Filtrage analogique

Olivier Company *

GMP, Semestre 4, année 2016-2017

1 But

L'utilisation de capteurs est nécessaire :
— pour recueillir des informations sur l'état d'un système
— pour effectuer une mesure ou un enregistrement de paramètres

Le capteur est un système qui doit être sensible à la grandeur à mesurée, mais dont les informations sont une image de la réalité qui, de plus, peut être perturbée par d'autres phénomènes. Ces perturbations font que le signal délivré par le capteur contient à la fois l'information qui nous intéresse, mais également d'autres informations. Il faut donc faire le tri pour ne retenir que l'information qui nous intéresse.

Par exemple prenons un accéléromètre (mesure de l'accélération). Il en existe plusieurs sortes reposant sur des principes physiques variés. Ils sont utilisés par exemple :
— pour les engins militaires (très précis et très coûteux)
— pour les mesures en mécanique ou robotique
— pour les systèmes d'airbags et l'ESP dans les véhicules
— dans les téléphones portables, tablettes ou les manettes de jeu (moindre qualité)

Par exemple, quand ces capteurs sont installés sur un véhicule qui se déplace ou sur un robot, ils perçoivent aussi bien l'accélération liéee au déplacement que l'accélération liée aux vibrations. Dans cet usage, seule l'information donnant l'accélération globale du robot ou du véhicule nous intéresse. Il faut donc supprimer les informations inutiles. Comme la fréquence des vibrations est plus grande que la gamme de fréquence des accélérations du véhicule, il faut être capable de trier et de sélectionner une plage de fréquences donnée dans le signal. C'est le filtrage...

Nous allons donc voir comment extraire l'information qui nous intéresse d'un signal donné.

2 Aspects temporel et fréquentiel d'un signal

2.1 Définition

Un signal est l'évolution d'une grandeur physique continue en fonction d'une autre (qui est généralement le temps ou l'espace).

Nous nous intéresserons ici à des grandeurs physiques évoluant au cours du temps (voir figure 1) qui sont transformées en grandeurs électriques (tension) par des capteurs.

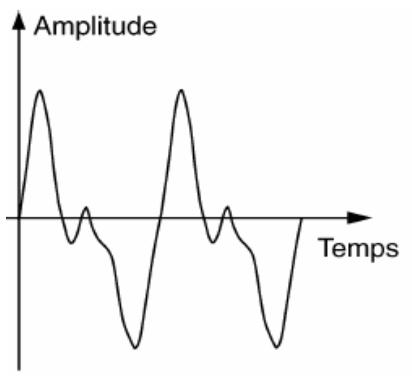

FIGURE 1 – Exemple de signal évoluant au cours du temps

*IUT Nîmes, Département GMP, Université de Montpellier (company@lirmm.fr)

Voici quelques exemples de signaux :
— évolution de la température à l'intérieur d'un four mesurée par un capteur de température
— évolution de la pression accoustique en fonction du temps avec un microphone
— évolution d'un angle au cours du temps à l'aide d'un potentiomètre monté en pont diviseur
— évolution d'une vitesse aucours du temps à l'aide d'une génératrice tachymétrique
— évolution de la déformation d'une poutre (corps d'épreuve) sous l'effet d'une force mesurée par des jauges de déformation
— évolution de la distance de la surface d'une pièce par rapport à un déplacement rectiligne mesuré par un rugosimètre
— ...

2.2 Aspect fréquentiel

Joseph Fourier a montré que tout signal $x(t)$ périodique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ peut se développer sous la forme d'une série selon l'équation 1.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \tag{1}$$

La transformation de Fourier permet de trouver les composantes fréquentielles d'un signal borné $x(t)$ vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ bornée avec l'équation 2.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{2}$$

avec $\omega = 2\pi f$.
Nous trouvons ainsi, pour chaque fréquence f, l'amplitude de la composante harmonique dans le signal $x(t)$.

