

**Feuille TD 3 : Fonctions d'une variable réelle****Exercice 1.** Vrai ou faux ?

- (a) La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue.  
(b) La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.  
(c) La somme d'une fonction continue et d'une fonction discontinue en un point est discontinue en ce point.  
(d) La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.  
(e) Toute fonction croissante est continue.

**Exercice 2.** Expliciter le domaine de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\cos(x + \pi))}.$$

**Exercice 3.** Étudier la continuité de la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

**Exercice 4.** Déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$$

Pour (b), on pourra utiliser une identité remarquable. Pour (c) et (d), on pourra utiliser les identités remarquables suivantes :  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  et  $(a-b)(a^2 + a + b^2) = a^3 - b^3$  pour tous  $a$  et  $b$  réels.

**Exercice 5.** Soit  $f$  une fonction dérivable. Vrai ou faux ?

- (a) Si  $f' > 0$  alors  $f$  est strictement croissante.  
(b) Si  $f$  est strictement croissante, alors  $f' > 0$ .

**Exercice 6.** Trouver des réels  $a$  et  $b$  de manière à ce que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 7.** Calculer les primitives suivantes par parties.

(a)  $\int x^2 \cos x \, dx$

(b)  $\int e^{-ax} \cos x \, dx \quad (a > 0)$

(c)  $\int x^n \ln x \, dx, \quad (n \neq -1)$

(d)  $\int \ln^2 x \, dx$

(e)  $\int \sin^2 x \, dx$

**Exercice 8.** Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

(a)  $\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx$

(b)  $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

(c)  $\int \frac{1}{3+e^{-x}} \, dx$

(d)  $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx$

**Exercice 9.** Calculer les intégrales suivantes :

(a)  $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$  (intégration par parties)

(b)  $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$  (à l'aide d'un changement de variable simple)

(c)  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$  (changement de variable  $x = \tan t$ )

(d)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + \frac{1}{x^2}) \arctan x \, dx$  (changement de variable  $u = \frac{1}{x}$ )