

UE HAI715I - Ordres, treillis, induction

Produit direct d'ordres

Notes de cours et exercices

Faculté des sciences, Université de Montpellier

Produit direct d'ordres

C'est une notion qui vise à combiner plusieurs ordres partiels

Par exemple, on cherche à ordonner par nombre de calories par 100g des plats chez un restaurateur. Ces plats sont composés d'un poisson et d'un accompagnement ordonnés respectivement suivant leur nombre de calories aux 100g comme montré par les diagrammes de Hasse ci-dessous :

saumon (s)



bar (b)



lotte (l)

riz (r)



quinoa (q)



polenta (p)

Cela correspond à deux ensembles ordonnés

$P_1 = (\{l, b, s\}, \leq_{P_1})$ et $P_2 = (\{p, q, r\}, \leq_{P_2})$

Produit direct d'ordres

Rappel des deux ensembles ordonnés P_1 et P_2 :

saumon (s)



bar (b)



lotte (l)

riz (r)



quinoa (q)



polenta (p)

Dans le produit direct :

- Les éléments sont des couples constitués d'un élément de P_1 et d'un élément de P_2 .
Par exemple : (l, p) , (b, q) , (l, q) ou (b, p)
- L'ordre est donné par l'ordre sur chaque composante.
 - (l, p) plus petit que (b, q) car $l \leq_{P_1} b$ et $p \leq_{P_2} q$
 - (l, q) est incomparable avec (b, p) car $l \leq_{P_1} b$ mais $q \geq_{P_2} p$

Produit direct d'ordres

On rappelle que dans le produit direct :

- Les éléments sont des couples constitués d'un élément de P_1 et d'un élément de P_2 .
Par exemple : (l, p) , (b, q) , (l, q) ou (b, p)
- L'ordre est donné par l'ordre sur chaque composante.
 - (l, p) plus petit que (b, q) car $l \leq_{P_1} b$ et $p \leq_{P_2} q$
 - (l, q) est incomparable avec (b, p) car $l \leq_{P_1} b$ mais $q \geq_{P_2} p$

D'où la définition :

Le produit direct $P = P_1 \times P_2$, noté aussi (X, \leq_X)

des deux ensembles ordonnés P_1 et P_2 est défini par :

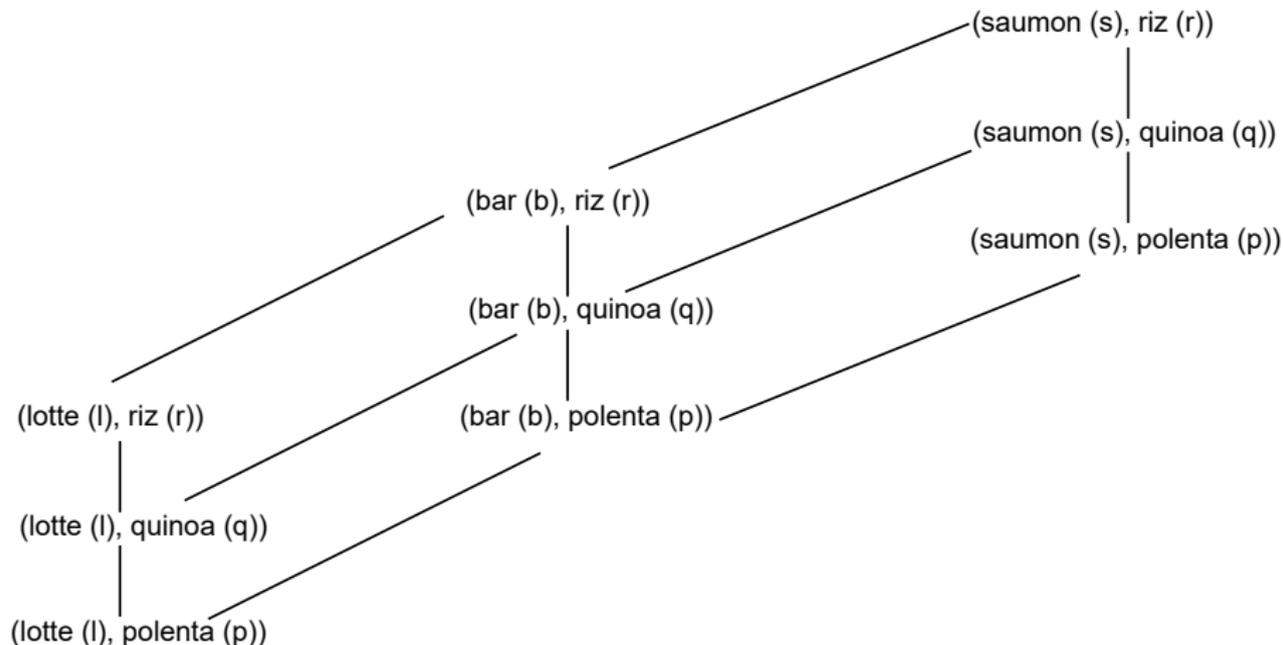
- $X = X_1 \times X_2 = \{(p_1, p_2) \mid p_1 \in X_1, p_2 \in X_2\}$
- $(p_1, p_2) \leq_X (p'_1, p'_2)$ si $p_1 \leq_{X_1} p'_1$ et $p_2 \leq_{X_2} p'_2$

