UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES

☐ Licence * (L) ☐ Master * (M)

MENTION : .... PARCOURS : ....

U. E. : .... N° de la salle de cours ou de l'Amphi : ....

SUJET DE M. : .... Date de l'épreuve : ....

SESSION * : ☐ 1 ☐ 2

* Cocher la case utile

N° D'ANONYMAT : | | | | | | |

(INDISPENSABLE)

N° de la copie : /

Exemple : 1/3 - 2/3

AVIS IMPORTANT :
Tout signe de reconnaissance sur la copie entraînera pour l'étudiant l'annulation de l'épreuve.

Ne pas écrire dans cette marge

NOTE

22/20

Cadre réservé au correcteur

Ex1

1- $\varepsilon(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))\Big)$

Taylor

$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$

$y'(t) = f(t, y(t))$ donc $y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t)$

$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$

Donc $y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\right) + O(h^3)$

D'autre part

$f(t_{n+1}, y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))) = f(t_n + h, y(t_n) + h f(\,))$

$= f(t_n, y(t_n)) + h \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \times (h f(t_n, y(t_n)))$

$+ O(h^2)$.

2

0,5

0,5

1

2

Ainsi ..
$\varepsilon(h) = O(h^3)$.

2_ le schéma est un schéma à un pas,

$y_{n+1} = y_n + h\,\phi(t_n, y_n; h)$

avec $\phi(t_n, y_n; h) = \frac{1}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(\,))\right]$

ϕ est lipschitz % h puisque f l'est.

l'erreur de consistance est en $O(h^3)$

Donc le cours nous dit (th de convergence des schémas à un pas) que

$\max_{t_n} |y(t_n) - y_n| = O(h^2) \longrightarrow 0$

le schéma est convergent et d'ordre 2

Ex2 on écrit le schéma sous la forme standard :

1) $y_{n+3} - y_{n+2} = h\left\{\frac{9}{24} f_{n+3} + \frac{19}{24} f_{n+2} - \frac{5}{24} f_{n+1} + \frac{1}{24} f_n\right\}$

on définit $\rho(z) = z^{3} - z^{2}$

$\sigma(z) = \frac{9}{24} z^3 + \frac{19}{24} z^2 - \frac{5}{24} z + \frac{1}{24}$

le schéma est consistant ssi

$\rho(1) = 0$ et $\rho'(1) = \sigma(1)$
V

$\rho'(1) = (\ \ 3)z^{\ 2} - (\ \ 2)z^{\ }\Big|_{z=1} = 1$

$\sigma(1) = \dfrac{9+19-5+1}{24} = 1$

donc le schéma est consistant.

2)- Etudions les racines de ρ

2

$\rho(z) = z^{\ 2}(z-1)$

les racines sont 0, 1 et 1 est racine simple donc le schéma est stable.

3)- D'après le cours stabilité + consistance $\Rightarrow$ convergence. et l'ordre du schéma

1

est 4 puisque l'erreur de consistance est $O(h^5)$

Ex3 1) les courbes caractéristiques sont telles que $X'(t) = X^2 + 1$

0,5

donc $\dfrac{X'}{X^2+1} = 1 \Leftrightarrow [\arctan X(t)]' = 1$

$\Leftrightarrow \arctan X(t) = t + cte$

donc $X(t) = \tan(t + cte)$

1.5

plus précisément si on veut que $X(0) = x$

$X(t) = \tan(t + \arctan x)$

elle est définie pour $t + \arctan x \in]-\pi/2, \pi/2[$

$t \in]-\pi/2 - \arctan x, \pi/2 - \arctan x[$

on veut $t \geq 0$ donc définie sur $[0, \pi/2 - \arctan x[$

3)

Soit $v(t) = u(X(t), t)$

$\dot{v}(t) = u_t + \dot{X}(t) u_x$

$= u_t + (X^2+1) u_x(X(t), t)$

0.5

$= 0$

donc $v(t) = c^{te} = v(0) = u(x, 0) = f(x)$

$u(\tan(t + \arctan x), t) = f(x)$

Reciproquement pour calculer

$u(y, t)$ exprimons x tel que

$\tan(t + \arctan x) = y$

$t + \arctan x = \arctan y + k\pi$

$\arctan x = \arctan y - t + k\pi$

$x = \tan(\arctan y - t)$

1,5

donc $\underline{u(y, t) = f(\tan(\arctan y - t))}$

la fonction est definie pour (y, t) tq

$\arctan y - t \in]-\pi/2, \pi/2[\Leftrightarrow t \in]\arctan y - \pi/2, \arctan y + \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow t \in [0, \arctan y + \frac{\pi}{2}[$ car $\arctan y - \pi/2 < 0$ $\forall y$

(On veut que $t = 0$ soit toujours dans le domain de definition

$u : \{(x, t) ; 0 \leq t < \arctan x + \pi/2 [\} \longrightarrow \mathbb{R}$

1

$(x, t) \longmapsto f(\tan(\arctan x - t))$

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

☐ Licence * (L) ☐ Master * (M)

MENTION : .... PARCOURS : ....

