Université de Montpellier **Année Universitaire 2023-24**
CAPES Interne de Mathématiques

Un sujet de la session 2023 :

Sujet 2

Un enseignant a proposé l'exercice donné en **annexe 1** à une classe de collège.

1. Citer deux compétences particulièrement mobilisées dans cet exercice.
2. Analyser les réponses d'élèves données en **annexe 2** au regard de ces compétences.
3. Exposer une correction de l'exercice telle qu'elle pourrait être présentée à une classe de collège.
4. Présenter un exercice qui fait intervenir une ou plusieurs suites pour modéliser une situation concrète. Motiver le choix de cet exercice.

Annexe 1

Énoncé
ACO est un triangle tel que $\widehat{OAC} = 36^\circ$ et $\widehat{OCA} = 35^\circ$. Le point B est tel que O soit le milieu du segment [BC]. Le point A' est le symétrique du point A par rapport au point O. Le quadrilatère ABA'C est-il un rectangle ? *Justifier soigneusement la réponse.*

Annexe 2

Productions d'élèves

Élève 1 :

Je suppose que le quadrilatère est rectangle.

$90 - 35 = 55^\circ$

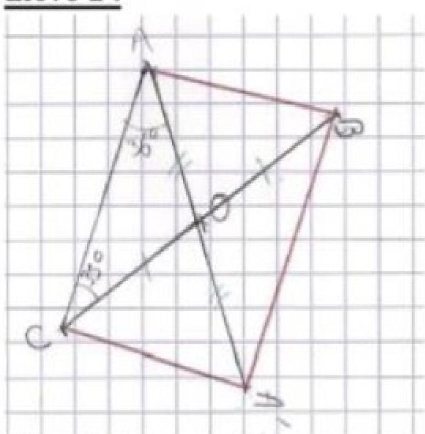
$90 - 36 = 54^\circ$

$180 - 109 = 71^\circ$

$54 + 71 + 55 = 180^\circ$

Donc le quadrialète est un rectangle.

Élève 2 :



\- Selon nous ce n'est pas un rectangle -

On essaye de voir si l'angle $\widehat{AOC}$ est un angle droit :

Comme la somme des angles d'un triangle est égal à 180° :

$180 - (OAC + ACO)$
$= 180 - (36 + 35)$
$= 109$

L'angle AOC n'est pas égal à 90°, ce n'est donc pas un angle droit.

Conclusion : ce n'est pas un rectangle.

Exemples de sujets de la session 2022 :

Sujet 1

Un enseignant a proposé l'exercice de l'annexe 1 à des élèves de seconde.

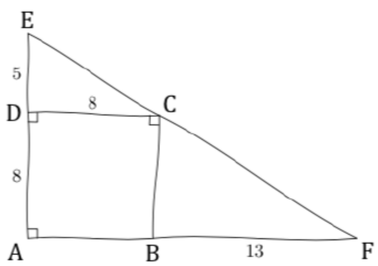
1. Analyser les productions d'élèves données en annexe 2 au regard des compétences « Raisonner » et « Communiquer ».
2. Proposer une correction de l'exercice telle qu'elle pourrait être présentée à une classe de collège puis à une classe de seconde, en utilisant un repère.
3. Présenter un exercice d'optimisation de niveau lycée dont la résolution donne lieu à une conjecture. Motiver le choix de cet exercice.

Annexe 1

Énoncé : un problème d'alignement

La figure ci-dessous est dessinée à main levée. Les points A, D, E sont alignés et les points A, B, F sont alignés. Les angles droits sont codés sur la figure.

Les points E, C et F sont-ils alignés ?



Annexe 2

Productions d'élèves :

Élève 1

On utilise le théorème de Pythagore (les triangles sont tous rectangles).

$EC^2 = 5^2 + 8^2 = 89$ avec la calculatrice, on trouve EC = 9, 434

$CF^2 = 8^2 + 13^2 = 233$ avec la calculatrice, CF = 15, 264

On prend le grand triangle $EF^2 = 13^2 + 21^2 = 610$ donc EF= 24, 698

EC + CF = EF donc les points sont alignés.

Élève 2

(CB) parallèle à (EA) donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{FB}{FA} = \frac{FC}{FE} = \frac{CB}{AE}$

$\frac{13}{21} = \frac{8}{13} \approx 0,62$ donc les points sont alignés.

Sujet 2

Un enseignant a proposé à des élèves de seconde l'exercice figurant en annexe 1.

