Université de Montpellier
Faculté des Sciences
Mathématiques

Année Universitaire 2022-2023

TP noté

*Déposer vos fichiers (2 au maximum) sur moodle, section TP, dans l'espace de dépôt TP noté. Vous pouvez déposer des fichiers **.m** (Matlab/Octave) ou **.ipynb**. ou **.py** (Python). NB La notation tiendra compte de la lisibilité du code, des commentaires éventuels et des légendes des figures.*

Ecrire une fonction Matlab ou Octave ou Python qui calcule et trace la solution $u(x,t)$ de l'EDP

$$u_t - a\,u - c\,u_{xx} = 0$$

avec la donnée initiale $u(x,0) = \sin x$ sur le segment $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ pour $0 \leq t \leq T$. On prendra des conditions limites périodiques (voir plus bas).

```
function u = diffrea(a, c, T, xmin, xmax, dx, dt)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%ce script résout l'équation avec la méthode des différences finies
% u_t - au - cu_xx = 0
% u(x,0) = sin(x)
% sur  xmin<x<xmax, 0<t<T
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% maillage
x=(xmin:dx:xmax);
N= length(x);
t=(0:dt:T);
% ...A COMPLETER...
```

La fonction `diffrea` retourne une matrice `u = u(j,n)` où $u(j,n)$ est censée approcher $u(x_j, t_n)$. La grille de points (x_j, t_n) est obtenue en discrétisant le rectangle $(x_{min}, x_{max}) \times (0, T)$ avec un pas d'espace δx et un pas de temps δt.
Le réel c est supposé strictement positif. On note

$$r = \frac{c \cdot \delta t}{\delta x^2}, \quad s = a\delta t$$

Coder le schéma *explicite* suivant :

$$u_j^{n+1} = r\,u_{j-1}^n + (1 - 2r + s)\,u_j^n + r\,u_{j+1}^n \quad j = 2 \ldots N-1.$$

Pour gérer les indices $j = 1$ qui correspond x_{min} et $j = N$ qui correspond à x_{max}, vous prendrez des *conditions limites périodiques* : on convient que $u_0^n = u_N^n$. De même on convient que $u_{N+1}^n = u_1^n$. (*Attention si vous codez en Python* les indices commencent en zéro donc il faut décaler ce qui précède.)

Si on choisit (x_{min}, x_{max}) de largeur 2π, avec la condition initiale $\sin(x)$, la solution exacte est : $u(x,t) = e^{(a-c)t} \sin x$. **La fonction tracera sur une même figure les 3 courbes** : $x \mapsto u(x,0)$, $x \mapsto u(x,T)$ et la solution exacte à l'instant final $t = T$, $x \mapsto e^{(a-c)T} \sin x$.

Testez votre fonction avec les paramètres $a = 0.1,\ c = 0.5,\ T = 2,\ x_{min} = -\pi,\ x_{max} = \pi$, le pas d'espace $dx = 0.1$, et le pas de temps $dt = 0.01$. Puis reprenez les mêmes paramètres en *augmentant légèrement* le pas de temps $dt = 0.0102$. Que constatez-vous ? Expliquez. (*Ecrire vos réponses en commentaire dans votre fichier.*)

(BONUS) Coder également le schéma *implicite* suivant

$$-r\,u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2r - s)\,u_j^{n+1} - r\,u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

et comparer vos deux schémas avec les mêmes paramètres que précédemment.