3 Exemple

Soit le signal carré symétrique de la figure 2. On montre que ce signal peut s'écrire sous la forme de la somme des termes d'une série :

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[sin\omega t + \frac{sin3\omega t}{3} + \frac{sin5\omega t}{5} + ...\right] \tag{3}$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

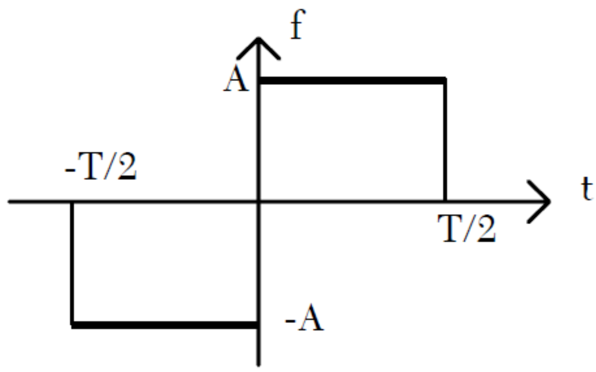

FIGURE 2 – Evolution de l'amplitude d'un signal carré symétrique

La reconstruction du carré à partir de ses composantes de Fourier nécessite un nombre élevé d'harmoniques (termes de la série), comme l'illustre la figure 3 :
— $n = 1$ (1 sinusoïde !) en pointillés
— $n = 1..3$ en gras
— $n = 1..21$ en trait léger
Nous en concluons donc :
— qu'un signal périodique est composé de plusieurs fréquences distinctes et d'une valeur continue
— qu'un signal quelconque est composé d'un specte continu de fréquences (exemple signal sonore avec des fréquences dites graves de l'ordre de quelques dizaines de Hertz et des fréquences dites aigües supérieures à 10kHz)

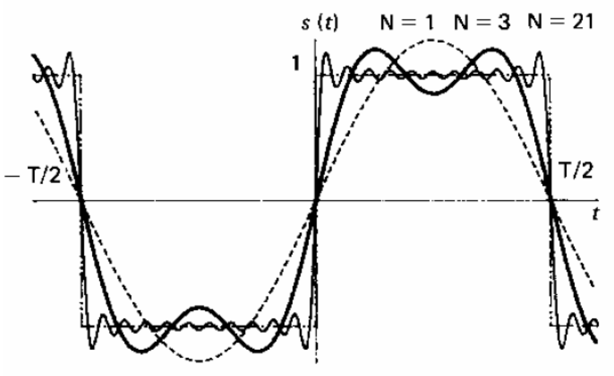

FIGURE 3 – Signal carré reconstitué à partir de plusieurs harmoniques

Nous allons donc nous attacher à trouver des moyens de sélectionner les fréquences qui portent l'information que nous recherchons à l'intérieur d'un signal (par exemple recherche de l'information relative à la rugosité d'une pièce dans un signal représentant l'évolution de la surface d'une pièce dans une direction).

4 Modélisation en régime temporel

L'information délivrée par les capteurs est souvent de nature électrique. Nous allons donc voir ici comment, à l'aide d'un montage électronique, sélectionner l'information que nous recherchons à l'intérieur d'un signal électrique. La manière la plus classique de procéder est d'utiliser un circuit RC ou CR.

4.1 Modélisation du circuit RC

Le circuit RC que nous étudions est présenté sur la figure 4. La tension que nous souhaitons filtrer est la tension d'entrée V_e. La tension filtrée que nous obtenons en sortie est la tension V_s.

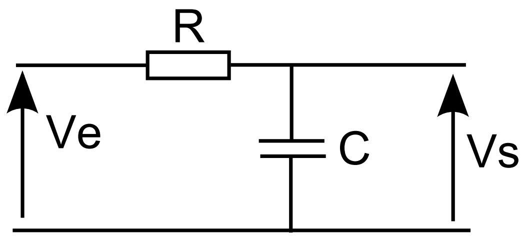

FIGURE 4 – Filtre RC

L'équation différentielle s'écrit :

$$RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t) \tag{4}$$

En posant $\tau = RC$ (nous appellerons τ la constante de temps, elle est assimilable à un temps exprimé en secondes) :

$$\tau\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t) \tag{5}$$

La résolution de cette équation différentielle pour trouver $v_s(t)$ dépend de l'entrée $v_e(t)$. Nous condidérons maintenant la réponse à un échelon (c'est à dire à un passage de $v_e(t)$ de 0 à une valeur finie constante A. Ce changement de valeur s'effectue à $t = 0$).

Nous obtenons alors :

$$v_s(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{6}$$

Un tracé de $V_s(t)$ obtenu à l'équation 6 est donné sur la figure 5.