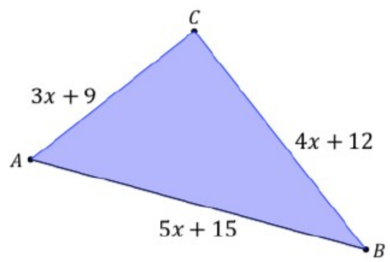
1. Sur quels prérequis s'appuie la résolution de cet exercice ? Quels peuvent être les objectifs de formation visés ?
2. Analyser les productions d'élèves figurant en annexe 2 en mettant en évidence les réussites et les erreurs.
3. Exposer une correction de l'exercice telle qu'elle pourrait être présentée devant une classe, en précisant le niveau choisi.
4. Présenter un exercice de niveau lycée sur le thème des suites numériques et permettant de mobiliser la compétence « Modéliser ». Motiver le choix de cet exercice.

Annexe 1

Énoncé

x désigne un nombre positif.

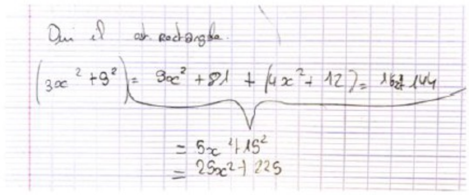
Le triangle représenté ci-contre a-t-il un angle droit ?



Annexe 2

Productions d'élèves

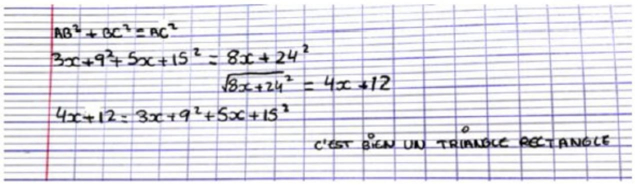
Élève 1



Oui il est rectangle.

$$\underbrace{(3x^2+9^2) = 9x^2+81 + (4x^2+12) = \cancel{162}\ 144}_{\substack{= 5x^2+15^2 \\ = 25x^2+225}}$$

Élève 2



$AB^2+BC^2=AC^2$

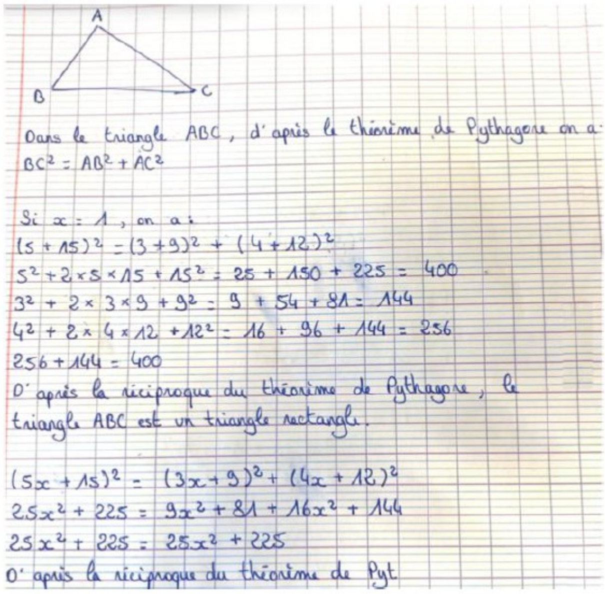
$3x+9^2+5x+15^2 = 8x+24^2$

$\sqrt{8x+24^2} = 4x+12$

$4x+12 = 3x+9^2+5x+15^2$

C'EST BIEN UN TRIANGLE RECTANGLE

Élève 3



Dans le triangle ABC, d'après le théorème de Pythagore on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Si $x = 1$, on a :

$(5+15)^2 = (3+9)^2 + (4+12)^2$

$5^2 + 2\times 5 \times 15 + 15^2 = 25 + 150 + 225 = 400$

$3^2 + 2\times 3\times 9 + 9^2 = 9 + 54 + 81 = 144$

$4^2 + 2\times 4\times 12 + 12^2 = 16 + 96 + 144 = 256$

$256 + 144 = 400$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est un triangle rectangle.

$(5x+15)^2 = (3x+9)^2 + (4x+12)^2$

$25x^2 + 225 = 9x^2 + 81 + 16x^2 + 144$

$25x^2 + 225 = 25x^2 + 225$

D'après la réciproque du théorème de Pyt

Un sujet de la session 2021 :

Sujet 1

Un enseignant a proposé à des élèves le problème donné en annexe 1.

