TD de mathématiques pour économistes
Licence 1 Economie

Mickael Beaud
Université de Montpellier

September 6, 2023

Thème 1. Calcul pour les fonctions à plusieurs variables

1 Dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 1

En utilisant la **Définition 1**, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction

$$y = 3x_1 + 5x_2$$

Exercice 2

En utilisant la **Définition 1**, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction

$$y = ax_1 + bx_2$$

où a et b sont des constantes quelconques.

Exercice 3

Soit une entreprise commercialisant deux biens, le bien 1 et le bien 2, sur un marché concurrentiel. On note x_i la quantité de bien i vendue et p_i le prix de marché du bien i, avec $i = 1, 2$. En utilisant la **Définition 1**, calculer la dérivée partielle d'ordre 1 de la fonction de recette totale de l'entreprise

$$R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

par rapport à x_2. Interpréter le résultat.

Exercice 4

Expliquer pourquoi les dérivées partielles d'ordre 1 calculées dans les exercices précédents sont des constantes.

Exercice 5

En utilisant la **Définition 1**, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction

$$y = x_1^2 x_2$$

En déduire le Taux Marginal de Substitution Technique TMST$= \frac{\partial y}{\partial x_1} / \frac{\partial y}{\partial x_2}$.

Exercice 6

En utilisant la **Définition 1**, trouver les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction

$$y = x_1 x_2$$

Exercice 7

Soit une fonction de production de type Cobb-Douglas à trois facteurs

$$y = x_1^{1/2} x_2^{1/3} x_3^{1/4}$$

Calculer la fonction de productivité marginale de chaque facteur.

Exercice 8

Soit une fonction de production de type Cobb-Douglas à quatre facteurs

$$y = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4}$$

où $A > 0$ et $0 < \alpha_i < 1$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Calculer la fonction de productivité marginale de chaque facteur.

Exercice 9

Soit une fonction de production de type Cobb-Douglas à n facteurs

$$y = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha n}$$

où $A > 0$ et $0 < \alpha_i < 1$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Calculer la fonction de productivité marginale d'un facteur i quelconque. De même pour un facteur j quelconque (procéder par analogie). En déduire le Taux Marginal de Substitution Technique $\text{TMST}_{i,j} = \frac{\partial y}{\partial x_j} / \frac{\partial y}{\partial x_i}$. Montrer que l'élasticité de substitution $\sigma_{i,j} = \frac{d\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\frac{x_i}{x_j}} / \frac{d\text{TMST}_{i,j}}{\text{TMST}_{i,j}} = 1$ quel que soit le couple (i, j).

Exercice 10

En procédant par analogie (utiliser les résultats de l'Exercice 9), donner $\text{TMST}_{2,1}$ et $\sigma_{2,1}$ pour les fonctions des Exercices 5 et 6. Donner également $\text{TMST}_{3,2}$ et $\sigma_{3,2}$ pour les fonctions des Exercices 7 et 8.

1.1 Exercice 11

Soit une fonction de production de type CES à deux facteurs

$$y = 12 \left[\frac{4}{10} x_1^{-\frac{1}{2}} + \frac{6}{10} x_2^{-\frac{1}{2}} \right]^{-2}$$

Calculer la fonction de productivité marginale de chaque facteur. Sans faire de calcul (procéder par analogie), donner $\text{TMST}_{2,1}$ et $\sigma_{2,1}$ (voir le cours).

Exercice 12

Soit une fonction de production de type CES à trois facteurs

$$y = A\left[\omega_1 x_1^{-r} + \omega_2 x_2^{-r} + \omega_3 x_3^{-r}\right]^{-1/r}$$

où $A > 0$, $r > -1$, $0 < \omega_i < 1$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Calculer la fonction de productivité marginale de chaque facteur.

Exercice 13

On suppose que le PIB d'une économie dépend du montant de capital $K(t)$ utilisé à la date t. De plus, l'efficacité avec laquelle le capital est utilisé est supposée varier dans le temps. Le PIB est donné par la fonction suivante

$$Y = f(K, t) = 0,2\,[1 + t]^{\frac{1}{2}}\,K$$

où

$$K = K_0 \exp(0,05t)$$

La dérivée totale de Y par rapport à t est

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial f(K, t)}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f(K, t)}{\partial t}$$

Interpréter ce résultat et calculer les termes de la dérivée totale.

