

Solutions TD 1 : Matrices

Exercice 1.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (3, 1, -1), (1, 2, -3) \rangle = 3 + 2 + 3 = 8.$$

On sait que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \times \|\mathbf{v}\| \times \cos(\angle(\mathbf{u}; \mathbf{v}))$. Alors,

$$8 = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \times \cos(\angle(\mathbf{u}; \mathbf{v})) = \sqrt{11} \times \sqrt{14} \times \cos(\angle(\mathbf{u}; \mathbf{v})).$$

Donc, $\cos(\angle(\mathbf{u}; \mathbf{v})) = \frac{8}{\sqrt{11 \times 14}} \approx \frac{8}{12,409} \approx 0,6446$.

L'angle cherché est donc donné par $\arccos(0.6446) \approx 0,8702963631$.

Exercice 2.

a) On rappelle que $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$. Donc,

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 4\mathbf{w} = (4i - 2j + 6k) + (2j - 2k) + 4(-k) = 4i = 4(1, 0, 0) = (4, 0, 0).$$

b) Un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{w} = (0, 0, -1)$ et $\mathbf{x} = (4, 0, 0)$ est donné par

$$\mathbf{x} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i(0) - j(-4) + k(0) = 4j = (0, 4, 0).$$

c) Un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{w} = (0, 0, -1)$ et $\mathbf{v} = (0, 2, -2)$ est donné par

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i(-2) - j(0) + k(0) = -2i = (-2, 0, 0).$$

Exercice 3.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 5-12 \\ 0-2 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} B + BA &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+0 & 4-5 \\ 2+0 & 8+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 4-4 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3B - A^3 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } y = (4 \ 0 \ 1)$$

$$-2A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -8 \\ -8 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$x + y$ n'est pas possible (les tailles des matrices sont différentes)

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 12 \\ -9 & -11 & -20 \\ 1 & 2 & 18 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -10 & -18 & -16 \\ -2 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

xA n'est pas possible (le nombre de colonnes de x est différent du nombre de lignes de A)

By n'est pas possible (le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de y)

$$yB = (-4, 5, 6)$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= (-1) \det \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - (0) \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (1) \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)(-8) + 0 + (1)(-10 + 12) = 8 + 2 = 10 \neq 0 \end{aligned}$$

A est donc inversible.

On rappelle que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(d_{ij})$ avec $d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ où A_{ji} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne j et la colonne i . Nous avons

$$d_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -8,$$

$$d_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -10,$$

$$d_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$d_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2,$$

$$d_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -5,$$

$$d_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2,$$

$$d_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4,$$

$$d_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 5,$$

$$d_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 4.$$

Obtenant

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 & -10 & 2 \\ -2 & -5 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $AA^t \neq I_3$. A n'est donc pas orthogonale.

Exercice 6.

$$AA^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A est bien orthogonale.

D'abord on calcul B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

nous

$$B^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

On a

$$BB^t = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 0 & \cos \theta \sin \theta \cos \varphi - \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + 0 & \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + 0 \\ \sin \theta \cos \varphi \cos \theta - \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + 0 & \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + \cos^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \cos \theta - \sin \theta \sin \varphi \cos \theta + 0 & \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

ou encore

$$BB^t = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 & \sin \varphi \cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

et donc

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B est également orthogonale.

Exercice 7.

a) $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 0 = -1$.

$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -3 - 10 = -13$.

On en déduit $\det(AB) = \det(A) \det(B) = (-1)(-13) = 13$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$.

On en déduit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = 1 \times 6 \times 10 \times 13 \times 15.$$

Exercice 9.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - (1) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (1) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 3 + 3 = 0.$$

Comme $\det A \neq 0$ il n'y a pas de solution unique.

A partir du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

La différence de deux premières équations donne $x = 1$ et en remplaçant cette valeur dans la première équation on obtient $y = 1 - z$. Nous avons une infinité de solutions $(1, 1 - z, z)$ dépendant du paramètre z .

Exercice 10.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

La différence de deux premières équations donne $x = 1$ et en remplaçant cette valeur dans la première équation on obtient $y = 1 - z$. En remplaçant $x = 1$ et $y = 1 - z$ dans la troisième équation on obtient $z = 0$. Finalement, nous trouvons $y = 1$. Nous avons que l'unique solution est $(1, 1, 0)$.

Exercice 11. Nous avons une solution nontriviale quand

$$D = \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1 & 1 \\ 11 & 4 - \lambda & 5 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Alors,

$$\begin{aligned} D &= (-2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -11 & 4 - \lambda \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)(-\lambda(4 - \lambda) - 5) - (11\lambda + 5) + (-11 + (4 - \lambda)) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc que $D = 0$ quand $\lambda = 1, -1$ ou 2 (qui sont de racines du polynôme $-(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$).

Exercice 12. (a) Calculons

$$D = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Alors,

$$\begin{aligned} D &= (3 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} + 0 \\ &= (3 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 1) - ((3 - \lambda) - 0) = (3 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 2) = 0 \end{aligned}$$

Nous avons $(3 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 2) = 0$ quand $3 - \lambda = 0$, c'est-à-dire quand $\lambda = 3$, ou bien quand $(3 - \lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$, c'est-à-dire quand $\lambda = 3 \pm \sqrt{2}$.

(b) Pour $\lambda = 3$, le système devient $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Nous avons une infinité de solutions donné par $(-z, 0, z)$ dépendant du paramètre z .

Pour $\lambda = 3 \pm \sqrt{2}$, le système devient $\begin{cases} y = \pm\sqrt{2}x \\ x + z = \pm\sqrt{y} \\ y = \pm\sqrt{2}z \end{cases}$

Nous avons une infinité de solutions donné par $(z, \pm\sqrt{2}z, z)$ dépendant du paramètre z .

Exercice 13.

Soit $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$ (*nombre d'or*) et $c = 1/\sqrt{2(\varphi + 2)}$.

(a) Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \alpha + \varphi\beta$, $\lambda_2 = \alpha + (\varphi - 1)\beta$, $\lambda_3 = \alpha - (\varphi - 1)\beta$ et $\lambda_4 = \alpha - \varphi\beta$

(b) Les vecteurs propres orthonormales sont :

$$x_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = c \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \\ -1 \\ -\varphi \end{pmatrix}, x_3 = c \begin{pmatrix} \varphi \\ -1 \\ -1 \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ et } x_4 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \\ \varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$