Autre formulation :

$$\leq_X = \{((p_1, p_2), (p'_1, p'_2)) \mid p_1 \leq_{X_1} p'_1 \text{ and } p_2 \leq_{X_2} p'_2\}$$

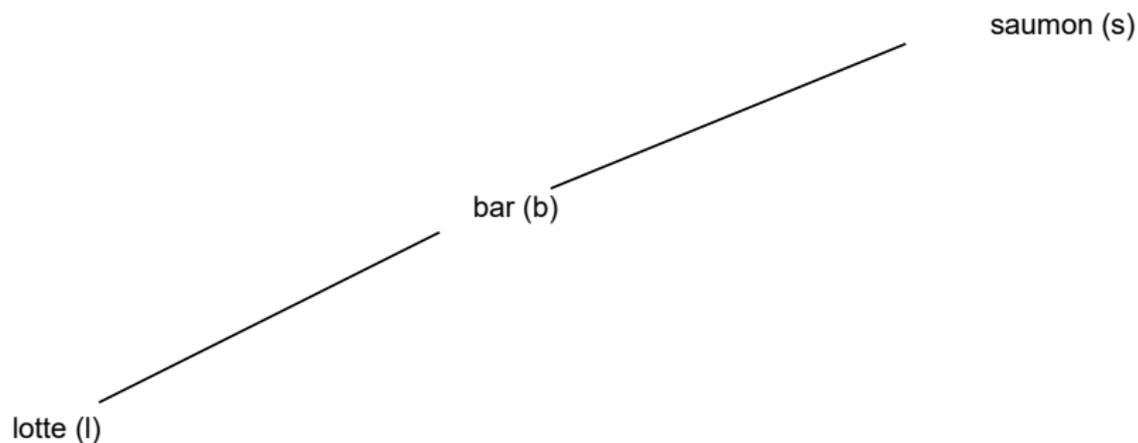
Produit direct d'ordres

Diagramme de Hasse de l'ordre des plats composés d'un poisson et d'un accompagnement chez un restaurateur par nombre de calories par 100g :



Astuce de construction à partir des diagrammes de Hasse de P_1 et P_2

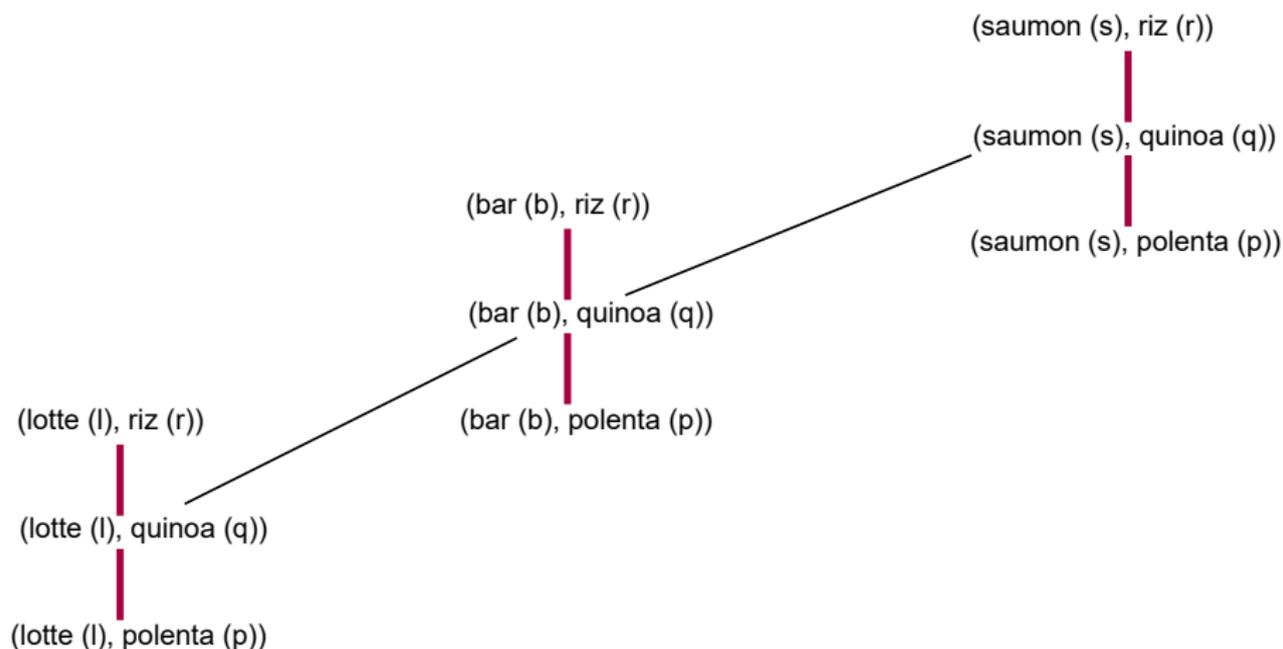
- Redessiner le diagramme de Hasse de P_1 en espaçant les éléments



