MODULE HAX201X
ANNÉE 2022/2023

Correction du CC du 21 avril 2023

1. On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par les relations :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^3 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. En 0, on voit que $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ tend vers 0 lorsque $x \to 0$, donc $F'(0) = 0$. En dehors de 0, la fonction $F(x) = x^3 \cos(\frac{1}{x})$ est dérivable : on a $F'(x) = 3x^2 \cos(\frac{1}{x}) + x \sin(\frac{1}{x})$, $\forall x \neq 0$.

Admet-elle une dérivée seconde en 0 ? Ici $\frac{F'(x)-F'(0)}{x-0} = 3x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})$, $\forall x \neq 0$. D'une part, $\lim_{x \to 0} 3x \cos(\frac{1}{x}) = 0$ et d'autre part, $\sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$. Conclusion : F n'admet pas dérivée seconde en 0.

Admet-elle un DL_2 en 0 ? On remarque que $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^2} = 0$ donc F admet le DL_2 en 0 suivant : $F(x) \underset{0}{=} o(x^2)$.

2. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant $f(x) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$. Déterminer un équivalent simple en 0^+ de chacune des fonctions suivantes : $f(x)^3$, $\ln(|f(x)|)$ et $f(x) + \frac{1}{x}$.

Comme $f(x) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$, il existe (par définition) une fonction $r :]0, \epsilon[\to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = r(x) \ln(x)$, $\forall x \in]0, \epsilon[$ et $\lim_{x \to 0^+} r(x) = 1$.

Alors $f(x)^3 = r(x)^3 \ln(x)^3$, $\forall x \in]0, \epsilon[$ et $\lim_{x \to 0^+} r(x)^3 = 1$: ainsi $f(x)^3 \underset{0^+}{\sim} \ln(x)^3$.

On a $\ln(|f(x)|) = \ln(|r(x)|) + \ln(|\ln(x)|)$, $\forall x \in]0, \epsilon[$: ici $\lim_{x \to 0^+} \ln(|r(x)|) = 0$ tandis que $\lim_{x \to 0^+} \ln(|\ln(x)|) = +\infty$. Cela montre que $\ln(|f(x)|) \underset{0^+}{\sim} \ln(|\ln(x)|)$.

Pour le dernier cas, on voit que $\ln(x) \underset{0^+}{=} o(\frac{1}{x})$ car $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$. Ainsi $f(x) \underset{0^+}{=} o(\frac{1}{x})$, et cela permet de conclure que $f(x) + \frac{1}{x} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

3. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x + 1}$

D'une part $\sqrt{x^2 + 1} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x\left(1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2}) + o(\frac{1}{x^2})\right) = x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$ lorsque $x \to +\infty$.

De l'autre $\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = x\left(1 + \frac{1}{3}(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) + o(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})\right) = x + \frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x})$ lorsque $x \to +\infty$.

On obtient donc que $g(x) = \left(x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right) - \left(x + \frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x})\right) = \frac{1}{6x} + o(\frac{1}{x})$ lorsque $x \to +\infty$. On a montré que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x}$.

4. Calculer la limite de la fonction $G(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{x}{\ln(1+x^2)}$ lorsque x tend vers 0.

On a $G(x) = \frac{\ln(1+x^2) - x\sin(x)}{\sin(x)\ln(1+x^2)}$. Pour le dénominateur, comme $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x^2)$ et $\ln(1 + x^2) \underset{0}{=} x^2 + o(x^3)$, on a $\sin(x) \ln(1 + x^2) \underset{0}{=} x^3 + o(x^4)$. Pour le numérateur :

$$\ln(1 + x^2) - x\sin(x) \underset{0}{=} \left(x^2 + o(x^3)\right) - x\left(x + o(x^2)\right) \underset{0}{=} o(x^3).$$

Fianlement, $G(x) \underset{0}{=} \frac{o(x^3)}{x^3+o(x^4)} \underset{0}{=} \frac{o(1)}{1+o(x)}$. Conclusion : $\lim_{x\to 0} G(x) = 0$.

5. On considère une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant le DL_2 en 0 suivant : $h(x) = x - x^2 + o(x^2)$.

Déterminer le DL_4 en 0 de la fonction $x \mapsto h(x)^3$.

On a

$$h(x)^3 \underset{0}{=} \left(x - x^2 + o(x^2)\right)^3 \underset{0}{=} x^3\,(1 - x + o(x))^3 \underset{0}{=} x^3\,(1 - 3x + o(x)) \underset{0}{=} x^3 - 3x^4 + o(x^4).$$

Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + h(x)}$.

Comme $h(x) \underset{0}{\sim} x$, on a

$$\sqrt{1+h(x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{h(x)}{2} - \frac{h(x)^2}{8} + o(h(x)^2) \underset{0}{=} 1 + \frac{x - x^2}{2} - \frac{(x-x^2)^2}{8} + o(x^2) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + o(x^2).$$

6. Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange. Voir le cours.

7. Donner le développement de Taylor-Lagrange en 0, à l'ordre 3, de la fonction exponentielle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $c \in [0, x]$ (ou $[x, 0]$) tel que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^4}{4!}e^c}_{Reste(x)}$.

En déduire une valeur approchée de $e^{-0,1}$ à 10^{-5} près.

Si $x = -0,1$, alors $c \leq 0$ et donc $e^c \leq 1$. On voit alors que $0 \leq Reste(-0,1) \leq \frac{10^{-4}}{4!} < 10^{-5}$. Ainsi $1 - 10^{-1} + \frac{10^{-2}}{2} - \frac{10^{3}}{3!}$ est une valeur approchée de $e^{-0,1}$ à 10^{-5} près.

En déduire que $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme $Reste(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.