2 Dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 1

Soit une fonction linéaire à deux variables

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

où a_1 et a_2 sont des constantes quelconques. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Interpréter les résultats.

Exercice 2

Soit une fonction linéaire à trois variables

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des constantes quelconques. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Interpréter les résultats.

Exercice 3

Soit une fonction non-linéaire à deux variables

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^4$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Arranger les résultats sous forme de gradient et de matrice Hessienne:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Exercice 4

Soit une fonction non-linéaire à trois variables

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^4 x_3^5$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Arranger les résultats sous forme de gradient et de matrice Hessienne:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_2 F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Exercice 5

Soit une fonction non-linéaire à deux variables

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Arranger les résultats sous forme de gradient et de matrice Hessienne.

Exercice 6

Soit une fonction non-linéaire à trois variables

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des constantes quelconques. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Arranger les résultats sous forme de gradient et de matrice Hessienne.

Exercice 7

Soit une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs:

$$y = 50 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Déterminer leurs signes et en donner une interprétation économique.

Exercice 8

Soit une fonction de production Cobb-Douglas à trois facteurs:

$$y = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$$

où $A > 0$ et $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Déterminer leurs signes et en donner une interprétation économique.

Exercice 9

Soit une fonction non-linéaire à trois variables

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{3x_2 + x_1 x_3} + 2\frac{x_2^3}{x_1}$$

Vérifier le théorème de Young.

3 Différentielle totale

Exercice 1

Soit une fonction (d'utilité) linéaire à deux variables

$$u(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$

Représenter la courbe de niveau $\overline{u} = 120$ dans le repère (x_1, x_2). Calculer la différentielle totale et en déduire que $\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{u=\overline{u}} = -\frac{u_1}{u_2} = -\frac{5}{3}$. Quelle est la valeur du $\text{TMS}_{2,1}$? Utiliser les points $(12, 20)$ et $(18, 10)$ pour illustrer ce résultat.

Exercice 2

Soit une fonction (d'utilité) linéaire à deux variables (les quantités de biens consommées)

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

où a et b sont des constantes positives. Calculer la différentielle totale. Représenter la courbe de niveau $\overline{u}$ dans le repère (x_1, x_2). Utiliser l'expression de la différentielle totale pour montrer que le $\text{TMS}_{2,1}$ vaut $\frac{a}{b}$.

Exercice 3

Soit une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Calculer la différentielle totale et en déduire le $\text{TMST}_{2,1}$. Montrer que les courbes de niveau sont strictement convexes dans le repère (x_1, x_2), i.e. montrer que $\text{TMST}_{2,1}$ est strictement décroissant.

Exercice 4

Soit une fonction de production Cobb-Douglas à trois facteurs

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

Calculer la différentielle totale et en déduire que $\left.\frac{dx_3}{dx_2}\right|_{\substack{y=\overline{y} \\ x_1=\overline{x}_1}} = -\frac{f_2}{f_3}$. Quelle est la valeur du $\text{TMST}_{3,2}$. Montrer que les courbes de niveau sont strictement convexes dans le repère (x_2, x_3), i.e. montrer que $\text{TMST}_{3,2}$ est strictement décroissant.

Exercice 5

Utiliser la différentielle totale pour trouver la pente des courbes d'indifférence pour chacune des fonctions d'utilité suivantes:

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$\widehat{u}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$$

et

$$\widetilde{u}(x_1, x_2) = B x_1^K x_2^K$$

où $B, K > 0$ sont des constantes. Que constatez-vous? Commenter.