Produit direct d'ordres

Astuce de construction à partir des diagrammes de Hasse de P_1 et P_2

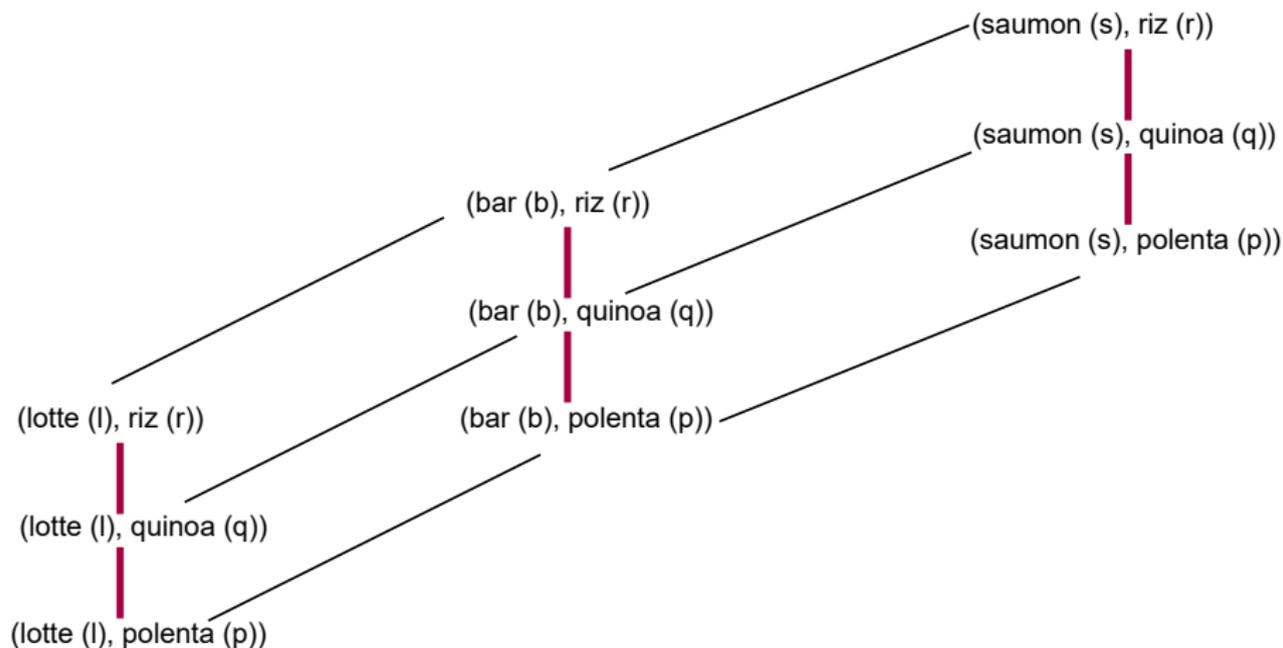
- Recopier ce diagramme de Hasse en remplaçant chaque élément x_1 de P_1 par les couples de $x_1 \times P_2$ disposés comme dans le diagramme de Hasse de P_2
- Relier chaque couple (x_1, x_2) à (x_1, x'_2) quand x_2 est couvert par x'_2 dans \leq_{x_2}



