Année 2016-2017
L2 — SV Concours
HLMA413 Mathématiques

Feuille d'exercices no.1

1. Calculs élémentaires

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes : (a) $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$; (b) $\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{3}\sqrt{8}$; (c) $\frac{2}{\frac{3}{4}}$ et $\frac{\frac{2}{3}}{4}$; (d) $\frac{\frac{2^{1/4}3^{3/4}}{\sqrt{6}}}{(\frac{2}{3})^{1/4}}$; (e) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; (f) $2^{\frac{1}{\ln 2}}$.

Exercice 2. Calculer : (a) $(-2)^3$; (b) -2^3 ; (c) 2^{-3} ; (d) $\frac{3^{19}}{3^{17}}$; (e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; (f) $8^{-2/3}$.

Exercice 3. Factoriser les expressions suivantes : (a) $4x^2-9$; (b) $2x^2-x-6$; (c) x^3-2x^2-x+2 ; (d) x^3+8 ; (e) $(x-1)(x^2+1)+2x(x-1)$.

Exercice 4. Simplifier les fractions rationnelles suivantes : (a) $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$; (b) $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\left(\frac{2x^2-x+3}{x^2-4}\right)$; (c) $\frac{x^2+9}{x^2-9}-\frac{x}{x-3}$; (d) $\frac{\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$.

Exercice 5. Montrer les égalités suivantes : (i) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-3$; (ii) $\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{e^{-x/4}\sqrt{e^x}}{\exp(x/4)}=1$; (iii) $\forall x\in\mathbb{R},\ 2\ln\left(\sqrt{e^x}\right)-x=0$.

Exercice 6. Donner une écriture plus simple des expressions suivantes : (i) $\ln\left((-2)^2\right)$; (ii) $\exp(10\ln(2))$; (iii) $\ln(100)-2\ln(2)-\ln(5)$.

Exercice 7. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tous les nombres réels pour lesquelles elles ont un sens ? Si oui, les prouver. Si non, trouver un contre-exemple. (i) $(x+y)^2=x^2+y^2$; (ii) $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$; (iii) $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$; (iv) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$; (v) $\sqrt{x^2}=x$.

Exercice 8. Compléter les identités remarquables : (i) $(a+b)^2=\cdots$; (ii) $(a-b)^2=\cdots$; (iii) $a^2-b^2=\cdots$; (iv) $(a+b)^3=\cdots$; (v) $(a-b)^3=\cdots$; (vi) $a^3+b^3=(a+b)(\cdots)$; (vii) $a^3-b^3=(a-b)(\cdots)$.

2. Utilisation des symboles $\sum$ et $\prod$

Exercice 9. Calculer les sommes (i) $\displaystyle\sum_{k=1685}^{1750} 1$; (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2k+1)$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=3}^{6} k^2$; (iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \ln(k)$.

Exercice 10. Écrire les sommes suivantes de manière « condensée » en utilisant le symbole $\sum$: (i) La somme des 30 premiers entiers impairs ; (ii) La somme des 11 premiers cubes d'entiers strictement positifs ; (iii) La somme $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$; (iv) La somme $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$

Exercice 11. Calculer, en fonction de l'entier n, les sommes et produits suivants : (i) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$; (ii) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n$; (iii) $\prod_{k=1}^{n}(-1)^k$; (iv) $\prod_{k=1}^{n}(-1)^n$.

Exercice 12. (1) Déterminer a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

(2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

(1) La somme des entiers de 1 à n vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) La somme des entiers impairs de 1 à $2n-1$ vaut n^2.

(3) La somme des carrés des entiers de 1 à n vaut $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (utiliser la question précédente et intervertir l'ordre de sommation).

(4) En déduire la somme des carrés des entiers pairs puis la somme des carrés des entiers impairs.

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 14. (1) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(a_{k-1} - a_k)$.

(2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k \times k!)$ en écrivant $k \times k!$ comme la différence de deux factorielles successives.

Exercice 15. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = (a_0 + a_n)\,\frac{n+1}{2}.$$

Exercice 16. Calculer les sommes suivantes : (a) $\sum_{k=1}^{n}(2+3k)^2$; (b) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

Exercice 17. (1) Rappeler la définition de $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(2) Montrer que $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n-1)!\,(n+1)}$.

(3) Montrer que $(n+3)\,n! - (n-1)(n-1)! = (n-1)!\,(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)!\,(n+1)}{n}$.

3. Dénombrement élémentaire

Exercice 18. (1) Déterminer les coefficients binomiaux $\binom{0}{k}$, $\binom{1}{k}$, $\binom{2}{k}$, $\binom{3}{k}$ et $\binom{4}{k}$ pour toutes les valeurs possibles de k.

(2) Déterminer les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$, en supposant pour les deux derniers que $n \geqslant 1$

Exercice 19. Soient n, k deux nombres entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

(1) Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(2) Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(3) En utilisant cette formule, déterminer tous les nombres $\binom{n}{k}$ pour $n \leqslant 10$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ (triangle de Pascal).

Exercice 20. Développer $(a+b)^6$ et $(a-b)^7$ en utilisant la formule du binôme [1].

Exercice 21. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p} = 0$.

Exercice 22. Combien y a-t-il d'injections [2] d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments ?

Exercice 23. Combien y a-t-il de bijections [3] entre deux ensembles à n éléments ?

---

1. Si vous ne connaissez pas la **formule du binôme**, faites une recherche sur internet.
2. Si vous ne connaissez pas la définition d'une **injection**, faites une recherche sur internet.
3. Si vous ne connaissez pas la définition d'une **bijection**, faites une recherche sur internet.