1. À quel niveau de classe peut-il proposer ce problème ?
2. Présenter à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique une animation permettant de conjecturer la réponse au problème.
3. Analyser les productions d'élèves données en annexe 2 au regard de la compétence *Représenter*.
4. Proposer une correction de ce problème, de niveau lycée, faisant intervenir une fonction.
5. Présenter un exercice sur le thème « optimisation » dont la résolution peut conduire à émettre une conjecture. Motiver le choix de cet exercice.

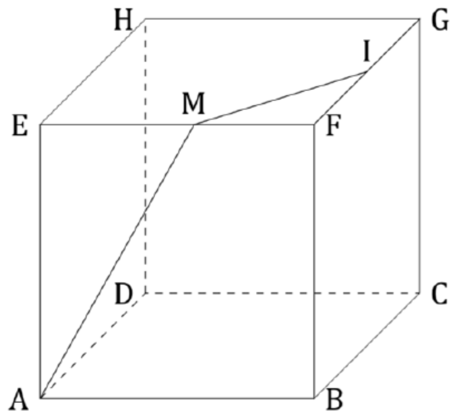
Annexe 1

La fourmi sur le cube

Une fourmi se déplace sur le cube représenté ci-contre.

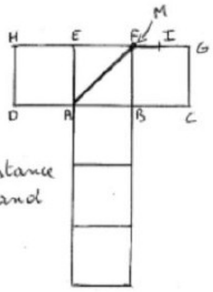
Elle part du point A, passe par un point M du segment [EF], puis arrive au point I milieu du segment [FG]. Sur chacune des faces empruntées, son trajet est rectiligne.

Y-a-t-il une position du point M sur le segment [EF], pour laquelle la distance parcourue par la fourmi est minimale ? Justifier votre réponse.



Annexe 2

Productions d'élèves

Élève 1	Élève 2
J'ai construit un cube de coté 6 cm. J'ai mesuré AE + EI = 12,5 cm puis AF + FI = 11,5 cm la distance diminue tout le temps, donc elle est minimale quand M=F	j'ai tracé le patron d'un cube. On voit que la distance est minimale quand M est en F. 

Exemple de sujets de la session 2019 :

Travail demandé

Un enseignant a proposé l'exercice dont l'énoncé figure en annexe 1. L'annexe 2 présente la réponse d'un élève à la question 1 de cet exercice.

1. Analyser la production de cet élève au regard des compétences « Chercher », « Modéliser » et « Communiquer ».
2. Apporter les compléments nécessaires à la copie de l'élève afin qu'elle puisse servir de corrigé.
3. Exposer une autre méthode de résolution de l'exercice de l'annexe 1 telle qu'elle pourrait être présentée devant une classe de collège.
4. Présenter un autre problème utilisant les équations de droites que l'on pourrait proposer en classe de première. Motiver ce choix.

