

Feuille TD 3 : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Vrai ou faux ?

- (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue.
- (b) La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.
- (c) La somme d'une fonction continue et d'une fonction discontinue en un point est discontinue en ce point.
- (d) La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.
- (e) Toute fonction croissante est continue.

Exercice 2. Expliciter le domaine de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\cos(x + \pi))}.$$

Exercice 3. Étudier la continuité de la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$$

Pour (b), on pourra utiliser une identité remarquable. Pour (c) et (d), on pourra utiliser les identités remarquables suivantes : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ et $(a-b)(a^2 + a + b^2) = a^3 - b^3$ pour tous a et b réels.

Exercice 5. Soit f une fonction dérivable. Vrai ou faux ?

- (a) Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.
- (b) Si f est strictement croissante, alors $f' > 0$.

Exercice 6. Trouver des réels a et b de manière à ce que la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 7. Calculer les primitives suivantes par parties.

(a) $\int x^2 \cos x \, dx$

(b) $\int e^{-ax} \cos x \, dx \quad (a > 0)$

(c) $\int x^n \ln x \, dx, \quad (n \neq -1)$

(d) $\int \ln^2 x \, dx$

(e) $\int \sin^2 x \, dx$

Exercice 8. Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

(a) $\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx$

(b) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

(c) $\int \frac{1}{3+e^{-x}} \, dx$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$ (intégration par parties)

(b) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$ (à l'aide d'un changement de variable simple)

(c) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$ (changement de variable $x = \tan t$)

(d) $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + \frac{1}{x^2}) \arctan x \, dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{x}$)