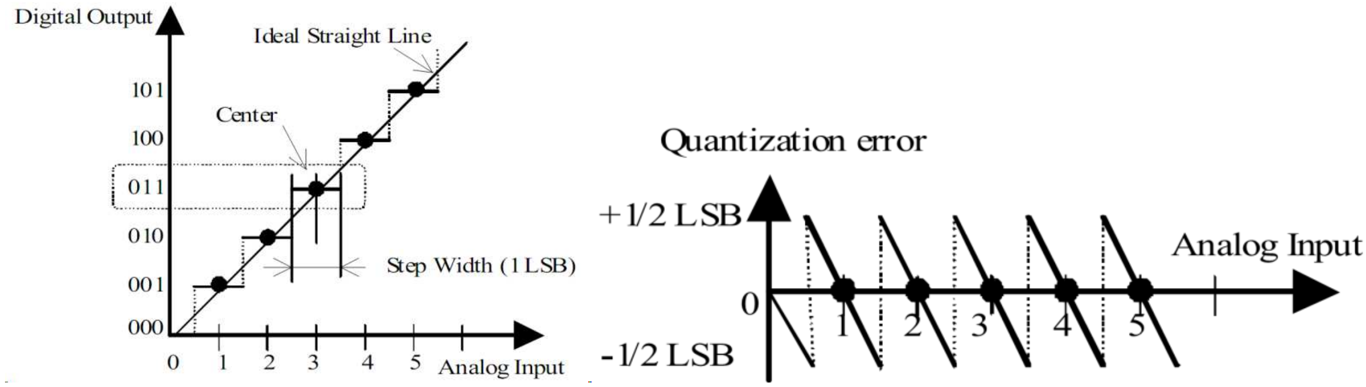
Chacune de ces étapes introduit des pertes d'informations...

2.1 La quantification

Le rôle de la quantification est de donner une image binaire d'un signal analogique : nous passons donc de l'analogique au numérique, d'un signal continu à un signal discret, plus concrètement d'une tension à un nombre.

Attention, cette opération est irréversible : à chaque niveau de tension correspond une valeur binaire codée sur n bits.

Sur la figure 2, le graphe de la fonction de quantification (qui a une tension d'entrée fait correspondre un nombre binaire sur 3 bits, donc 8 valeurs possibles). Nous constatons sur ce graphe, qu'il n'est pas possible, à partir de la valeur de la sortie de retrouver la valeur exacte de l'entrée. Nous ne pouvons déterminer que les bornes min et max de la valeur réelle de la tension d'entrée. Il existe donc une erreur "de codage" de l'information liée à la quantification. Cette erreur est représentée sur la figure 2. Cette erreur peut être assimilée à un "bruit" de mesure.



(a) Capture analogique

(b) Principe de la capture numérique

FIGURE 2 – La quantification

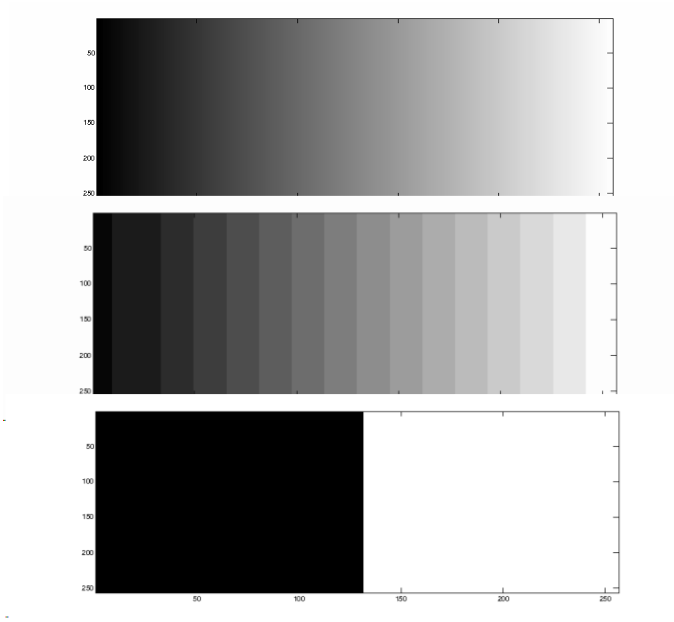
Exemples :
- Quantification des niveaux de gris d'une image (figure 3)
- Quantification d'un signal sur 4 bits (figure 4)

En conclusion : le nombre de bits sur lequel est discrétisé le signal est un choix important. La qualité de la quantification dépend du nombre de bits sur lequel on réalise la conversion analogique/numérique :
- 4 bits - 16 valeurs
- 8 bits - 256 valeurs
- 16 bits - 65536 valeurs