U. E. : .... N° de la salle de cours ou de l'Amphi : ....

SUJET DE M. : .... Date de l'épreuve : ....

SESSION * : ☐ 1 ☐ 2

N° D'ANONYMAT : | | | | | | |

(INDISPENSABLE)

* Cocher la case utile

N° de la copie : /

Exemple : 1/3 - 2/3

AVIS IMPORTANT :
Tout signe de reconnaissance sur la copie entraînera pour l'étudiant l'annulation de l'épreuve.

Ne pas écrire dans cette marge	NOTE	Cadre réservé au correcteur
	/	

Rq on peut aussi écrire

$$\tan(\arctan x - t) = \frac{x - \tan t}{1 + x \tan t}$$

donc $u(x,t) = f\left(\frac{x - \tan t}{1 + x\tan t}\right)$

mais le domaine de définition n'est pas tout à fait le même sous cette forme.

Ex4

1- en multipliant par δt

$$u_j^{n+1} - u_j^n + s\, u_j^n - r\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right) = 0$$

donc $u_j^{n+1} = -r u_{j-1}^n + (1 - 2r - s) u_j^n + r u_{j+1}^n$

$\wedge$

2) on sait que

$$\cancel{\frac{u^n_{j-1} - 2u^n_j + u^n_{j+1}}{\delta x^2} = u_{xx}}$$

$$\frac{u(x_{j-1},t_n) - 2u(x_j,t_n) + u(x_{j+1},t_n)}{\delta x^2} = u_{xx}(x_j,t_n) + O(\delta x^2)$$

$$\frac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\delta t} = u_t(x_j,t_n) + O(\delta t)$$

2

donc le schéma donne

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) :=$$

$$\delta t\left(\cancel{u_t} + O(\delta t) + \cancel{a\,u(x_j,t_n)} - \cancel{d\,u_{xx}(\ \ )} + O(\delta x^2)\right)$$

$$\varepsilon(\delta t,\delta x) = O(\delta t^2) + O(\delta t\,\delta x^2)$$

(On peut aussi effectuer un développement de Taylor)

3) en simplifiant on trouve :

$$G(k) = (1-2r-s) + r\left(e^{-ik\delta x} + e^{ik\delta x}\right)$$

$$= 1-2r-s + 2r\cos(k\delta x)$$

$$= 1-s-2r\left(1-\cos(k\delta x)\right)$$

1

4) $G(k) = 1-s-4r\sin^2\left(\frac{k\delta x}{2}\right)$

le schéma est stable si

$$|G(k)| \leq 1$$

1 donc si et seulement si

$$-1 \leq 1 - s - 4r\sin^2\theta \leq 1$$

comme $r, s > 0$ cela équivaut à

$$s + 4r\sin^2\theta \leq 2$$

donc $\boxed{2r + \frac{s}{2} \leq 1}$

5) Si on suppose $2r + s \leq 1$, ce qui est plus restrictif,

on peut majorer

$$|u_j^{n+1}| \leq r|u_{j-1}^n| + (1-2r-s)|u_j^n| + r|u_{j+1}^n|$$

$$\leq (r + (1-2r-s) + r) \max_j |u_j^n|$$

1

$$\max_j |u_j^{n+1}| \leq (1-s) \max_j |u_j^n|$$

par récurrence

$$\max_j |u_j^{n+1}| \leq (1-s)^n \max_j |u_j^0|$$

(On suppose implicitement que $\max |u_j^0| < \infty$)

---

6) $v(x,t) = e^{at} u$ vérifie

0,5

$$\begin{cases} v_t - d\,v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = f(x \end{cases}$$

en effet

$$v_t = a\,v + e^{at} u_t$$
$$= e^{at}(a u + u_t)$$
$$= e^{at} d\, u_{xx}$$
$$= d\, v_{xx} .$$

Comme l'equat. de diffusi. sur $\mathbb{R}$ vérifie $\max_x |v(x,t)| \leq \max_x |v(x,0)|$

on a $e^{at} \max |u(x,t)| \leq \max |u(x,0)|$

$$\max |u(x,t)| \leq e^{-at} \max |u(x,0)|$$

0.5

A la question 5) on a

$$\max_j |u(x_j, t^n)| \leq (1 - a\delta t)^n \max_j |u(x_j,0)|$$

1

$(1 - a\delta t)^n \sim e^{-at}$ donc la majoration obtenue à la question 5) est naturelle.