(Total barème : 21 points).

Exercice 1.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq x \Rightarrow f_n(x) = 1.$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1.$

Ccl : (f_n) CV simplement vers la fonction f, constante, égale à 1 en tout $x \in \mathbb{R}_+$.

0,5 pts.

Rq : Si cette limite simple n'est pas obtenue, le reste de la question ne peut être traité correctement. $\Rightarrow$ 0 pour le reste.

$\boxed{\text{CVU ?}}$ Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ / $a < b$).

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq b \Rightarrow \forall x \in [a, b],$

$f_n(x) = 1.$

donc $n \geq b \Rightarrow \| f_n - f \|_{[a,b]} = 0.$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_{[a,b]} = 0$

Ccl : $(f_n) \xrightarrow{\text{CVU}} f.$

1 pt

$\boxed{\text{CU sur } [a,+\infty[\ ?}$ $a>0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x_n \geq 2n, \ f_n(x_n) = 0.$

donc $\left.\begin{array}{l} x_n \geq a \\ x_n \geq 2n \end{array}\right\} \Rightarrow \|f_n - f\|_{[a,+\infty[} \geq |f_n(x_n) - 1| = 1.$

(en fait on a égalité).

<u>Ccl</u>

$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{[a,+\infty[} \neq 0$: il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) sur $[a,+\infty[$, $a>0$.

1 pt

b/ Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = e^{\frac{1}{n}\ln(1+n^3x)}.$$

si $x=0$, $f_n(0) = 1$

si $x>0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{n}(\ln(n^3)+\ln(x))}$

donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ par règles de comparaison.

<u>Ccl</u> (f_n) converge simplement vers $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1. \end{array}$

0,5 pts

$\boxed{\text{CUC ?}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$

(On peut le vérifier en écrivant f_n comme composition de f° croissantes, on voit $f_n'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$).

donc si $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, on a :

$$\forall x \in [a, b], \quad \underbrace{f_n(x)}_{\geq f_n(0)=1} - 1 \geq 0$$

et $$f_n(x) - 1 \leq f_n(b) - 1.$$

soit $$\| f_n - f \|_{[a,b]} = f_n(b) - 1$$

or $$\lim_{n \to +\infty} f_n(b) = 1.$$

<u>Cl</u> $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}_+$, $\lim_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_{[a,b]} = 0$

Ceci montre que (f_n) converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}_+$.

Ispt

<u>Rq.</u> Sachant que $\begin{cases} (f_n) \xrightarrow{CS} f \\ f \text{ continue} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \text{ croissante} \end{cases}$

On peut conclure que la convergence est uniforme sur les compacts en utilisant " Dini 2 ",

$\boxed{\text{CU sur } [a, +\infty[,\ a>0\ ?}$ On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n(x) - 1| \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

donc $\|f_n - f\|_{[a,+\infty[} = +\infty$.

<u>Cl</u> : (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.

(c). On a $f_n(0) = 0$, et $\forall x > 0$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \underbrace{\frac{3^n x}{n\, 3^n x^2}}_{\frac{1}{nx}}$$

1pt

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

<u>Cl.</u> (f_n) Converge simplement vers la f° nulle.

$\boxed{\text{CVU ?}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f_n'(x) = \frac{3^n(1 + n\,3^n x^2) - 3^n x(2n\,3^n x)}{(1 + n\,3^n x^2)^2}$$

$$= \frac{3^n - n\,3^{2n} x^2}{(1 + n\,3^n x^2)^2} ;$$

D'où le tableau de variation :

x	0		$1/\sqrt{n3^n}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	

On a $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n3^n}}\right) = \frac{\sqrt{3^n}}{2\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty$.

$\frac{1}{\sqrt{n3^n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, donc pour tout segment contenant 0 (donc de la forme $[0,a]$ avec $a>0$) on a $\frac{1}{\sqrt{n3^n}} \in [0,a]$ pour n assez grd,

et $\|f_n\|_{[0,a]} = \frac{\sqrt{3^n}}{2\sqrt{n}}$; alors $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{[0,a]} = +\infty$

Cl Il n'y a pas CV sur les compacts de la suite (f_n).

1pt

$\boxed{\text{CV sur } [a,+\infty[\,,\ a>0\,?}$

$\forall x \geq a>0$, On a $0 \leq f_n(x) \leq \underbrace{\frac{3^n x}{n3^n x^2}}$
$= \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na}$.

donc $\|f_n\|_{[a,+\infty[} \leq \frac{1}{na}$

(en fait on a égalité).

et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{[a,+\infty[} = 0$

Cl (f_n) Converge uniformément vers la f° nulle sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, $a>0$.