Annexe 1

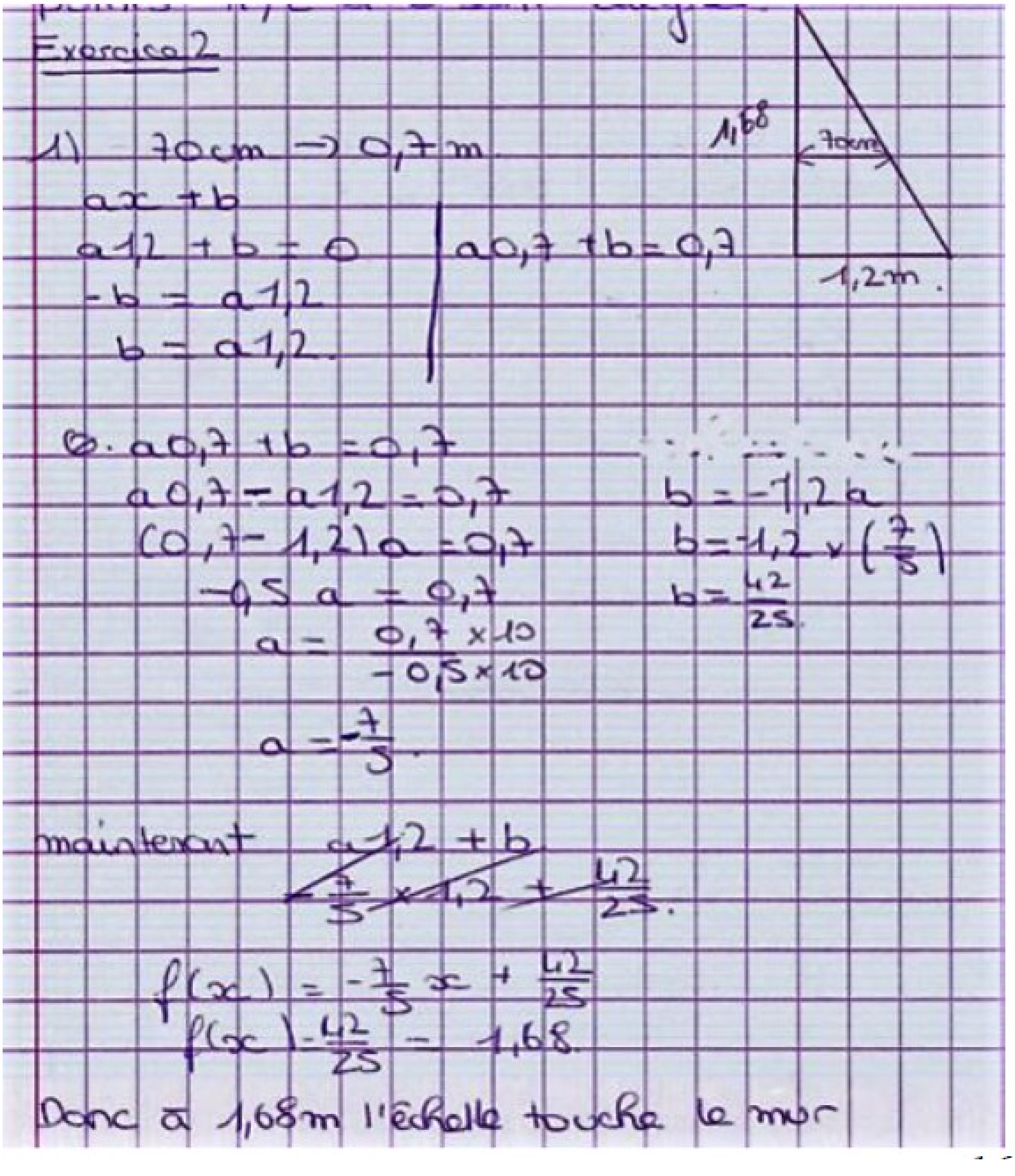
Énoncé : échelle de meunier (*source : Hachette Education 2de Barbazo*)

On a posé une échelle contre un mur comme indiqué sur le schéma ci-contre. Le pied de l'échelle se trouve à 1,20 m du mur. L'échelle touche le coin d'une caisse cubique de côté 70 cm posée contre ce mur.

1. À quelle hauteur l'échelle touche-t-elle le mur?
2. Quelle est la longueur de l'échelle? Donner le résultat en mètres arrondi au centimètre.

Annexe 2

Production d'un élève



Exercice 2

1) $70cm \rightarrow 0{,}7\,m$

$ax + b$

$a1{,}2 + b = 0$ | $a0{,}7 + b = 0{,}7$

$-b = a1{,}2$

$b = a1{,}2.$

② $a0{,}7 + b = 0{,}7$

$a0{,}7 - a1{,}2 = 0{,}7$

$(0{,}7 - 1{,}2)a = 0{,}7$

$-0{,}5\, a = 0{,}7$

$a = \frac{0{,}7 \times 10}{-0{,}5 \times 10}$

$a = -\frac{7}{5}.$

$b = -1{,}2\, a$

$b = -1{,}2 \times \left(\frac{7}{5}\right)$

$b = \frac{42}{25}.$

maintenant $a1{,}2 + b$

$\cancel{-\frac{7}{5} \times 1{,}2 + \frac{42}{25}}.$

$f(x) = -\frac{7}{5}x + \frac{42}{25}$

$f(x) = \frac{42}{25} = 1{,}68.$

Donc à 1,68m l'échelle touche le mur

Exemple de sujets de la session 2018 :

Travail demandé

1) Citer **brièvement** une méthode de résolution niveau collège et une méthode de résolution niveau lycée du problème posé en annexe.

Le candidat ou la candidate choisira de présenter la suite de ce sujet **au niveau collège ou au niveau lycée**.

2) Présenter la description d'une mise en œuvre en classe de la résolution du problème posé en annexe. Préciser en particulier :
   - le niveau de la classe choisie et les adaptations éventuelles de l'énoncé ;
   - la place que pourrait occuper ce problème dans la progression et les objectifs de formation ;
   - les modalités de travail des élèves (organisation de la classe, déroulement, temps de régulation) et la plus-value apportée par le numérique ;
   - les difficultés que pourrait rencontrer un élève, ainsi que les coups de pouce éventuels.

