UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

Session : examen terminal session 1	
Date : 22/05/2023	Durée de l'épreuve : 2h
L3 Licence Mathématiques & Mécanique	Documents autorisés : néant
Parcours : MG, MSM	Matériels autorisés : néant.
UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)	

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (4 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

On considère le schéma suivant :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))\right)$$

où l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment régulière et que $y \mapsto f(t, y)$ est globalement lipschitzienne de rapport L, indépendant de t.

1. (2pts) Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance du schéma en fonction de h.
2. (2pts) On fixe $T > 0$. Estimer l'ordre de grandeur de $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$ en fonction de h. Est-ce que le schéma est convergent ? Si oui, quel est son ordre de convergence ? Justifiez soigneusement vos réponses.

Exercice 2 (5 pts) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On note $f_k = f(t_k, y_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Le schéma de Adams-Moulton est donné par

$$y_{n+1} - y_n = h\left(\frac{9}{24}f_{n+1} + \frac{19}{24}f_n - \frac{5}{24}f_{n-1} + \frac{1}{24}f_{n-2}\right).$$

C'est un schéma multipas implicite qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n, y_{n-1} et y_{n-2}.

1. (2 pts) Montrer que le schéma de Adams-Moulton est consistant. *On ne demande pas d'estimer l'ordre de l'erreur de consistance.*
2. (2 pts) Montrer que le schéma de Adams-Moulton est stable.
3. (1 pt) On *admet* que l'erreur de consistance est en $\mathcal{O}(h^5)$. Quelle est l'ordre de convergence du schéma ? Justifiez.

T.S.V.P.

Exercice 3. (5 pts) On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + (x^2+1)\, u_x = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \tag{2}$$

1. (2pts) Déterminer les courbes caractéristiques de l'équation (2).
2. (3pts) En déduire la solution $u(x,t)$ de l'EDP (2) obtenue. Est-elle définie $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$? ($\star$ *plus délicat*) Préciser son domaine de définition dans $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$.

Exercice 4. (6 pts) Soit $a > 0$ et $d > 0$ deux constantes réelles strictement positives. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + a\, u - d\, u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \tag{3}$$

Soit un pas de temps δt et un pas d'espace δx. On définit $x_j = j\delta x$ et $t_n = n\delta t$ pour $j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$. On note u_j^n une valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ calculée par le schéma numérique explicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + a\, u_j^n - d\, \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2} = 0$$

Dans la suite on pose

$$r = \frac{d \cdot \delta t}{\delta x^2}, \quad s = a \cdot \delta t.$$

1. (1pt) Montrer que le schéma s'écrit sous la forme
$$u_j^{n+1} = r\, u_{j-1}^n + (1 - 2r - s)\, u_j^n + r\, u_{j+1}^n.$$
2. (2pts) Montrer que l'erreur de consistance du schéma est $\mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta t\, \delta x^2)$.
3. (1pt) Soit $k \in \mathbb{R}$ et la donnée initiale $u(x,0) = \exp(ikx)$.
En supposant $u_j^n = (G(k))^n\, u_j^0$, calculer le facteur d'amplification $G(k)$.
4. (1pt) On suppose que $2r + (s/2) \leq 1$. Montrer que le schéma est stable.
Indication : On pourra poser $\theta = k\delta x$ et écrire $G(k)$ sous la forme suivante
$G(k) = 1 - s - 2r(1 - \cos\theta)$.
5. (1pt) Montrer que si $2r + s \leq 1$ alors $\max_j |u_j^n| \leq (1-s)^n\, \max_j |u_j^0|$.
6. (*bonus* hors-barème) Soit
$$v(x,t) = e^{a\,t}\, u(x,t).$$
Montrer que $v(x,t)$ vérifie l'équation de diffusion
$$v_t - d\, v_{xx} = 0, \quad v(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \tag{4}$$
En *admettant* que $\max_x |v(x,t)| \leq \max_x |v(x,0)|$, pouvez-vous expliquer la majoration obtenue à la question 5 ?