Feuille TD 1 : Matrices

Exercice 1. Soient $\mathbf{u} = (3, 1, -1)$ et $\mathbf{v} = (1, 2, -3)$. Trouver $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ainsi que l'angle entre ces deux vecteurs.

Exercice 2. Soient $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{w} = -\mathbf{k}$.
(a) Calculer $\mathbf{x} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 4\mathbf{w}$.
(b) Trouver un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{w}$ et $\mathbf{x}$.
(c) Trouver un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer : $A + B$, AB, $B + BA$ et $3B - A^3$.

Exercice 4. Parmi les opérations matricielles suivantes, préciser celles qui sont bien définies, le format de la matrice obtenue et faire le calcul le cas échéant : $-2A, A + B, x + y, AB, BA, Ax, xA, By, yB$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
a) A est-elle inversible ? Si c'est le cas, calculer son inverse.
b) Calculer A^t.
c) A est-elle orthogonale ?

Exercice 6. Montrer que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est orthogonale.
Qu'en est-il pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$. En déduire $\det(AB)$.
b) Calculer A^{-1} et B^{-1}. En déduire $(AB)^{-1}$.

Exercice 8. Calculer det $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

Exercice 9. Le système suivant : $\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+y+z &= 3 \\ x+2y+2z &= 3 \end{cases}$ admet-il une solution unique ? Si ce n'est pas le cas, donner l'ensemble de toutes les solutions.

Exercice 10. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+y+z &= 3 \\ x+2y+z &= 3 \end{cases}$

Exercice 11. Trouver les valeurs λ pour lequelles le système $\begin{cases} -2x+y+z &= \lambda x \\ -11x+4y+5z &= \lambda y \\ -x+y &= \lambda z \end{cases}$ a une solution non nulle.

Exercice 12. (a) Trouver les valeurs λ pour lesquelle le système d'équations suivant a une solution non nulle :

$$\begin{aligned} 3x+y &= \lambda x \\ x+3y+z &= \lambda y \\ y+3z &= \lambda z \end{aligned}$$

(b) Déterminer toutes les solutions avec chaque valeur de λ.

Exercice 13. La matrice hamiltonien de Hükel de butadiène [1] est donnée par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les valeurs propres (en termes de α et β.

(b) Donner les vecteurs propres orthonormales.

Les relations suivantes peuvent vous être utiles : $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2$ *(*nombre d'or*)*, $\varphi^2 = (\sqrt{5}+3)/2$, $\varphi - 1 = (\sqrt{5}-1)/2 = 1/\varphi$, $\varphi^2 - 1 = \varphi$ *et* $\varphi^2 - \varphi = 1$.

1. Hydrocarbure éthylénique employé dans la fabrication du caoutchouc synthétique