3) *[F] Rédiger, sur la fiche à remettre au jury, une trace écrite telle qu'elle pourrait figurer dans le cahier d'un élève à l'issue de cette séance.*

4) a) Présenter un autre exercice du type « résolution de problèmes » mettant en œuvre plusieurs stratégies de résolution, notamment dans le cadre de la liaison collège-lycée. Des résolutions pourront s'appuyer sur l'outil numérique. Préciser les sources et les objectifs visés.

   b) ***[F] Rédiger sur la fiche à remettre au jury, ou vidéo-projeter lors de l'exposé, l'énoncé de cet exercice.***

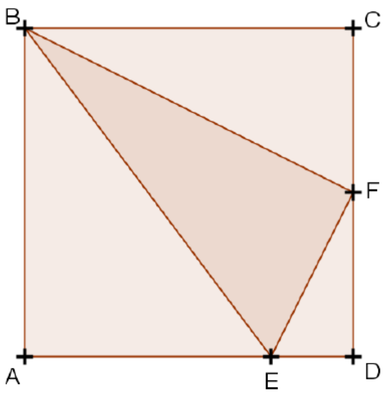
Annexe :

Énoncé :

ABCD est un carré, *F* est le milieu de [*DC*] et *E* est le point du segment [*AD*] tel que

$$AE = \frac{3}{4}AD$$

Quelle est la nature du triangle *EBF* ? Justifier.



Exemple de sujets de la session 2015 :

I. Travail à présenter à l'oral :

1) Analyser les productions d'élève de seconde (annexe 2) sur le problème ouvert reproduit ci-dessous (annexe 1) : indiquer le type de raisonnement repéré, mettre en évidence les réussites des élèves et indiquer les origines possibles de leurs éventuelles erreurs.

2) Présenter d'autres méthodes de résolution de ce problème que les élèves étudient au lycée.

3) Décrire la mise en œuvre du logiciel de géométrie pour le ou les exercice(s) proposé(s) en II 2) y faisant appel, en analysant la pertinence de l'utilisation du logiciel.

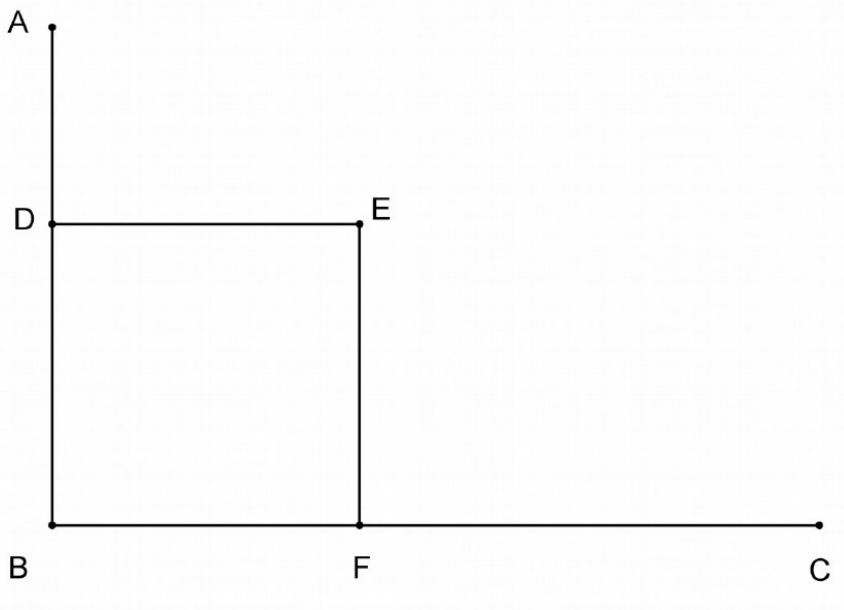
II. Travail à présenter à l'écrit sur la fiche :

1) Rédiger une solution du problème ouvert de l'annexe 1 en employant l'une des méthodes présentées en I.2).

2) Rédiger les énoncés (en indiquant les sources) de un ou deux problème(s) ouvert(s) permettant de travailler en seconde le raisonnement en géométrie. L'un au moins devra donner lieu à un travail avec un logiciel de géométrie.

Annexe 1 :

Un problème ouvert en classe de seconde



$BFED$ est un carré de côté 8.