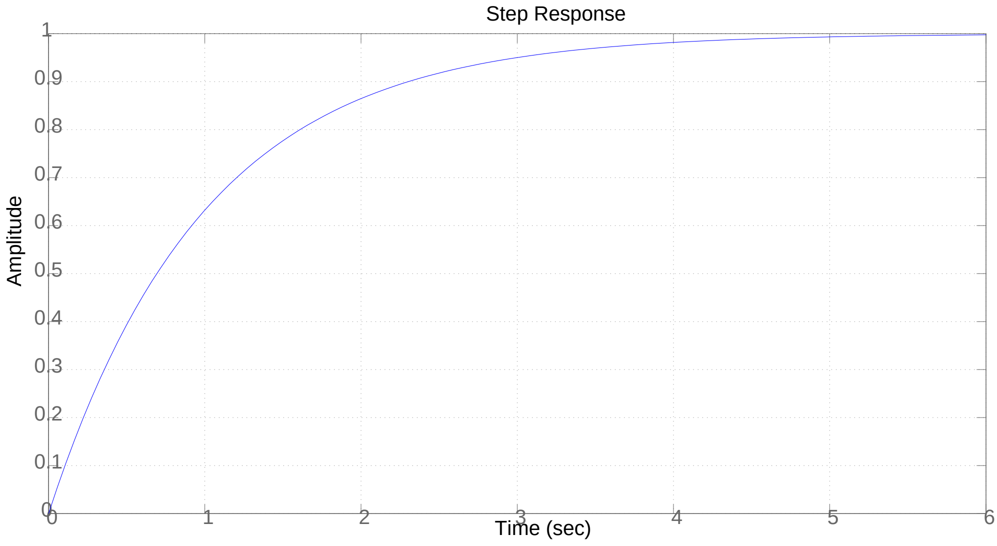

FIGURE 5 – Réponse à un échelon unitaire d'un filtre RC passif avec $\tau = 1$

4.2 Modélisation du circuit CR

Le schéma électrique du Filtre CR s'obtient en permutant la résistance et le condensateur dans la figure 4 L'équation différentielle s'écrit :

$$RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = RC\frac{dv_e(t)}{dt} \tag{7}$$

En posant $\tau = RC$:

$$\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v_s(t) = \frac{dv_e(t)}{dt} \tag{8}$$

5 Modélisation en régime fréquentiel (harmonique)

Comme nous l'avons vu precedemment, un signal peut être considéré comme la somme (infinie) de composantes sinusoïdales (harmoniques). Pour étudier le comportement d'un filtre, il suffit de connaître sa réponse pour chacune des fréquences d'entrée. Nous connaîtrons ainsi les fréquences qu'il laisse passer et celles qu'il retient.

Pour cela, nous posons $(\omega = 2\pi f)$:

$$\underline{v_e}(t) = \underline{V_e}e^{j\omega t} \tag{9}$$

et

$$\underline{v_s}(t) = \underline{V_s}e^{j\omega t} \tag{10}$$

Après simplification, l'équation différentielle s'écrit :

$$\tau j\omega\underline{V_s} + \underline{V_s} = \underline{V_e} \tag{11}$$

Soit le rapport $\underline{H}(j\omega)$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + \tau j\omega} \tag{12}$$

Nous posons $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$, pulsation propre. Nous avons donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \tag{13}$$

$\underline{H}(j\omega)$ est apelée la fonction de transfert (c'est un nombre complexe) du filtre.
Le module de $\underline{H}(j\omega)$ correspond à l'atténuation d'un signal sinusoïdal périodique de pulsation ω traversant le filtre.
L'argument de $\underline{H}(j\omega)$ correspond au déphasage subi par un signal sinusoïdal périodique traversant le filtre.

Le module de $\underline{H}(j\omega)$, appelé le gain $G(\omega)$ s'exprime :

$$G(\omega) = \|\underline{H}(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{14}$$

Pour plus de commodité, on exprime $G(\omega)$ en décibels (dB), en posant la définition suivante :

$$G_{dB}(\omega) = 20logG(\omega) \tag{15}$$

$$G_{dB}(\omega) = -10log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \tag{16}$$

L'argument de $\underline{H}(j\omega)$ est noté $\phi(\omega)$, angle de déphasage (exprimé en degrés ou en radians).

$$\phi(\omega) = Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = -Arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{17}$$

$$\phi(\omega) = -Atan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{18}$$

Concrètement, l'évolution de l'amplitude (plus exactement $G_{dB}(\omega)$) et de la la phase en fonction de la fréquence se représentent sur une échelle logarythmique en pulsation (voir figure 6). Cette représentation s'appelle le *diagramme de Bode*.

