MODULE HAX201X
ANNÉE 2022/2023

CC du 21 avril 2023
Durée : 1 h 10

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Questions

1. On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par les relations :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^3 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Admet-elle une dérivée seconde en 0 ? Admet-elle un DL_2 en 0 ?

2. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant $f(x) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$. Déterminer un équivalent simple en 0^+ de chacune des fonctions suivantes : $f(x)^3$, $\ln(|f(x)|)$ et $f(x) + \frac{1}{x}$.

3. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $g(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1}$

4. Calculer la limite de la fonction

$$G(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

lorsque x tend vers 0.

5. On considère une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant le DL_2 en 0 suivant : $h(x) = x - x^2 + o(x^2)$.

(1) Déterminer le DL_4 en 0 de la fonction $x \mapsto h(x)^3$.

(2) Déterminer le DL_2 en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + h(x)}$.

6. Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange.

7. Donner le développement de Taylor-Lagrange en 0, à l'ordre 3, de la fonction exponentielle.

(1) En déduire une valeur approchée de $e^{-0,1}$ à 10^{-5} près.

(2) En déduire que $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.