Produit direct d'ordres

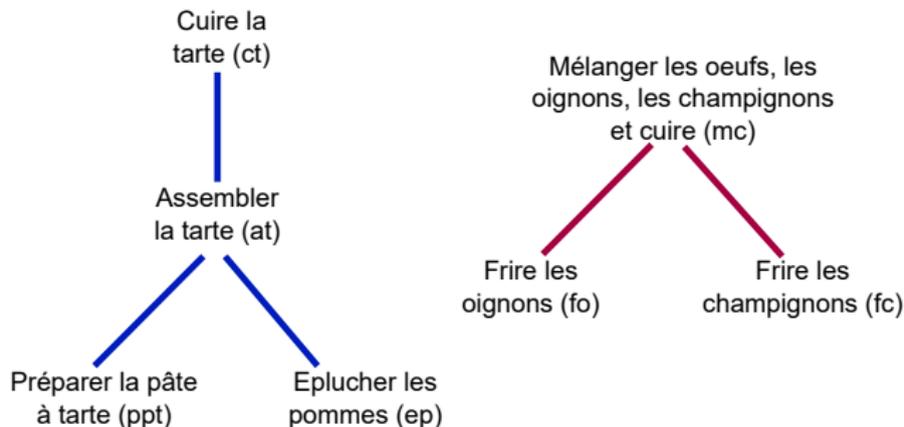
Astuce de construction à partir des diagrammes de Hasse de P_1 et P_2

- Relier chaque couple (x_1, x_2) à (x_1', x_2) quand x_1 est couvert par x_1' dans \leq_{x_1}



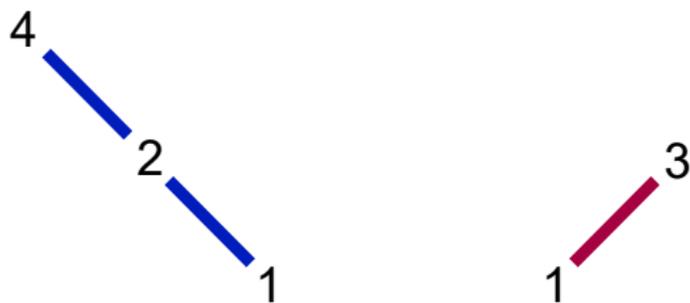
Exercice

Dessiner le diagramme de Hasse du produit direct de P_1 et P_2 qui ordonnent chronologiquement des tâches dans une recette pour réaliser une tarte aux pommes (à gauche) et dans une recette pour réaliser une omelette aux oignons et aux champignons (à droite). P_1 et P_2 peuvent se lire *doit être réalisé avant*. Comment interpréter/utiliser le résultat ?



Exercice

Dessiner le diagramme de Hasse du produit direct de P_1 et P_2 qui ordonnent des nombres par l'ordre de divisibilité. P_1 représente les diviseurs de 4 et P_2 les diviseurs de 3.



Puis amusez-vous à multiplier les nombres dans les paires (par exemple pour la paire (2, 3) vous obtiendrez $2 * 3 = 6$. Que représente l'ordre produit final? Comment généraliser?

Librement inspiré de <http://pierreaudibert.fr/tra/treillis.pdf>

Généralisation à n ensembles ordonnés

Le produit direct $P = P_1 \times P_2 \times P_n = \prod_{i \in \{1,2,\dots,n\}} P_i$, noté aussi (X, \leq_X) des ensembles ordonnés P_1, P_2, \dots, P_n est défini par :

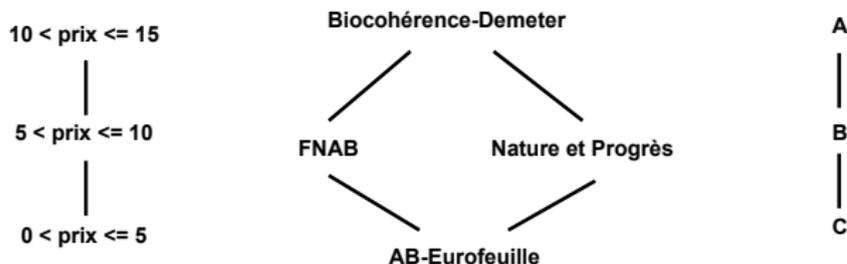
- $X = X_1 \times X_2 \dots \times X_n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_1 \in X_1, p_2 \in X_2, \dots, p_n \in X_n\}$
- $(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq_X (p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$ si $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, p_i \leq_{X_i} p'_i$

Usage des produits directs d'ensembles ordonnés

- Ce sont des espaces que l'on ne construit pas forcément (ils sont très grands), mais qui servent à se représenter abstraitement de l'information.
- On utilise la relation \leq_X seulement sur des tuples explicites qui nous intéressent, par exemple pour choisir un plat d'après les calories dans l'exemple proposé.

Exercice

Dans un magasin, un aliment peut être décrit selon plusieurs dimensions telles que : prix, label bio, nutriscore. Dessinez le produit direct des trois ordres partiels ci-dessous qui permettrait de classer des aliments :



Source du classement des labels Bio :

<https://vert.eco/articles/ab-demeter-hve-les-labels-sont-ils-vraiment-ecolos>