UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

Session : épreuve de seconde chance	
Date : 11/05/2022	Durée de l'épreuve : 2h
L3 Licence Mathématiques & Mécanique	Documents autorisés : néant
Parcours : MG, MSM	Matériels autorisés : néant.
UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)	

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (4 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

On considère le schéma suivant :

$$y_{n+1} = y_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

où l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment régulière et que $y \mapsto f(t, y)$ est globalement lipschitzienne de rapport L, indépendant de t.

1. (2pts) Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance du schéma en fonction de h.
2. (2pts) On fixe $T > 0$. Estimer l'ordre de grandeur de $\max_{0 \le t_n \le T} |y(t_n) - y_n|$ en fonction de h. Est-ce que le schéma est convergent ? Si oui, quel est son ordre de convergence ? Justifiez soigneusement vos réponses.

Exercice 2 (6 pts) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On considère le schéma suivant :

$$y_{n+2} = y_n + 2h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

C'est un schéma *multipas* explicite qui permet de calculer y_{n+2} étant donnés y_{n+1} et y_n.

1. (1.5 pts) Montrer que le schéma est stable.
2. (1.5 pts) Montrer que le schéma est consistant.
3. (1.5 pts) Estimer l'ordre de l'erreur de consistance.
4. (1.5 pts) Est-ce que le schéma est convergent ? Quelle est l'ordre de convergence du schéma ? Justifiez vos réponses.

T.S.V.P.

Exercice 3. (4 pts) On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + (x+1)\,u_x = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \tag{2}$$

1. (2pts) Déterminer les courbes caractéristiques de l'équation (2).
2. (2pts) En déduire les solutions de l'EDP (2).

Exercice 4. (8 pts) Soit $c > 0$ et $d > 0$ deux constantes réelle strictement positives. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + c\,u_x - d\,u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \tag{3}$$

Soit un pas de temps δt et un pas d'espace δx. On définit $x_j = j\delta x$ et $t_n = n\delta t$ pour $j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$. On note u_j^n une valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ calculée par le schéma numérique explicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c\,\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\delta x} - d\,\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2} = 0$$

Dans la suite on pose

$$r = \frac{d \cdot \delta t}{\delta x^2}, \quad s = \frac{c \cdot \delta t}{\delta x}.$$

1. (1pt) Montrer que le schéma s'écrit sous la forme
$$u_j^{n+1} = (r+s)\,u_{j-1}^n + (1 - 2r - s)\,u_j^n + r\,u_{j+1}^n.$$
2. (2pts) Montrer que l'erreur de consistance du schéma est $\mathcal{O}(\delta t^2 + \delta t \cdot \delta x)$.
3. (2pts) Soit $k \in \mathbb{R}$ et la donnée initiale $u(x,0) = \exp(ikx)$.
En supposant $u_j^n = (G(k))^n\, u_j^0$, calculer le facteur d'amplification $G(k)$.
4. (2pts) On suppose que $2r + s \leq 1$. Montrer que le schéma est stable.
Indication : On pourra poser $\theta = k\delta x$ et écrire $G(k)$ sous la forme suivante
$G(k) = 1 - 2r(1 - \cos\theta) - s + se^{-i\theta}$.
5. (1pt) Montrer que si $2r + s \leq 1$ alors $\max_j |u_j^n| \leq \max_j |u_j^0|$.