Ces valeurs sont en principe réparties linéairement. Par exemple :
- Capteurs CCD d'appareil photo (8 bits pour les niveaux de gris si N et B, 8 bits par couleur de base pour la couleur, soit 16777216 couleurs possibles....)
- CD audio - 16 bits

2.2 L'échantillonnage (discrétisation temporelle)

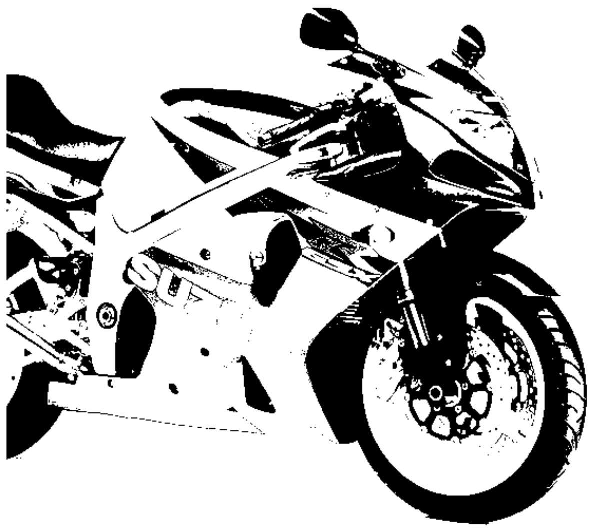
L'échantillonnage correspond à la discrétisation temporelle (ou spatiale dans le cas des images) d'un signal. Cette discrétisation temporelle est nécessaire pour permettre la numérisation. En effet, il n'est pas technologiquement possible d'effectuer la conversion du signal analogique en signal discret en "continu". Cela donnerait un résultat faux car la conversion analogique->numérique prend un certain temps, temps pendant lequel le signal analogique continue de varier. Il est donc nécessaire de "figer" le signal analogique pour pouvoir réaliser sa conversion. C'est pourquoi la valeur du signal analogique est prélevée à intervalles de temps réguliers (tous les T_e, T_e étant la période d'échantillonnage et à qui on fait correspondre la fréquence



(a) Quantification de l'étendue

(b) 8 bits : 256 niveaux de gris

(c) 4 bits : 16 niveaux de gris



(d) 1 bit : 2 niveaux de gris (noir ou blanc)

Figure 3 – Quantification des Niveaux de gris d'une image

d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$). Un exemple de discrétisation temporelle est donné sur la figure 5 Le choix de cette fréquence d'échantillonnage a de l'importance sur la qualité de la numérisation... Ceci est illustré dans le cas d'une image sur la figure 6.

Attention, l'échantillonnage peut entrainer des phénomènes de battement (figure 7). L'exemple le plus courant est celui des westerns avec les roues de chariots filmées à 25Hz (25 images par seconde).

Pour éviter l'arrivée de ce phénomène qui produit une information numérisée non conforme à la réalité, il est important de bien choisir la fréquence d'échantillonnage par rapport à la fréquence maximale du phénomène que l'on cherche à observer. Cette condition est connue sous le nom de théorème de SHANNON : "On ne peut échantillonner un signal sans pertes d'information que si la fréquence d'échantillonnage est deux fois supérieure à la fréquence maximale du phénomène que l'on cherche à observer." De plus, il est tout à fait possible que le signal possède des fréquences supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, ces fréquences vont se "replier" sur les fréquences que nous voulons observer et s'y superposer.