Exercice 6

On peut remarquer que les trois fonctions d'utilité ci-dessus génèrent des courbes d'indifférence qui ont toutes la même pente. Ceci s'explique par le fait que $\widehat{u} = F(u) = u^2$ et $\widetilde{u} = G(u) = Bu^K$. Noter que les fonction F et G sont strictement croissantes pour $u > 0$. En effet, $F'(u) = 2u > 0$ et $G'(u) = BKu^{K-1} > 0$, pour $u > 0$. On dit que F et G sont des transformations monotones croissantes de u. Dans ce cas, si un consommateur avec des préférences représentées par une fonction d'utilité u préfère le panier de bien A au panier de bien B, avec $u(x_1^A, x_2^A) > u(x_1^B, x_2^B)$, alors un consommateur avec des préférences représentées par une fonction d'utilité $\widehat{u}$ ou $\widetilde{u}$ préférera également le panier de bien A au panier de bien B, car $u(x_1^A, x_2^A) > u(x_1^B, x_2^B) \Rightarrow \widehat{u}(x_1^A, x_2^A) > \widehat{u}(x_1^B, x_2^B)$ et $u(x_1^A, x_2^A) > u(x_1^B, x_2^B) \Rightarrow \widetilde{u}(x_1^A, x_2^A) > \widetilde{u}(x_1^B, x_2^B)$, du fait que les fonctions $\widehat{u}$ et $\widetilde{u}$ sont des transformations monotones croissantes de u. On dit que l'ordre de préférence entre A et B est préservé par les transformations de ce type.

Montrer que si $v(x_1, x_2)$ est une transformation monotone croissante de $u(x_1, x_2)$, alors le $\text{TMST}_{2,1}^v$ de v est égal au $\text{TMST}_{2,1}^u$ de u.

Exercice 7

Soit une fonction de production CES à deux facteurs:

$$y = \left[0,3 x_1^{-3} + 0,7 x_2^{-3}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

Utiliser la différentielle totale pour calculer $\text{TMST}_{2,1}$.

Exercice 8

Soit une fonction de production CES à deux facteurs:

$$y = A\left[\delta x_1^{-r} + [1-\delta] x_2^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}}$$

où $A > 0$, $0 < \delta < 1$ et $r > -1$. Utiliser la différentielle totale pour calculer $\text{TMST}_{2,1}$.

Exercice 9

Soit une fonction (d'utilité) Cobb-Douglas à deux variables

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

Montrer que les points $A = (8, 1)$, $B = (4, 4)$ et $C = (2, 16)$ sont sur une même courbe d'indifférence. Calculer le ratio $\frac{|\Delta x_2|}{|\Delta x_1|}$ entre les points C et B, et entre les points B et A. Comment évolue ce ratio lorsque l'on se déplace de gauche à droite sur la courbe d'indifférence. Commenter.

4 Propriétés de courbure (concavité et convexité)

Exercice 1

En utilisant le **Théorème 6**, montrer que la fonction

$$f(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]^2$$

est convexe.

Exercice 2

En utilisant le **Théorème 5**, montrer que la fonction

$$f(x_1, x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2$$

est strictement concave.

Exercice 3

En utilisant **Théorème 9**, montrer que la fonction

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}}$$

définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$, est strictement concave.

Exercice 4

En utilisant le **Théorème 9**, montrer que la fonction

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$, est concave.

Exercice 5

En utilisant le **Théorème 7**, montrer que la fonction

$$f(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]^{\frac{1}{2}}$$

définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$, est concave. Pourquoi le **Théorème 5** ne s'applique pas? Donner un exemple de variations $dx_1 \neq 0$ et $dx_2 \neq 0$ telles que $d^2y = 0$.

5 D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Exercice 1

En utilisant le **Théorème 12**, montrer que les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2_{++}$, sont quasi-concaves:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$$

$$g(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$$

En utilisant le **Théorème 9**, déterminer lesquelles sont également concaves.

Exercice 2

En utilisant le **Théorème 12**, montrer que les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2_{++}$, sont quasi-convexes:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$g(x_1, x_2) = 3x_1^4 + 5x_2^2$$

En utilisant le **Théorème 9**, déterminer lesquelles sont également convexes?

Exercice 3

Pourquoi peut-on déterminer aisément que la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{4}}$$

est quasi-concave sur $\mathbb{R}^3_{++}$? Pourquoi peut-on déterminer aisément qu'elle est strictement concave sur $\mathbb{R}^3_{++}$? Pourquoi peut-on déterminer aisément que la fonction

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{4}}$$

est quasi-concave mais pas strictement concave sur $\mathbb{R}^3_{++}$?

Exercice 4

Soit une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs

$$y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

Montrer qu'elle est homogène de degré $\frac{7}{6}$.

Exercice 5

Soit une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs (définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$):

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

où $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sont des constantes. Montrer que cette fonction est homogène. Quel est son degré d'homogénéité? Montrer que le théorème d'Euler s'applique, i.e.

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 = kf(x_1, x_2)$$

où k est le degré d'homogénéité de f.