$FC = 13$ $DA = 5$

Les points A, E et C sont-ils alignés ?

Annexe 2 :

Extraits de productions d'élève

Extrait 1 : *Si les points sont alignés alors (Thales)*

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

$\frac{AD}{AB}=0{,}38$ $\frac{DE}{BC}=0{,}38$ $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$

les points sont alignés.

Extrait 2 : *Aires*

$A_{ADE}=\frac{5\times 8}{2}$ $A_{DEFB}=8^2=64$ $A_{FCE}=\frac{8\times 13}{2}=52$ $A_T=136$ $A_{ABC}=\frac{13\times 21}{2}=136{,}5$

L'aire totale est légèrement ≠ de l'aire du grand triangle ABC donc A,C,E ne sont pas alignés.

Extrait 3 : *Par Pythagore*

$$AE+EC\overset{?}{=}AC$$

$AE=\sqrt{5^2+8^2}$ $EC=\sqrt{8^2+13^2}$ $AE+EC=24{,}69831865$

$AC=\sqrt{13^2+21^2}$ $AC=24{,}69817807$

On remarque que $AE+EC$ *n'est pas tout à fait égal à* AC

Extrait 4 : *Par Thalès*

Sachant que dans le triangle ABC, DE // BC (car $DEBF$ carré) on a normalement, en considérant que A, E, C alignés,

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$$

$\frac{AD}{AB}=0{,}3846153846$ $\frac{DE}{BC}=0{,}3809$ $\frac{AE}{AC}=0{,}3819$

On n'obtient pas tout à fait les mêmes valeurs.

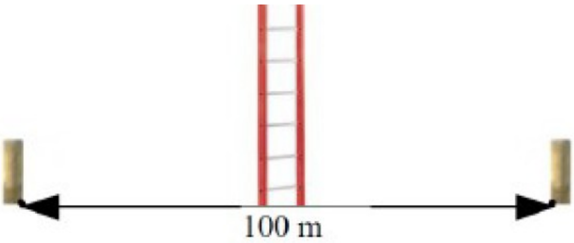
Exercices

Exercice 1 :

Deux poteaux sont espacés de 100 m.

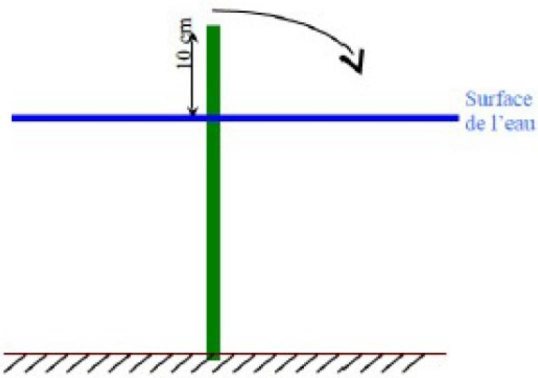
Julien a attaché aux pieds de ces deux poteaux, une ficelle de 101 m de long et la soulève en son milieu.

Une échelle de 3 m peut-elle passer verticalement sous la ficelle ?

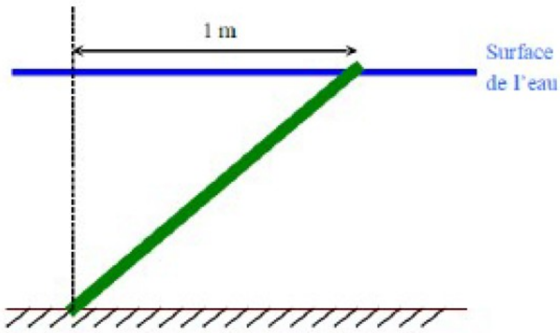


Exercice 2 :

Un roseau est planté verticalement au fond de l'eau.
On le penche jusqu'à ce que le sommet affleure la surface de l'eau.



Position où le roseau est planté verticalement



Position où le sommet du roseau affleure la surface de l'eau

Quelle est la profondeur de l'eau ?