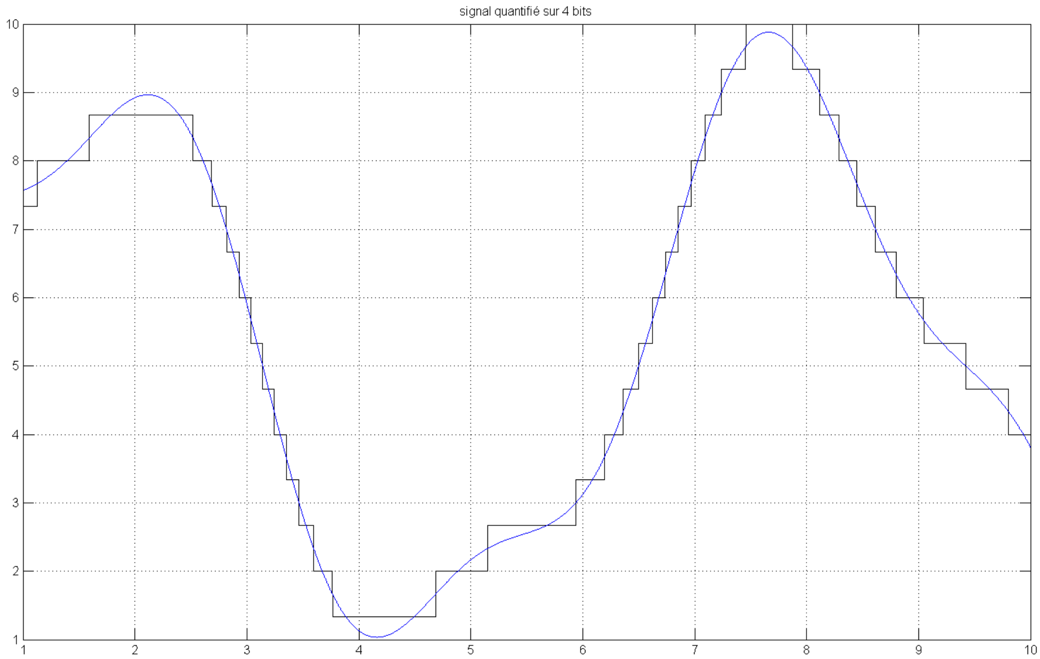
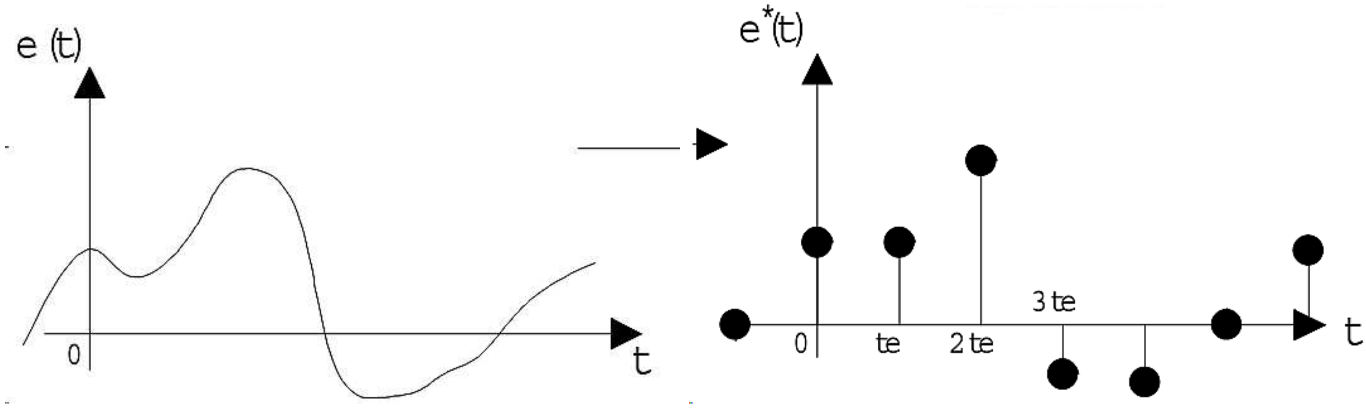


FIGURE 4 – Quantification d'un signal temporel sur 4 bits



(a) Signal Continu

(b) Signal Discret

FIGURE 5 – Différence entre signal continu et signal discret

Il est donc important de "supprimer" les fréquences qui vont se replier avant d'effectuer l'échantillonnage. Pour cela, nous devons implémenter un filtre passe bas analogique avant de procéder à l'échantillonnage. Ce filtre analogique sera appelé un filtre anti-repliement.

Enfin, nous n'abordons pas ici la compression des informations numériques qui peut se faire avec ou sans pertes...

En conclusion, il est très important de bien choisir le couple, fréquence d'échantillonnage/nombre de bits pour capturer l'information que nous voulons exploiter, mais également pour diminuer le volume de données à traiter, à transmettre et à stocker...

2.3 Filtrage numérique

2.4 Traitement numérique simple

Maintenant que nous avons obtenu une série de nombre, nous devons envisager les traitements que nous pouvons effectuer dessus. Une manière simple de procéder est de faire la moyenn glissante, pondérée ou non sur plusieurs éléments. Une autre manière est de prendre la médiane glissante sur plusieurs éléments.

