L2 Mathématiques | **Université de Montpellier**
HAX403X Analyse 4 | **Année universitaire 2022-2023**

Examen, session 1
Mercredi 10 mai 2023

Documents et appareils électroniques sont interdits et doivent être rangés.

La notation tiendra compte de la précision de vos arguments.

Toute assertion doit être justifiée, les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être vérifiées.

Exercice 1 (8 points) Dans (a), (b) et (c) ci-dessous, les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont définies sur $\mathbb{R}_+$. Donner chaque fois la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et décider s'il y a convergence uniforme sur les compacts, et ensuite convergence uniforme sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

(a) $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, n], \\ \frac{2n-x}{n} & \text{si } x \in [n, 2n], \\ 0 & \text{si } x > 2n. \end{cases}$

(b) $f_n(x) = (1 + n^3 x)^{\frac{1}{n}}$.

(c) $f_n(x) = \frac{3^n x}{1+n3^n x^2}$.

Exercice 2 (7 points) On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que sa somme $f(x)$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que
$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$
3. Calculer $f'(x)$, puis montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \pi[$?

Exercice 3 (6 points) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et

$$\forall n \geq 2,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq 4^n$, et en déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ n'est pas nul.
2. Montrer que pour tout $|x| < R$ on a

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)(x-1)(2x-1) = 1.$$

3. En déduire R et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.