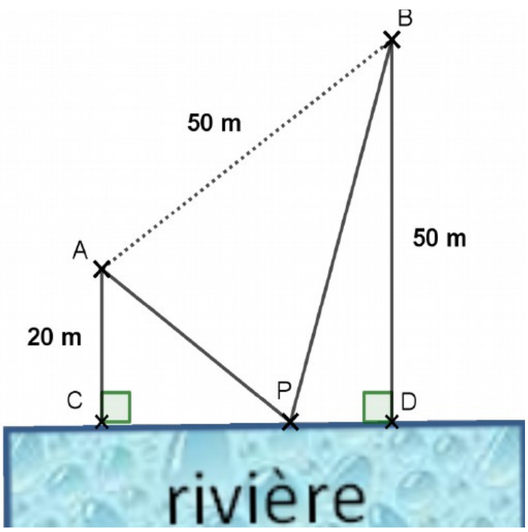
Attention, les dessins ne sont pas faits à l'échelle.

Exercice 3 :

Deux réservoirs A et B, distants de 50 m, se trouvent respectivement à 20 m et à 50 m du même côté d'une rivière supposée rectiligne. Pour remplir ces réservoirs, on les relie à la rivière par des canalisations droites, mais on ne dispose que d'une seule pompe P.
La figure ci-contre modélise la situation.

1) Calculer la distance CD.

2) Où faut-il placer la pompe P le long de la rivière pour que la longueur totale des canalisations (PA+PB) soit la plus petite possible ?



Exercice 4:

Construire deux carrés de sorte que le deuxième ait une aire double de celle du premier.

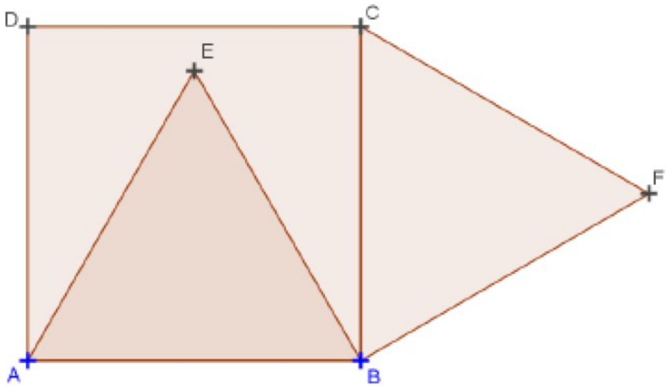
Exercice 5:

Proposer deux méthodes de résolution de l'exercice suivant l'une de niveau collège et l'autre de niveau lycée :

ABCD est un carré, les triangles ABE et BFC sont équilatéraux.

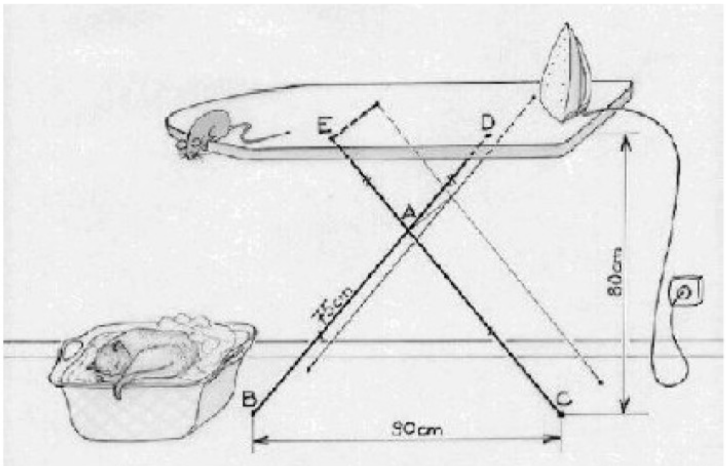
Que peut-on dire des points D, E et F ?

Justifiez votre réponse.



Exercice 6 :

Par un mercredi pluvieux, le petit Nicolas a décidé de repasser pour faire une surprise à sa maman. Il utilise la table à repasser représentée ci-dessous.



Les tiges [EC] et [BD] sont articulées en A avec AE = AD et AB = AC.
La longueur AB est égale à 75 cm. Sous la table, le point D est fixe et le point E peut être déplacé pour ajuster la hauteur.
On sait que lorsque BC égale 90 cm, la table a une hauteur de 80 cm.
Comme Nicolas est plus petit que sa maman, il règle la table pour que la hauteur soit de 60 cm.
Calculer alors l'écartement BC.

Exercice 7 :

(D_1) et (D_2) sont deux droites perpendiculaires en B.
M est un point quelconque n'appartenant pas aux droites (D_1) et (D_2).
La perpendiculaire à (D_1) passant par M coupe (D_1) en A.
La perpendiculaire à (D_2) passant par M coupe (D_2) en C.

Où faut-il placer M pour que la longueur AC soit égale à 5 unités ? Trouver toutes les positions possibles pour M.

