Licence 2 - 2016/2017

HLMA304 : Arithmétique

Thierry mignon

Octobre 2016

Contrôle continu

Durée : 1h30 – Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1. (cours) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. on note $\equiv_n$ la relation d'équivalence "congruence modulo n" dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathbb{Z}$ possède exactement n classes d'équivalences pour $\equiv_n$ qui sont : $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$.

Exercice 2.

(1) (cours) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a + kb = c$$

Montrer que $a \wedge b = b \wedge c$.

(2) Calculer, en fonction de n, $(n-1) \wedge (n+1)$.

(3) En déduire, en fonction de n, $(2n^2 + 5n - 1) \wedge (n^2 + 2n - 1)$.

Exercice 3.

(1) Écrire la décomposition de 12! en facteurs premiers.

(2) En déduire le nombre de diviseurs positifs de 12!.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{Z}$, montrer que $a^3 - a$ est divisible par 2 et par 3. En déduire que 6 divise $a^3 - a$.

Exercice 5. Calculer $d = 650 \wedge 66$ et déterminer l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$650u + 66v = d.$$

Exercice 6. On suppose que, pour effectuer des achats, on ne dispose que de deux types de pièces de valeurs 3 € et 5 €. On cherche quelles sont les sommes pouvant être payées si le vendeur ne peut pas nous rendre la monnaie. Ceci revient à chercher l'ensemble

$$S = \{3a + 5b, (a, b) \in \mathbb{N}^2\}.$$

(1) Montrer que si $n \geq 15$, $n \in S$.

(2) Trouver S.