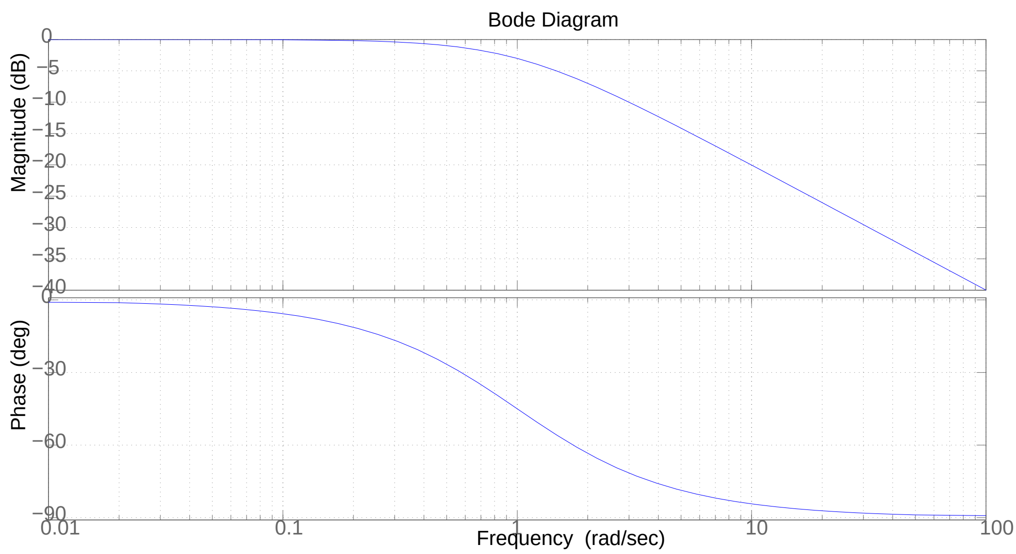

FIGURE 6 – Diagramme de bode d'un circuit RC passif avec $\omega_0 = 1$

Nous constatons que le filtre que nous venons d'étudier, laisser passer quasi-inttégralement toutes les pulsations inférieures à ω_0 et atténue toutes fréquences supérieures à ω_0. Nous dirons que ce filtre est un *filtre passe-bas*.

Si nous étudions le circuit CR, nous constaterions qu'il s'agit d'un filtre qui retient les basses pulsations et transmet les hautes pulsations. Nous dirons qu'il s'agit d'un filtre *passe-haut*.

Il existe également des filtres *passe-bande* qui retiennent les basses pulsations aisi que les hautes pulsations pour ne laisser passer que les pulsations comprises entre deux fréquences. Ce type de filtre peut s'obtenir par combinaison d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut.

6 Combinaison de filtres

Il est possible de monter en cascade plusieurs filtres. Dans ce cas la sortie du premier filtre est connectée à l'entrée du second et ainsi de suite autant qu'il y a de filtres.

Nous pouvons ainsi enchaîner un filtre avec un filtre identique afin d'augmenter sa sélectivité. La figure 7 représente le résultat obtenu en cascadant le filtre utilisé dans la figure 6 avec un filtre identique.

La figure 8 représente le diagramme de Bode d'un filtre passe haut (de type CR) dont la pulsation de coupure est $10rad.s^{-1}$.

La cascade des filtres passe haut (figure 8) et passe bas (figure 6) donne le filtre passe bande de la figure 9.