Exercice 8:

Problème de la quadrature du rectangle *(Réf. site disciplinaire de mathématiques de l'académie d'Aix-Marseille)*

Réaliser la « quadrature d'une figure » consiste à construire un carré ayant la même aire que la figure donnée.

Dans « *Les Éléments* », livre 2, proposition XIV, Euclide (300 av JC) propose un programme de construction pour réaliser la quadrature d'un rectangle, c'est-à-dire pour construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle donné.

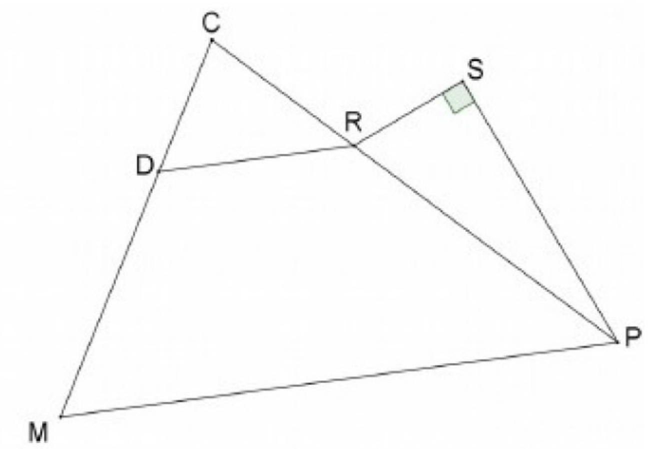
- ABCD est un rectangle tel que AB est supérieur à BC.
- Sur la demi-droite [AB) placer le point M tel que BM = BC, en prolongeant le segment [AB].
- Appeler O le milieu de [AM], puis tracer un demi-cercle de centre O passant par A.
- La droite (BC) coupe le demi-cercle tracé en un point H.
- Le carré BHGF a la même aire que le rectangle ABCD.

Le but du problème est de contrôler la méthode d'Euclide.

Exercice 9 :

Les droites (DR) et (MP) sont parallèles.
Les points C, D, M et C, R, P sont alignés.
On donne : CD = 5,6 cm
DM = 10,4 cm
CR = 7 cm
SP = 12 cm

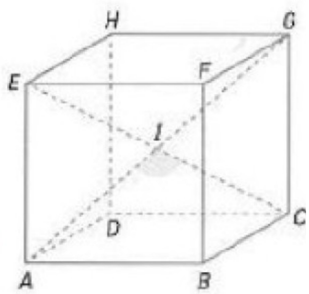
1. Calculer la longueur CM.
2. Calculer la longueur CP.
3. Calculer la longueur RS.



Exercice 10 :

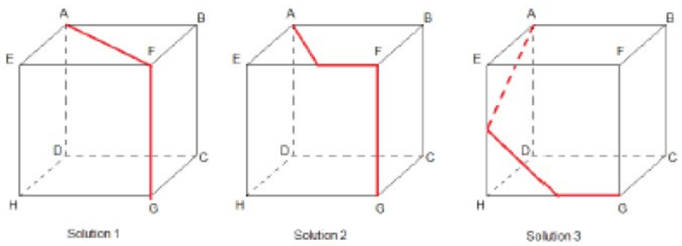
On note (c) le cube $ABCDEFGH$ ci-contre de côté 5. On note I le milieu des diagonales $[AG]$ et $[EC]$.

Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de la mesure en degré de l'angle $\widehat{AIC}$.



Exercice 11 :

Un électronicien souhaite concevoir un boitier cubique qui logera un gyroscope pour un drone. Ce boîtier a un côté de 1cm de long, il est représenté par l'un des cubes ABCDEFGH ci-dessous. L'un des problème de cet électronicien est qu'il doit tirer un câble reliant le point A au point G en suivant les parois de la boîte. Il a imaginé les 3 solutions ci-dessous, il voudrait connaître la longueur du câble dans chacune d'entre elles.



Solution 1 : le câble suit la diagonale [AF], puis l'arrête [FG].
Solution 2 : le câble est tiré en ligne droite de A au milieu de [EF], puis passe par F.
Solution 3 : le câble est tiré en ligne droite de A au milieu de [EH], puis jusqu'au milieu de [HG]

a. Pour chaque solution, calculer la longueur exacte du câble.

b. Quelle serait la meilleure solution qu'on pourrait envisager pour tirer ce câble en suivant les parois de manière à rendre le trajet le plus court possible ? Cette solution est-elle unique ?