1pt

Exercice 2.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leqslant \frac{1}{n^3}.$

Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, cette inégalité montre que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément sur $\mathbb{R}$, donc simplement sur $\mathbb{R}$. De plus :

0,5pt

(a) Les fonctions $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n^3}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$,

(b) $\sum f_n$ converge simplement (d'après ce qu'on vient de voir),

et $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n'(x)| = \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$

(c) Donc $\sum f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (par les mêmes arguments que ci-dessus)

D'après le cours, $(a.b.c) \Rightarrow f = \sum f_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1pt

2. Puisque $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,\pi] \subset \mathbb{R}$, et les fonctions f_n sont continues donc intégrables sur $[0,\pi]$, on peut utiliser le théorème d'interversion $\sum / \int$:

1pt

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3}\,dx}$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^4}\left(1-(-1)^n\right).$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair.} \\ 2 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x) = \sum_{\substack{(n \text{ impair}) \\ n=2p-1 \\ p=1}}^{+\infty} \frac{2}{(2p-1)^4}$.

1

ce qui est l'égalité demandée.

3. On a vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le cours $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1pt

Alors $$\int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right)}_{f'(x)} dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \underbrace{f(0)}_{=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^3}$$

Mais $\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Alors

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

1pt

4. On sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc $\sum f_n'$ converge sur $]0,\pi[$.
Il suffit alors de vérifier que la série $\sum f_n''$ converge uniformément sur les compacts de $]0,\pi[$ (car être $\mathcal{C}^2$ est une propriété locale) :

On utilise le thme d'Abel : on sait que $f_n''(x) = -\dfrac{\sin(nx)}{n}$

et $\forall x \in [a,b] \subset]0,\pi[$,

$$\left| -\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \right| = \left| \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \right) \right| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{1}{\sin(a/2)}$$

(cf cours ; si on refait le calcul, il est essentiel de terminer par la majoration par $1/\sin(a/2)$).

Comme $f_n''(x) = \underbrace{\frac{1}{n}}_{g_n(x) \searrow 0 \text{ uniformément}} \cdot \underline{(-\sin(nx))}$

Th. Abel $\Rightarrow \sum f_n''$ converge uniformément sur $[a,b]$.

$\Rightarrow$ f' est de classe $\mathcal{C}^1$, i.e f de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout segment de $]0,\pi[$, donc sur $]0,\pi[$.

Abel cité correct^t : 0,5 pts
résolut$^{°}$ complète : + 1 pt.

Exercice 3.

1. • On vérifie que la suite (a_n) est croissante, en effet

$a_0 = 1 \leq a_1 = 3 \leq a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 7$, (initialisation)

et si $a_{n+1} \geqslant a_n$, alors (hérédité) :

0,5 pt $a_{n+2} - a_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \geqslant 0$.

• Maintenant, $a_0 \leq 4^0 = 1$ (initialisation), et si $a_n \leq 4^n$

0,5 pt alors $a_{n+1} = 3a_n - \underbrace{2a_{n-1}}_{\geqslant 0 \text{ d'après } (a_n) \nearrow} \leq 3 \cdot 4^n \leq 4^{n+1}$. (hérédité).

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_n \leq 4^n$.

Alternativement, on peut démontrer par récurrence, sans vérifier le signe de a_n, que $|a_n| \leq 4^n$: vrai pour a_0 et a_1, et si $|a_{n-2}| \leq 4^{n-2}$ et $|a_{n-1}| \leq 4^{n-1}$ alors

$$|a_n| = |3a_{n-1} - 2a_{n-2}| \leqslant |3a_{n-1}| + |2a_{n-2}|$$
$$\leq 3 \cdot 4^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-2}$$
$$\leq 4^{n-2}(12+2) \leq 4^n.$$

Suite sur la page suivante !

Alors On pose $b_n = 4^n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4 \to 4$$

1pt.

Donc le rayon de converge de la série entière de terme général $b_n z^n$ est $\frac{1}{4}$, comme $|a_n| < b_n$ le rayon de converge de la série entière de terme général $a_n z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

2.

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n = 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n =$$

$$= 1 + 3z + 3\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^n$$

Dans la première somme on pose $n' = n - 1$, $n = 2 \Rightarrow n' = 1$, dans la deuxième on pose $n'' = n - 2$, $n = 2 \Rightarrow n'' = 0$

$$f(z) = 1 + 3z + 3\sum_{n'=1}^{+\infty} a_{n'} z^{n'+1} - 2\sum_{n''=0}^{+\infty} a_{n''} z^{n''+2}$$

Puis on change n' et n'' en n

$$f(z) = 1 + 3z + 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+2} = 1 + 3z + 3z\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

2pts

$$= 1 + 3z + 3z\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - a_0\right) - 2z^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n =$$

$$= 1 + 3z + 3z(f(z) - 1) - 2z^2 f(z) = 1 + 3zf(z) - 2z^2 f(z)$$

D'où l'on déduit que

$$f(z) - 3zf(z) + 2z^2 f(z) = 1$$

Ce qui équivaut à

$$f(z)(1 - 3z + 2z^2) = 1$$

Ou encore

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3.

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z - \frac{1}{2}} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$$

1pt donc $a_n = 2^{n+1} - 1, n \in \mathbb{N}$.

On pose $\alpha_n = 1$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 \to 1$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général z^n est $R_1 = \frac{1}{1} = 1$.

On pose $\beta_n = 2^n$

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \to 2$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général z^n est $R_2 = \frac{1}{2}$.

1pt Comme

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1 + 2^{n+1}) z^n$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière de terme général $(-1 + 2^{n+1})z^n$ est

$$R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{2}$$