Ces deux méthodes appliquent un "flou" sur les données qui équivaut à un filtre passe bas (sans toutefois s'apparenter à

(a) Image 800x800

(b) Image 200x200

(c) Image 40x40

FIGURE 6 – Echantilonnages différents pour une image (nombre de pixels)

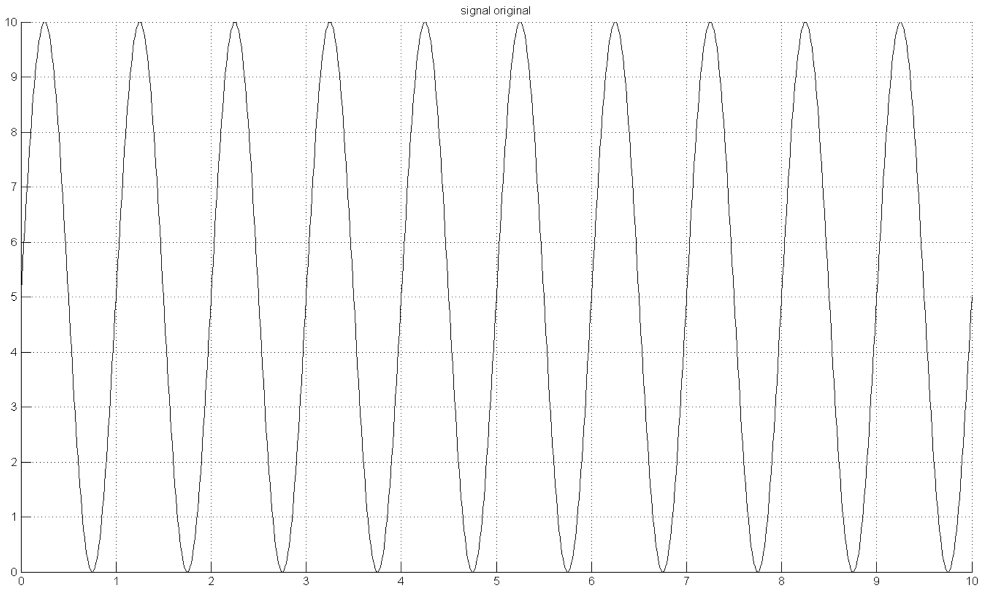
ce que nous avons vu dans la théorie sur le filtrage analogique) . Si nous voulons obtenir un filtre passe haut, il faut retrancher la valeur moyenne glissante (ou la médiane glissante) de la série de données.

2.5 Reproduction des filtres analogiques

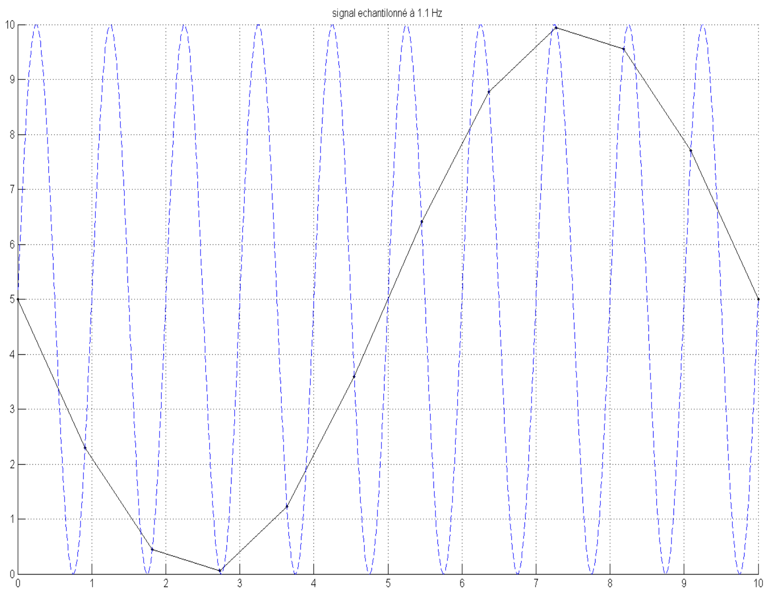
Pour trouver l'équivalent en numérique d'un filtre caractérisé par une fonction de transfert ($\underline{H}(j\omega)$), une méthode est d'appliquer la transformation bilinéaire (transformée en z) définie de la manière suivante :

$$j\omega = \frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1} \tag{1}$$

Quand la fonction de transfert en z $H(z)$ se met sous la forme :



(a) Signal Sinus Continu



(b) Signal échantillonné reconstruit

FIGURE 7 – Illustration du battement

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_m z^m}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n} \tag{2}$$

alors la sortie du filtre y_k peut s'écrire sous la forme d'une suite :

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + .. + a_n y_{k-n} = x_k + b_1 x_{k-1} + b_2 x_{k-2} + .. + b_n x_{k-m} \tag{3}$$