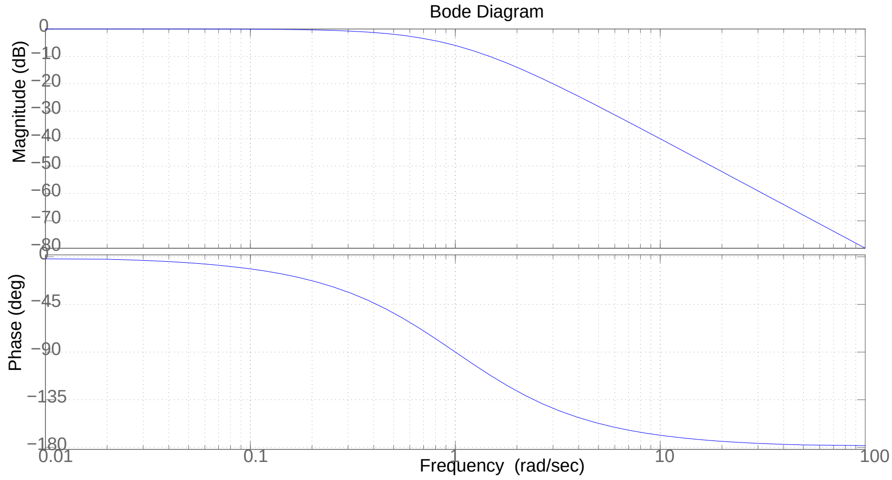

FIGURE 7 – Diagramme de bode d'un circuit RC passif avec $\omega_0 = 1$ suivi en cascade du même filtre

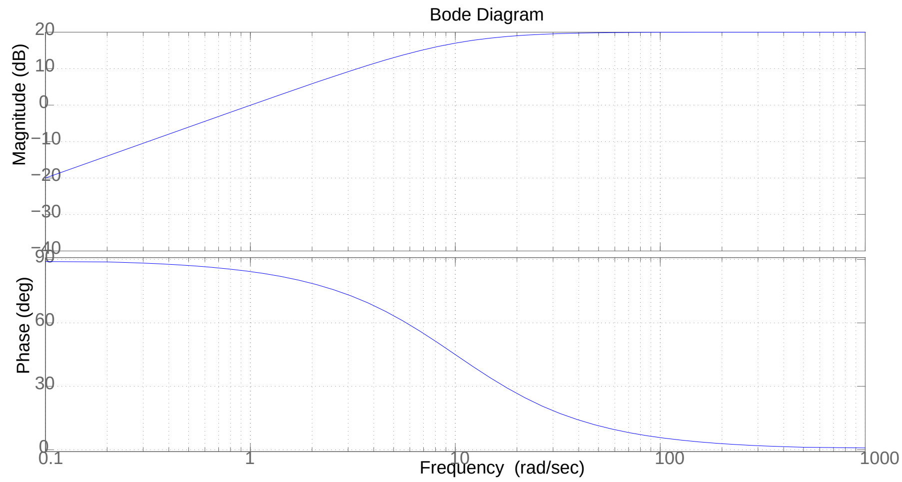

FIGURE 8 – Diagramme de bode d'un circuit CR passif avec $\omega_0 = 10 rad.s^{-1}$

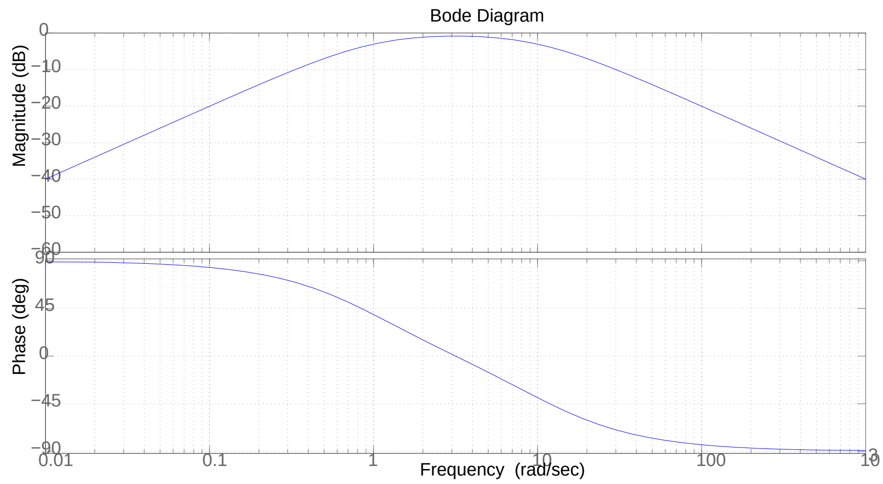

FIGURE 9 – Diagramme de bode d'un filtre passe bande obtenu en cascadant un passe bas et un passe haut